GRAFY

// Martin Klazar: KAM MFF: Kombinatorické počítání (web)
// Matoušek, Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky

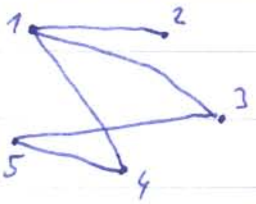
Úmluva: M - množina, $r \in \mathbb{N}$ $\binom{M}{r} = \{A \subset M \mid \#A = r\}$ // r-prvková podmnožina M

// značení

pozn: když M konečná $\#\binom{M}{r} = \binom{\#M}{r}$ // komb. číslo

def: Nechť V je kon. mn. a $E \subset \binom{V}{2}$. Pak uspoř. dvojici $G = (V, E)$ nazýváme grafem. V nazýváme množinou vrcholů a E mn. hran.

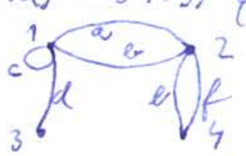
př.: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$



// mezi 2 vrcholy jen max 1 hrana

def (obecnější): V kon. mn., E kon. mn., $\varphi: E \to \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$.
Pak trojici $G = (V, E, \varphi)$ nazýváme graf
(*)

př.: $V = \{1, 2, 3, 4\}$ $E = \{a, b, c, d, e, f\}$
$\varphi(a) = \{1,2\}$, $\varphi(b) = \{1,2\}$, $\varphi(c) = \{1\}$, $\varphi(d) = \{1,3\}$, $\varphi(e) = \{2,4\}$, $\varphi(f) = \{2,4\}$



$\varphi(a), \varphi(b)$ ... násobná hrana
$\varphi(c)$ ... smyčka

pozn: (*) pokud navíc $\varphi: E \to \binom{V}{2}^{(1)}$ a φ je prosté$^{(2)}$ /* $^{(1)}$ vylučuje smyčky */
/* $^{(2)}$ vylučuje násobné hrany */ ⇒ jako původní definice

pozn.: $V = \{1, 2, \dots, n\} = \hat{n}$ ... ? kolik je grafů na n-prvkové množině

$n = 3$: 

0 hran — 1 hrana — 2 hrany

$\#E \leq \#\binom{V}{2} = \binom{\#V}{2} = \binom{n}{2}$

graf: z množiny $\binom{V}{2}$ vybírám hrany

tj. počet grafů je $2^{\binom{n}{2}}$

pozorování: M má k prvků, pak existuje 2^k podmnožin mn. M

def: Řekneme, že grafy $G = (V, E)$ a $H = (U, F)$ jsou izomorfní, když existuje bijekce $\pi: V \to U$ taková, že $\forall v_1, v_2 \in V$ platí $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{\pi(v_1), \pi(v_2)\} \in F$.

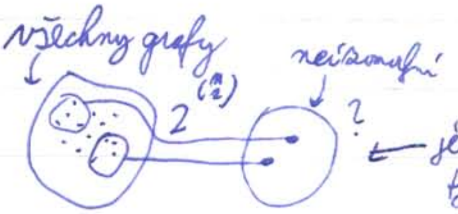
pozn.: • $G \sim H$ // G izomorfní s H

// "býti izomorfní" je ekvivalence

• $G \sim H \Rightarrow \#V = \#U$ a $\#E = \#F$

$\not\Leftarrow$ 

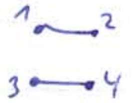
• ? kolik je navzájem neizomorfních grafů, tj. kolik je tříd ekvivalence



← jeden prvek představuje max $n!$ izo. prvků

tj. tříd je max $2^{\binom{n}{2}}/n!$

pozn.: Tříd ekvivalence t, počet navzájem neizo. grafů na n vrcholech je $\geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$

př.:  $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 3$

... některé permutace mi nedají nový graf

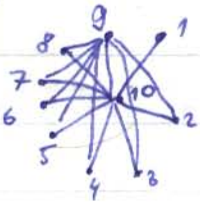
def: $G = (V, E)$ graf, pak $d_G(v) = \#\{u \in V, \{u, v\} \in E\}$ se nazývá stupněm vrcholu v v grafu G.

Když očíslujeme vrcholy $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$ pak n-tici $(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$ nazýváme skóre grafu G.

věta: $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E$

př.: $(1,3,3,4,6,6,6)$? je to skóre nějakého grafu?
ne, součet není sudý

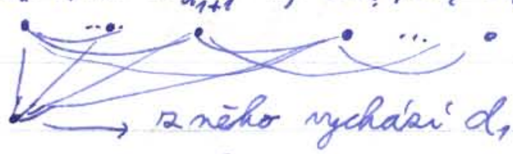
$(1,1,3,3,3,5,6,8,9)$?
10 vrcholů



spor → nejde (•), (••) je ve sporu s (•••)

věta: Nechť $d_1, d_2, \dots, d_n$ je nerostoucí posl. přir. nezáporných čísel ($\mathbb{N}_0$) tj. $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq 0$. $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ je skóre nějakého grafu $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ je skórem nějakého grafu.
// o 1 míň, mohu rekurentně opakovat

dk: $\Leftarrow$: mám $\{ (d_2 - 1, \dots d_{d_1+1} - 1, d_?, \dots, d_n)$

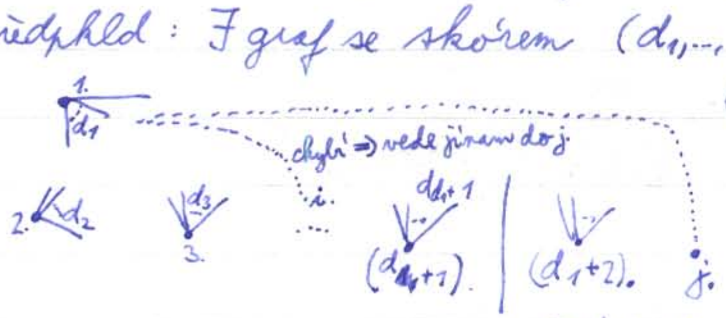


(!!)

přidám { → z něho vychází d_1 vrcholů

$\Rightarrow$: předpkld: $\exists$ graf se skórem $(d_1, \dots, d_n)$

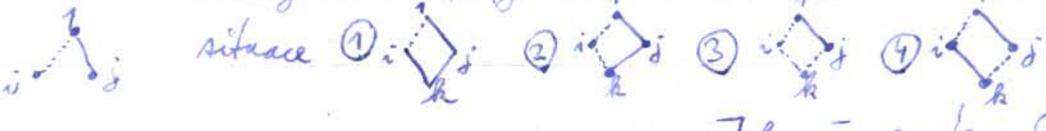
(x). ... x-tý vrchol



↖ šťastný případ, ∀ hrany vedou do 1. a dostanu situaci (!!)

jiná situace (méně šťastná) $\exists i,\ 2 \leq i \leq d_1 + 1 \quad \{1, i\} \notin E$
tj. do jednoho vrcholu z 1. hrana nevede (do i. nevede)
$\Rightarrow \exists j,\ j \geq d_1 + 2,\ \{1, j\} \in E$

proberene všechny $k \neq 1, i, j$



$\exists k$, že nastane ④ ↓

↓

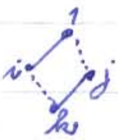
chci spočítat stupně vrcholů i, j (pobírám všechny vrcholy k) pro ①,② přispívá k. k i i j

$\Rightarrow d_i < d_j$ // ④ (když) neuvažuju

↓

spor s uspořádáním $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$

↓ tj. ④ někdy musí nastat

nastane-li ④  "zaměňuju" na 

pak
- stále nejsem v šťastné situaci $\Rightarrow$ opakuju (je tam furt nějaká taková hrana)
- už jsem $\Rightarrow$ QED

věta: nechť $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ jsou celá čísla.
$(d_1, \dots, d_n)$ je skóre $\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}$ platí $\sum_1^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{d_i; k\}$.

dk: $\underset{\substack{\uparrow \\ d_1}}{1.}$ $\underset{\substack{\uparrow \\ d_2}}{2.}$ $\dots$ $\underset{\substack{\uparrow \\ d_k}}{k.}$ | $(k+1).$ $\dots$ $(n).$

hrany s alespoň 1 koncem v $\overbrace{\{1, 2, \dots k\}}^{(\#)}$ rozdělím
- ⓐ oba konce v (#)
- ⓑ s jen jedním koncem

ⓐ: $k.(k-1) = \max 2.\binom{k}{2}$ → kolik max takových hran je; ↳ mám tam začátek i konec

ⓑ: $\sum_{j=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$ → do víc než do k jich běžet nemůže

pozn.: ekvivalence – neplatí
– platí, když + předpoklad $\sum_{j=1}^{n} d_j$ je sudá

def: nechť $G = (V, E)$ je graf. Číslo $\Delta_G = \max\{d_G(v), v \in V\}$ nazýváme maximální stupeň grafu a $\delta_G = \min\{ \text{\%} \}$ nazýváme minimální st. g. a když $\Delta_G = \delta_G$ pak graf nazýváme regulárně, resp. r-regulární, kde $r = \Delta_G = \delta_G$

pozn.: n, r ? $\exists$ graf r-regulární s n vrcholy ?
- n, r obě liché, $\sum_{v \in V} d_G(v) = n.r$ je lichý $\Rightarrow$ takový graf $\nexists$
- n sudé ⅂ r lib.

n liché, r sudé

n sudé, r lib

pozn.: $0 \le \delta_G \le \Delta_G \le n-1 \qquad n = \#V$

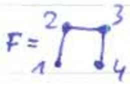
$$n\delta_G \le \sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E \le n\Delta_G$$

$$\delta_G \le \frac{2\#E}{n} \le \Delta_G$$

def: Nechť $G = (V, E)$ graf, pak $(V, \binom{V}{2} - E)$ nazýváme doplněk (komplement) grafu G a značíme $\overline{G}$.

// $E \subseteq \binom{V}{2}$ ....

Když $G \simeq \overline{G}$ pak G nazýváme samokomplementární.

př.: G:  $\overline{G}$:  ; $F =$  $\overline{F} =$ 

zadefinuji izo: $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 3$ $\quad F$ je

př.:  $\nexists$ samokomplementární graf

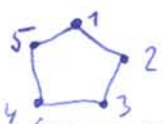
otázka: ? kdy ex. samokompl.

Nechť G je samokompl. $\#E = \#\left(\binom{V}{2} - E\right)$

nutná podmínka

$$\#E = \binom{n}{2} - \#E \Rightarrow 2\#E = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \#E = \frac{n(n-1)}{4}$$

pozorování: Když $\exists$ samokompl. g. na n vrcholech, pak $4 \mid n(n-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4 \mid n$ nebo $4 \mid (n-1)$



(2,2,2,2,2)

$G: (d_1, d_2, \dots, d_n)$; $\overline{G}: (n-1-d_1, n-1-d_2, \dots, n-1-d_n)$

DÚ: jde to, udělejte konstrukci

8.3.2005

Aplikace v analýze

věta (Brouwer 1911): nechť f je spojité zobrazení uzavřené koule $B \subset \mathbb{R}^n$ do sebe. Pak $\exists x \in B \; f(x) = x$.

dk: (1928 E. Sperner : simplex v $\mathbb{R}^2$)

T je trojúhelník, f spoj. zobr. : $T \to T \Rightarrow \exists x \in T \; f(x) = x$

platí-li pro $\triangle$, platí i pro $\circ$:  najdu bijekci (spojitou) $g : B \to T$

// g: definuji po papscích → "natáhnu" kruh na trojúhelník

mám-li $\varphi : B \to B$ /* spojité, koule to koule */

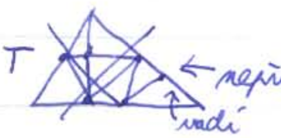
udělám $g \varphi g^{-1}$: /* $T \to B \to T$ */ $T \to T$

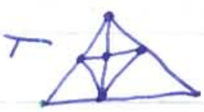
je spojité, použiju Spernera: $\exists x \in T \; g\varphi g^{-1}(x) = x$

pak $\varphi g^{-1}(x) = g^{-1}(x)$ /* $(g^{-1}(x))$ je pevný bod φ */ /* $\varphi(y) = y \quad y = g^{-1}(x)$ */

dokáži tedy Spernera, tedy pro $\triangle$

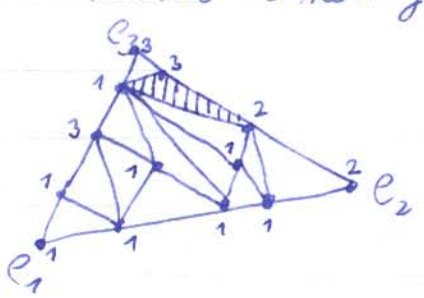
def: Trojúhelníky $T_1, T_2, \dots, T_k$ nazveme triangulací trojúhelníka T, když
1) $T = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$
2) $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow T_i \cap T_j$ je vrchol T_i a T_j nebo $T_i \cap T_j$ je společná hrana.





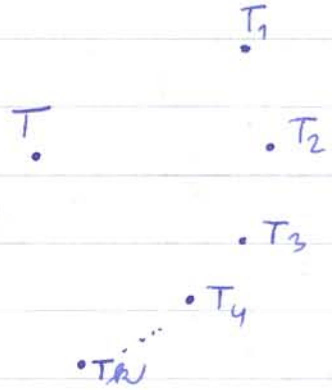
// musí být celou hranou

def: nechť $T_1, T_2, \dots, T_k$ je triang-ace trojú. T (s vrcholy e_1, e_2, e_3). Obarvení vrcholů všech trojú. $T_1, \dots, T_k$ barvami 1, 2 nebo 3 nazveme vlastní, když e_i dostane barvu $i = 1, 2, 3$ a vrcholy ležící na hraně e_i, e_j mají barvu i nebo j $\forall i, j \in \hat{3} \; i \neq j$.



lemma (Sperner): V jakémkoliv vlastním obarvení triangce $T_1,\dots,T_k$ trojúh. T existuje trojúh. T_i takový, že na jeho vrcholech se vyskytují všechny tři barvy. // vyšrafovaný na min. obr.

dk: mám triangci, graf: $V=\{T,T_1,\dots,T_k\}$



hrany: • T_i a T_j jsou v hraně (grafu), když $T_i\cap T_j$ je hrana (v Δ) T_i a T_j a koncové vrcholy této hrany mají barvu 1 a 2

• T a T_i jsou v hraně (grafu), když jedna hrana T_i leží v hraně e_1e_2 (v T) a ta hrana (toho T_i) má na koncích čísla 1 a 2

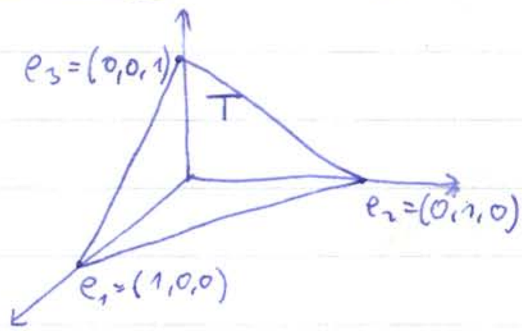
stupně v grafu: $0\le d(T_i)\le 2$ // 0, ∇_3, ∇_1 či ∇_2

$d(T)$ je lichý (lib.) // e_1 1 1 1 2 1 2 2 1 2 1 2 e_2 (1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.) → hrana je při každé změně 1→2 či 2→1

věta: $\sum_{v\in V} d(v) = 2\#E$ /* suma $d(v)$ sudá */ $\Rightarrow \exists\, T_i$ s $d(T_i)$ je liché $=1$

$\Rightarrow d(T_i)=1$ (1, 2, 3) → to je ten, co má všechny barvy

---



rce roviny: $ax+by+cz=d$ // obecně

$\to$ $x+y+z=1$

přeznačím $\underbrace{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1 \qquad \alpha_i\ge 0\ \ i\in\hat{3}}_{\text{popisuje } \Delta}$

/* každý bod z T popíši α_i */ $\forall x\in T\ \ x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$

$f(x): T\to T \quad f(x)=\alpha_1'e_2+\alpha_2'e_2+\alpha_3'e_3$ $\quad f(x)$ chci spojité, souřadnice jsou spoj. fcionále

$\alpha_1'=\alpha_1'(x)=$ první souřadnice bodu $f(x)$

$\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3'=1 \quad \alpha_i'\ge 0 \quad i\in\hat{3}$

v případě $\alpha_i=\alpha_i'\ \forall i \Rightarrow x=f(x)$

když $x\ne f(x)$ pak $\exists i\ \alpha_i>\alpha_i'$ a $\exists j\ \alpha_j<\alpha_j'$

↓

proč se nemůže stát $\alpha_1 \ge \alpha_1', \alpha_2 \ge \alpha_2', \alpha_3 \ge \alpha_3'$ $\Rightarrow \sum \alpha_i = \sum \alpha_i' = 1$ pak $\alpha_i = \alpha_i'$

sporem: nechť f nemá pevný bod $x \in T$ $\quad b(x) := \min\{i = 1,2,3 : \alpha_i > \alpha_i'\}$

mám T, /* vezmu posl. triangcí */ pro každé n zkonstruujeme triangci

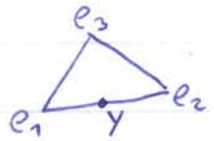
$T_1^{(n)}, \dots, T_{k_n}^{(n)}$ a požaduji $\max\{\text{obvod } T_i^{(n)} : i = 1, \dots, k_n\} \to 0$

// chci menší δ, ale ne nudle! //

barvy: $b(e_1)$ $\qquad e_1 = 1.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3$ $\qquad // \alpha = (1,0,0)$

$f(e_1) = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3$

vím: $1 > \alpha_1'$ // $\sum \alpha_i' = 1$ + není pevný bod $\exists \alpha_i' \neq \alpha_i$



$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + 0.e_3$

$f(y) = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3$

kdyby $b(y) = 3$: $\alpha_1 \le \alpha_1'$ /* není 1 */, $\alpha_2 \le \alpha_2'$ /* $b(y) \neq 2$ */, $\alpha_3 > \alpha_3'$ // > nikdy nastane

$\Rightarrow$ spor, muselo to dostat $b(y) = 1$ či $b(y) = 2$

$\Rightarrow$ je to vždy vlastní obarvení

$\forall n$ $T_{i_n}^{(n)}$ má vrcholy 3 barev: $b(x^{(n)}) = 1, b(y^{(n)}) = 2, b(z^{(n)}) = 3$

tj. $x^{(n)} \in T$ /* T kompaktní := uzavřená, omezená */

$\exists x^{(k_n)} \to x_0 \in T$

$$y^{(k_n)} = \underbrace{y^{(k_n)} - x^{(k_n)}}_{\text{je to strana trojúhelníka menší než obvod}} + \underbrace{x^{(k_n)}}_{\to x_0} \longrightarrow x_0$$

$|\ | < \text{obvod } T_{i_n}^{(n)} \to 0$

$\alpha_1(x^{(k_n)}) > \alpha_1'(x^{(k_n)})$

$\underbrace{\alpha_1(x_0) \ge \alpha_1'(x_0)}$ $\quad // n \to \infty$

$\alpha_2(y^{(k_n)}) > \alpha_2'(y^{(k_n)})$

$\underbrace{\alpha_2(x_0) \ge \alpha_2'(x_0)}$ $\quad // n \to \infty$

$\alpha_3(z^{(k_n)}) > \alpha_3'(z^{(k_n)})$

$\underbrace{\alpha_3(x_0) \ge \alpha_3'(x_0)}$ $\quad // n \to \infty$, sečtu

$$\underbrace{\alpha_1(x_0) + \alpha_2(x_0) + \alpha_3(x_0)}_{1} \ge \underbrace{\alpha_1'(x_0) + \alpha_2'(x_0) + \alpha_3'(x_0)}_{1}$$

$=$

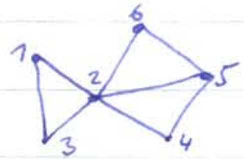
$\to$ tj. všude je rovnost

$\to x_0$ je pevný bod

$\to$ spor s předpkld. že nemá žádný vl. bod

3D $\to$ mám čtyřstěn; malé čtyřstěny; barvy 1, 2, 3, 4; místo hrany $\to$ stěna; – jde to, analogicky

def: Nechť $G=(V,E)$ je graf. Posl. vrcholů $(v_i)_{i=1}^{k}$ nazveme <u>sledem</u> délky k v grafu G, když $\forall i=1,\dots,k$ je $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$.
v_0, v_k nazýváme počáteční, resp. koncový vrchol sledu.
Sled $v_0 v_1 \dots v_k$, ve kterém $v_i \neq v_j$ $\forall i,j=0,\dots,k$ nazveme <u>cestou</u> délky k.
Sled $v_0 v_1 \dots v_k$ ve kterém $v_0 = v_k$ nazveme <u>cyklem</u> délky k.
Sled $v_0 v_1 \dots v_k$, kde $v_0 = v_k$ a $\forall i,j = 1,\dots,k$ $i \neq j$ $v_i \neq v_j$ nazveme <u>kružnicí</u> délky k.

př.: 

12123 sled   26526542 cyklus délky 7
123 cesta   1231 kružnice

pozn.: Když existuje sled s počátkem v_0 a koncem v_k, pak existuje cesta s poč. v_0 a koncem v_k

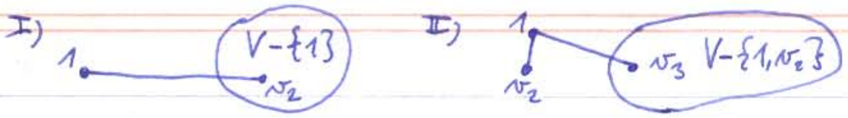
pozn.: $\# V = n$, pak délka každé cesty $\leq n-1$

def: Nechť $G=(V,E)$ je graf. Řekneme, že vrcholy u a v jsou <u>spojeny</u> v grafu G, jestliže ex. sled s počátkem u a koncem v.
Relace "býti spojeny" je ekvivalence. // sama se sebou - sled délky 0, symetrie, tranzitivita
Třídy této ekvivalence nazýváme <u>komponenty</u> grafu a jejich počet značíme $C(G)$.
Když $C(G)=1$, pak G nazýváme <u>souvislý graf</u>.

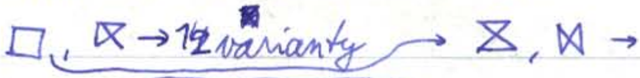
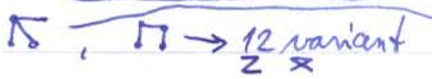
?: kolik je souvislých grafech na n vrcholech // $G=(V,E)$
$n=3$ $\Rightarrow 4$
pozorování: $\forall$ rozklad $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_i \neq \emptyset$ $i=1,2$
$\exists u \in V_1$ $\exists v \in V_2$ že $\{u,v\} \in E$
důsledek: souvislý graf na n vrcholech má alespoň $n-1$ hran

↓

$\uparrow$

I) 

$n=4$: $3 \le \# E \le \binom{n}{2} = 6$

- s šesti hranami:  1
- pěti :  6
- čtyřmi :  → 12 variant → 3 varianty 15
- třemi :  → 12 variant → 4 varianty 16

$\Sigma = 38$

věta: Označme s_n počet souvislých grafů na n vrcholech. Pak pro posl. $(s_n)_{n \in N}$ platí rekurentní vztah.

$$n 2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \, 2^{\binom{n-k}{2}} s_k \qquad (*)$$

dk: všechny grafy na n vrcholech $2^{\binom{n}{2}}$

vezmu n kopií každého grafu a v každé kopii začervením jiný vrchol červ. barvou → tj. $n . 2^{\binom{n}{2}}$ grafů = obrázků

vyberu ty obrázky, kde je červený vrchol v komponentě s k vrcholy
k pevné

kolik jich je? $\binom{n}{k}$. /* ←výběr vrcholů pro komp. na k vrch */ . s_k . k /* kolik můžu obarvit */ . $2^{\binom{n-k}{2}}$ /* → lib. graf na zbylé místo */

pozn.: (*) $2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} s_k \, 2^{\binom{n-k}{2}}$

15.3.2005

$s_1 = 1$; $s_2 = 1$; $s_3 = 4$; $s_4 = 38$; $s_5 = 728$; $s_6 = 26704$; $s_9 = 60\,296\,291\,072$

$(*) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k \, s_k \, 2^{\binom{n-k}{2}} + n s_n$

značení grafu

def.: Nechť $G=(V,E)$ graf na n vrcholech, $n = \# V$. BÚNO $V = \{1, 2, \dots, n\}$.
Pak matici $A \in R^{n \times n}$ takovou, že $A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{když } \{i,j\} \notin E \\ 1 & \{i,j\} \in E \end{cases}$

nazýváme adjacenční matice grafu.

pozn.: z def: A je symetrická

pozn.: • $A_{ii}=0 \Rightarrow \mathrm{tr}A=\sum A_{ii}=0$

• A je diagonizovatelná $A=P^{-1}DP$ kde diag(D) jsou vl. čísla A

• $\mathrm{tr}D=\mathrm{tr}A=0=\sum\lambda_i$

• A_{ij} ozn $(A_G)_{ij}$

jak poznám souvislý graf?

věta: Nechť $A=A_G$ je matice grafu $G=(V,E)$. Pak $\forall i,j,k;\ k\in\mathbb{N}$; $i,j\in\{1,\dots,n\}=V$; platí A^k_{ij} = počet sledů délky k z vrcholu i do j

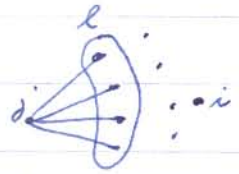
$i=v_0v_1\dots v_k=j$ $\quad\{v_{s-1},v_s\}\in E$

dk: indukcí na k

$k=1$ $\quad\{i,j\}\in E \Rightarrow A_{ij}=1$

$\notin E \quad A_{ij}=0$

$k+1 \quad A^{k+1}_{ij}=(A^k A)_{ij}=\sum_{l=1}^{n}A^k_{il}A_{lj}=\sum_{\{l|\{l,j\}\in E\}}A^k_{il}$



↳ počet sledů z i do j délky k+1 kde předposlední vrchol je l

~~k+1, kde předposlední~~

věta: Nechť A je adj. matice grafu $G=(V,E)$, kde $\#V=n$.
Pak G je souvislý právě tehdy, když $\sum_{k=0}^{n-1}A^k>0$ // tj. všechny prvky kladné

dk: $\Rightarrow$ G je souvislý $\Rightarrow \forall i,j\in\{1,\dots,n\}\ i\neq j$ $\exists$ sled s počátkem i a koncem j $\Rightarrow$ existuje cesta délky $k\le n-1$ z i do j; délka každé cesty v grafu o n vrcholech $\le n-1$

$\Rightarrow A^k_{ij}\ge 1 \Rightarrow (\sum_0 A^k)_{ij}>0$

pro $i=j$ $(A^0)_{ij}=I_{ij}=1 \Rightarrow (\sum_{k=0}^{n-1}A^k)_{ij}>0$

$\Leftarrow$ $\forall i,j\ \exists k\ A^k_{ij}>0 \Rightarrow \exists$ sled délky k z i do j → je-li G souvislý

/* Hornerovo schéma */ $=((A(A+I))+I)A+I$ .... /* $O(n^3)$ */

pozn.: když počet hran $\#E>\binom{n-1}{2}$ kde $n=\#V \Rightarrow$ G je souvislý

dk: sporem: nechť není souvislý → rozdělím vrcholy do alespoň 2 částí

mezi nimiž není hran

$\#E\le\underbrace{\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}}_{\text{pokud } \le\binom{n-1}{2}\ \Rightarrow\ \text{spor}}$ $\quad n-1\ge k\ge 1$

$k(k-1)+(n-k)(n-k-1) \overset{?}{\le} (n-1)(n-2)$

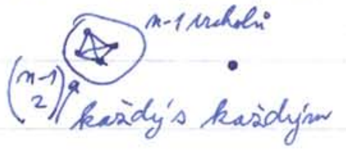
$k^2 \cancel{-k} + \cancel{n^2} - 2kn + k^2 - n \cancel{+k} \overset{?}{\le} \cancel{n^2} - 3n + 2$

$2k^2 - 2kn + 2n - 2 \overset{?}{\le} 0$

$k^2 - kn + n - 1 \overset{?}{\le} 0 \quad /:(k-1)$

$k+1-n \overset{!}{\le} 0 \quad \Rightarrow k \le n-1$

$\exists$ graf, že $\#E = \binom{n-1}{2}$ a G není souvislý



pozn.: když δ /* min. st. grafu */ $= \min\{d(v), v \in V\} > \left[\frac{n}{2}\right] \Rightarrow G$ je souvislý

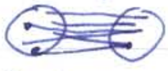
dk: sporem $\bigcirc^{V_1}_{\#V_1 = k}$ $\bigcirc^{V_2}_{\#V_2 = n-k}$ tak, že mezi V_1 a V_2 nejsou hrany

$\delta \le d(v) \le \underline{k-1}$, pro $v \in V_1$ a $\delta \le d(v) \le \underline{k}$, $v \in V_2$

sečtu, $2\delta \le n-2 \Rightarrow \delta \le \frac{n}{2} - 1 \Rightarrow \delta \le \left[\frac{n}{2}\right] - 1$; pro spor potřebuju $\left[\frac{n}{2}\right] \le \delta \le \left[\frac{n}{2}\right] - 1$

opět je to nejlepší možná mez

pozn.: G není souvislý $\Rightarrow \bar{G}$ je souvislý /* doplněk */

dk: G: (V_1) (V_2) ; $\bar{G}$:  /* každý s každým, uvnitř brambory nic */

G:  $\bar{G}$:  .... obrácená implikace neplatí

pozn.: samokomplementární grafy jsou souvislé

def.: K_n graf kompletní (úplný): $V = \{1, \dots, n\}$, $E = \binom{V}{2}$.

P_n cesta ~~na n vrcholech~~ délky n: $V = \{0, 1, \dots, n\}$, $E = \{\{i-1, i\}, i = 1, \dots, n\}$

C_n kružnice délky n: $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ $E = \{\{i,j\}, i-j = 1 \bmod n\}$

$K_{n,m}$ kompletní (úplný) bipartitní graf $V = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{1', 2', \dots, m'\}$

$E = \{\{i, j'\}, i \le n, j \le m\}$

/*  hrany jen mezi 2 částmi */

def.: G je souvislý graf, $d(u,v)$ = délka minimální cesty z v do u a nazývá se vzdálenost vrcholu u a v $\forall u,v \in V$.
$d: V \times V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

Bipartitní grafy

def.: Graf $G=(V,E)$ nazveme bipartitní, pokud existuje rozklad $V = V_1 \cup V_2$ takový, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$; $V_1, V_2 \neq \emptyset$ a $E \cap \binom{V_1}{2} = \emptyset = E \cap \binom{V_2}{2}$.

lze rozčlenit do 2 částí

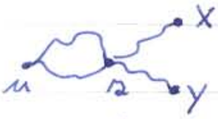
jak poznám, že G je bipartitní?
pozn.: G je bipartitní $V_1 = \{1, \dots, k\}$, $V_2 = \{k+1, \dots, n\}$ $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array}$
udělám pro všechny permutace $P^T A P = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 0 \end{array}\right)$ .... moc složitý

def.: Nechť $G=(V,E)$ je graf. Pak graf $G'=(V',E')$ nazveme podgrafem G, když $V' \subset V$ a $E' \subset E \cap \binom{V'}{2}$.
$G'=(V',E')$ nazveme indukovaný podgraf grafu G, když $E' = E \cap \binom{V'}{2}$

věta: $G=(V,E)$ je bipartitní graf $\Leftrightarrow$ G neobsahuje kružnici liché délky jako svůj podgraf /* G není podgraf kružnice liché délky */
dk: $\Rightarrow$ V_1 V_2 je-li tam kružnice .... sudá délka, jinak to nejde
$\Leftarrow$ nemá kružnici liché délky
vezmeme 1 komponentu G, ozn. G_0, tj. G_0 je souvislý graf
$u \in$ vrchol z G_0 $V_1 = \{v \in G_0 \mid d(u,v)$ je sudá$\}$
$V_2 = \{v \in G_0 \mid d(u,v)$ je lichá$\}$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
vím dále $V_1 \neq \emptyset$; $u \in V_1$ /* $V_2 = \emptyset$ může: z u nevede hrana $\Rightarrow$ ale mám souvislý graf! tedy pokud G_0 = 1 vrchol */
G_0 alespoň 2 vrcholy $\Rightarrow V_2 \neq 0$

ukážeme, že ve V_1 není žádná hrana

sporem:  $x, y \in V_1$, protože z u do x má nejkratší cesta P_x (P_y) sudou délku $l^{(y)}(k)$

označme z poslední společný vrchol na cestách P_x a P_y 

kus cesty z P_x z u má stejnou délku jako kus cesty P_y z u do z

 kružnice, délka 1 /* $\{x,y\}$ */ $- 2 \cdot$ něco /* $P_x + P_y$ */ $+$ délka P_x $+$ délka P_y

↓ je lichá! (od z do z $\{u,z\}$; sudá $\{z,x\}$; sudá $\{z,y\}$)

pozn.: $2^{\binom{n}{2}}$ všech grafů na n vrcholech

b_n počet bipart. gr. na n vrcholech

$n=2$: $b_2 = 2^{\binom{2}{2}}$

$n=3$: $4\times$, $1\times$, $4\times$, Δ

$\frac{b_n}{2^{\binom{n}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} 0$ tj. obecný graf není skoro jistě bipartitní

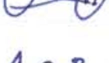
"Každý graf má velký bipartitní podgraf."

věta: Nechť $G=(V,E)$ graf na $2n$ vrcholech. Pak existuje takový rozklad $V = A \cup B$ takový, že $\#A = \#B = n$ počet hran

$\#\{\{u,v\}, u \in A, v \in B\} \geq \frac{1}{2}\#E$ $\binom{*}{1}$

dk: náhodně]

22.3.2005

opáčko: bipartitní grafy  G je bipart. → neobs. kružnici liché délky

věta upřesnění $\#V = 2n$; $A \cap B = \emptyset$; $\binom{*}{1}$ počet hran mezi A a B je alespoň půlka $\#E$

dk: náhodně vybíráme n prvkové podmn. $A \subset V$ $B := V - A$

def. n.v. X, která počítá počet hran s jedním koncem v A a druhým koncem v B

střední hodnota ... $E(X) \geq \frac{1}{2}\#E$ .... to ukážu

$\Rightarrow$ pak $\exists A$ hran "na štorc" $\geq \frac{1}{2}\#E$

n.v. $a_1, a_2, \dots, a_k$
$\downarrow p_1 \ \downarrow p_2 \ \dots \downarrow p_k$ ... pravd. pak $E(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i p_i$

věta: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

∀ hranu e definuju jinou n.v. $X_e = \begin{cases} 0 \ \dots \text{ když oba konce e leží v A nebo oba v B} \\ 1 \ \dots \text{ jinak} \end{cases}$ // jde „na štorc"

$X = \sum_{e \in \text{všechny hrany}} X_e$ pak $E(X) = \sum_e E(X_e)$

$E(X_e) = 0 \cdot p(\text{konce e leží ve stejné části}) + 1 \cdot p(\text{konce v částech různých})$ to se najde $\binom{*}{2}$

$\binom{*}{2}$: $u \overset{e}{—} v$ $\quad p() = \dfrac{2\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \binom{*}{3}$ → symetricky prohodím-li u a v

$\binom{2n-2}{n-1}$ .... počet voleb mn. A, aby $u \in A, v \notin A$

$\binom{*}{3}$: $\dfrac{2\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \dfrac{n \cdot n \cdot 2}{2n(2n-1)} = \dfrac{n}{2n-1} > \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow E(X_e) > \dfrac{1}{2}$

pak $E(X) = \sum_e E(X_e) > \sum_e \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \# E$ ∎

// Paul Erdős 1940: když mám nenulovou pravd. existence, pak daná věc existuje

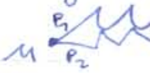
Stromy, Lesy

def: Graf bez kružnic se nazývá les a
souvislý les je strom.

př: les:  strom - les jen s jednou komponentou 

pozn.: Souvislý graf je ~~les~~ strom právě tehdy, když mezi každou dvojicí vrcholů u a v tohoto grafu existuje jediná cesta z u do v

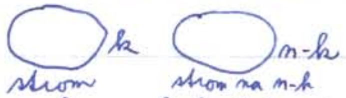
dk: ⇒ G je strom, sporem, nechť ∃ 2 vrcholy tak, že mezi nimi najdeme 2 cesty P_1 a P_2

 najdeme na P_1 a P_2 ve směru od u 1. vrchol z_1,
za kterým se P_1 a P_2 začnou lišit 
a z_2 ... 1. vrchol, kdy se sejdou; z_1, z_2 tvoří kružnici,
spor s tím, že jsme předpokládali strom

$\Leftarrow$ sporem, předpoklad: mezi 2 vrcholy $\exists_1$ cesta; nechť by G nebyl stromem $\rightarrow$
$\rightarrow$ obsahuje kružnici " ⬠ " $\rightarrow$ spor s tím, že $\exists_1$ cesta

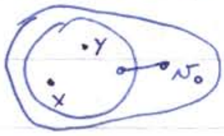
věta: Nechť G je souvislý graf na n vrcholech. Pak G je strom $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \#E = n-1$

dk: $\Rightarrow$ G je strom, ubereme jednu (náhodně) hranu $e \in E \Rightarrow G' = (V, E - \{e\})$
G' je určitě les, má nanejvýš 2 stromy, ale G' není souvislý $(\overset{*}{4})$
$\Rightarrow$ G' má právě 2 stromy
$(\overset{*}{4})$ kdyby G' byl souvislý $a \overset{e}{—} b$: mezi a a b $\exists$ cesta v G' $\Rightarrow$
mezi a a b $\exists_2$ cesty $\rightarrow$ G není strom $\rightarrow$ spor

G': 
strom na k vrcholech, strom na n-k vrcholech

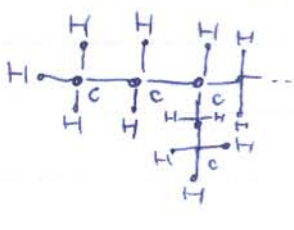
důkaz dělám indukcí na počet vrcholů
má k-1 hran, má n-k-1 hran .... z ind. předpokladu
$\Rightarrow$ G' má n-2 hran $\Rightarrow$ G má n-1 hran ■

$\Leftarrow$: G je souvislý a $\#E = n-1 \Rightarrow \forall$ stupně v G $d(v) \geq 1$; $\sum_v d(v) = \overbrace{2\#E}^{=2n-2}$
$\Rightarrow \sum_{v \in V} \underbrace{d(v)}_{\geq 1} = 2n-2 \Rightarrow \exists$ takový vrchol $v_0 \in V$ $d(v_0) = 1$ //dokonce budou 2
$\#V = n$



$G'' = (V - \{v\}, E \setminus \{v, \text{něco}\})$ G'' je souvislý
v původním G mezi x, y $(x, y \neq v_0)$ cesta z x do y nevyužívá v_0
počet vrcholů v G'' $= n-1$ /*o 1 méně*/ a počet hran v G'' = počet v G - 1 = n-2
$\Rightarrow$ indukce pro G'' $\Rightarrow$ G'' je strom
do G'' vrátím v_0 — nevznikne kružnice? ne, $\Rightarrow$ G je strom ■

př.: nasycené (→ bez dvojných vazeb) acyklické uhlovodíky



počet vrcholů je $a+b$ ($a \rightarrow C$, $b \rightarrow H$)
$2\times$ počet hran $= \sum$ stupňů $= 4.a + 1.b = 2\times(a+b-1) =$ (→ čtyřmocný uhlík)
$= 2a + 2b - 2$ pak $2a + 2 = b$
$\Rightarrow$ počet vodíků je $2a+2$

př.: města • ; dráty \ a vím, kolik to stojí → najděte "síť" aby ∃∀ spojení a cena byla minimální

$G=(V,E)$, $C: E \to \mathbb{R}^+$ /* C… cena spojení */

úkol: najít G' podgraf G že vrcholy G = vrcholy G', G' souvislý a $\min_{G'} \sum_{e \in G'} c(e)$

pozorování: vím: G' bude strom /* kružnice je zbytečná */
předpoklad: původní G je souvislý

// Čech Borůvka to vyřešil

1) za e_1 zvol hranu s nejmenší cenou

2) když jsou vybrané hrany $\{e_1, \dots, e_i\}$ vyber další e_{i+1} tak, aby v grafu s hranami $\{e_1, \dots, e_i, e_{i+1}\}$ nebyla kružnice a mezi všemi kandidáty na hranu e_{i+1} s touto vlastností zvol e_{i+1} s nejmenší cenou

3) zastav se, když nelze provést 2)

→ hladový algoritmus → ? dostaneme opravdu minimum ?

označme $T^* = (V, \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$ $\#V = n$

zastavím se při $n-1$ ..... při více to nejde → nebyl by to strom
zastavil-li by se dřív → nebyl by to byl les

→ bude to strom s $n-1$ hran, bude min?

věta: Strom T^* z hladového algoritmu je nejlevnější souvislý podgraf G s n vrcholy.

dk: sporem, tj. není nejlevnější ⇒ ∃ T strom tak, že cena T < cena T^*
nechť T je strom, kde se nabývá minima
na stromech, kde se nabývá minima def. $f(T) := \min\{i \mid e_i \notin T\}$ (i-tá hrana z hladového alg.)

$\tilde{T} = \operatorname{argmax}_T f(T)$ // $\tilde{T}$ strom, kde $f(T)$ nabývá svého maxima

$f(\tilde{T}) = k$ $\tilde{T} \supset \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$

$\tilde{T} + e_k$ .... není strom, má n hran ⇒ obsahuje kružnici C s hranou e_k

⇒ alespoň jedna hrana z C nepatří do T^*

def. $\tilde{\tilde{T}} := \tilde{T} + e_k - e'$; $c(e_k) \le c(e')$

↓

$e_1, \dots, e_{k-1}, e' \in \tilde{T}$ tj. $e_1, \dots, e_{k-1}, e'$ neuzavírají kružnici

proč jsem nevybral e' místo e_k ? e' byla dražší

$\tilde{\tilde{T}}$ je strom ? hrany - dobrý počet, souvislý -

cena $\tilde{\tilde{T}} \leq$ cena $\tilde{T}$; $f(\tilde{\tilde{T}})$ $\tilde{\tilde{T}} \supset \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k\}$

$\to k$ ... spor, neb $k = \max f(\tilde{T})$

// 1952 alg. znovu objeven: Kruskal

// teorie matroidů → je zatím hlouběji schovaná

př.: počet stromů na n vrcholech .... T_n

$T_1 = 1$

$T_2 = 1$

$T_3 = 3$ ×3 otočení

$T_4 = 16$ $\frac{4!}{2} = 12$ strom 2, st 3, $4\times$ → pozpátku je to to samý

věta: $T_n = n^{n-2}$ pro $\forall n > 0$.

pozn.: všech grafů je $2^{\binom{n}{2}} \overset{?}{\geq} n^{n-2}$ .... počet stromů

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \overset{?}{\geq} 2^{(n-2)\log_2 n} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \overset{?}{\geq} (n-2)\log_2 n \quad \text{OK}$$

dk:

lemma: $(n-1)T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} T_k T_n\, k(n-k)$ // → na konci str

def. bipartitní graf

T_n vrcholů $\{ \vdots \in$ každý je strom; $\vdots (\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)$, (T', T'') } uspořádané dvojice stromů takové →

$1 \in$ vrchol T'

vrcholy $T' \cap$ vrcholy $T'' = \emptyset$

vrcholy $T' \cup$ vrcholy $T'' = \{1, \dots, n\}$

hrany def. tak, že strom T z levé části spojím hranou H s (T', T'') když

$\exists$ hrana v T že ubráním této hrany se T rozpadne na T' a T''

rekurentní vztah: - kolik hran z leva do prava

stupeň vrcholu nalevo → alespoň $n-1$

stupeň l zprava doleva → T' má k vrcholů, T'' má $n-k$ vrcholů

$\hookrightarrow k(n-k)$ $\left(\underset{T'}{k}, \underset{T''}{n-k} \right)$

dvojic s k vrcholy v T' a $n-k$ vrcholy v T'': $\binom{n-1}{k-1} \cdot T_k \cdot T_{n-k}$

tak $(n-1)T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} T_k T_{n-k}\, k(n-k)$

~~KOMB 12/6~~
GRAF 19

$\text{cena } \tilde{\tilde{T}} \leq \text{cena } \tilde{T}$

$\tilde{T}$ jsme vybrali mezi stromy kde se nabývalo min

$\tilde{\tilde{T}} \supset \{e_1, \dots, e_{k-1}, e_k\}$

$f(\tilde{\tilde{T}}) > k$ .... spor

k bylo max. hodnoty pro f

1952 Kruskal

matroidy

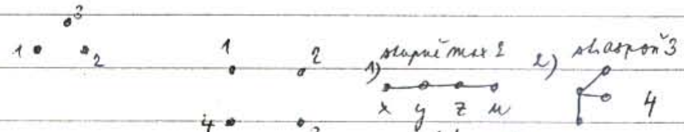
Př: T_n = počet stromů na n vrcholech

$T_1 = 1$

$T_2 = 1$

$T_3 = 3$

$T_4 = 16$



$\frac{4!}{2} = 12$

VĚTA: $T_n = n^{n-2} \quad \forall n.$

všech grafů: $2^{\binom{n}{2}}$

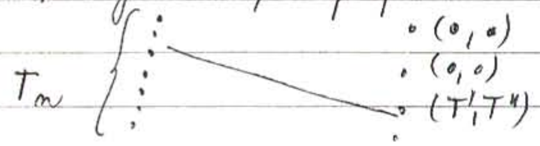
$\forall$ stromů: n^{n-2}

$2^{\binom{n}{2}} \geq n^{n-2}$

$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \overset{?}{\geq} 2^{(n-2)\log_2 n} \qquad \frac{n(n-1)}{2} \overset{?}{\geq} (n-2)\log_2 n$ jasné

LEMMA:

Definujme bip. graf



každý (•) strom na n vrcholech

$(\circ,\circ)$ uspořádané dvojice stromů

vrcholy $T' \cup$ vrcholy $T'' = \{1, \dots, n\}$ } vlastnosti dvojice stromů

vrcholy $T' \cap$ vrcholy $T'' = \emptyset$ }

$1 \in$ vrchol T'

hrany: strom T z levé části spojím hranou s (T', T'')

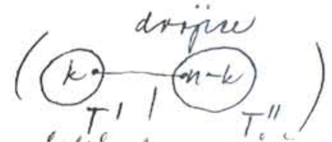
když existuje hrana v T, když ji ubráním se T rozpadne na T' a T''

rekurentní vztah:

hrana zleva doprava: stupeň vrcholu nanejvýš $n-1$ — ubráním 1 hrany se rozpadne na 2 stromy

$(n-1)\,T_n$

zprava doleva: T' má k vrcholů, T'' měl $n-k$ vrcholů



dvojice s k vrcholy v T' a $n-k$ vrcholy v T'' — kolika zp. mohu přidat hranu, aby vznikl strom / lze přidat pouze na [illegible]

množ. vrcholů pro T': $\binom{n-1}{k-1} T_k \, T_{n-k}$ každá má st. — stupeň $k\cdot(n-k)$

pro 1 strom aby měl k vrcholů

$$(n-1)\,T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} T_k \, T_{n-k} \, \underline{k\,(n-k)}$$

kolik z nich vede hran.

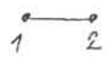
$T_n = n^{n-2}$

LEMMA: $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$; $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$, $n \geq 2$.
Počet stromů na vrcholech $\{1, 2, \dots, n\}$ se stupni $d_1, \dots, d_n$ je roven $\dfrac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\dots(d_n-1)!}$.

Dk: indukcí na n

$d_1, d_2 \geq 1$

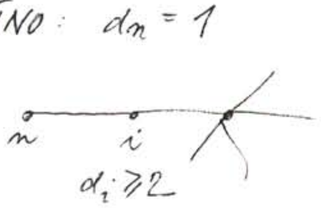
$d_1 + d_2 = 2(2-1) = 2 \Rightarrow d_1, d_2 = 1$



$\dfrac{0!}{0!\,0!} = 1$

$\sum d_i = 2(n-1) \Rightarrow$ alespoň 1 číslo $d_i = 1$

BÚNO: $d_n = 1$



$d_i \geq 2$ ($d_i = 1$ … není to strom)

strom na vrcholech $1, \dots, n-1$ se stupni $d_1, \dots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \dots, d_{n-1}$

takových stromů je z IP $\dfrac{(n-3)!}{(d_1-1)!(d_i-2)!\dots(d_{n-1}-1)!}$

všech stromů s $d_1, \dots, d_n$ je $\sum_{\substack{i \\ d_i \geq 2}} \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!\,(d_i-2)!\cdots(d_{n-1}-1)!} =$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-3)!\,(d_i-1)}{(d_1-1)!\,(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!} = \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!} \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}(d_i-1)}_{2(n-1)-\underbrace{d_n}_{=1}-(n-1)}}_{n-2}$$

počet stromů: $\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!\underbrace{0!}_{(d_n-1)!}}$

Dk věty, že $T_n = n^{n-2}$

$$T_n = \underbrace{\sum_{d_1 \dots d_n \in N}}_{\sum d_i = 2(n-1)} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

$$\binom{m}{\alpha_1}\binom{m-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{m-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\cdots\binom{m-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \quad \binom{\alpha_k}{\alpha_k} = 1$$

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^m = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=m,\ \alpha_i \geq 0} \cdot\, x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)(x_1+x_2+\dots+x_k)\cdots(x_1+x_2+\dots+x_k)$$

$$\sum_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=m-\alpha_1}}^{m} \binom{m}{\alpha_1} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} = (x_1+x_2)^m$$

kolika způsoby můžu vybrat x^{α_1}

spec. volba:

$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1$

$k = n$

$m = n-2$

$$n^{n-2} = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = n-2 \\ \alpha_i \geq 0}} \frac{(n-2)!}{\alpha_1!\,(n-2-\alpha_1)!} \cdot \frac{(n-2-\alpha_1)!}{\alpha_2!\,(n-2-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(n-2-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-1})!}{\alpha_n!\,(n-2-\alpha_1-\dots-\alpha_n)!}$$

$$n^{n-2} = \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_n = n-2 \\ \alpha_i \geq 0}} \frac{(n-2)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$$

subst.

$d_i - 1 = \alpha_i$

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i - n = 2n-2-n$$

další dk: "Proofs from the Book"

Povýšov

postupně vytvářený kořenový strom

počítáme trojice (T, r, φ) r – kořen obarvím červeně

T je strom na n vrcholech

$\varphi : E \to \{1, \dots, n-1\}$ jak brzo se hrana dostala do stromu

bijekce

takových trojic je $T_n \cdot n \cdot (n-1)!$

z každého vrcholu ke kořeni 1 šipka, z kořene žádná už nevede

už máme umístěno k hran ošipkovaných

$k < n-1$

nesouvislý les

les má $n-k$ komponent (samotná kom. nebsahuje kružnici, je souvislá)

$\Rightarrow$ nová hrana musí spojovat 2 různé komponenty

dočasné kořeny → komp. už mají 1 vrchol, do kt šipky pouze vedou

kolika zp. můžu přidat novou hranu

pouze do spec. vrcholů v komp. $= n-k-1$

z nich do té stejné komponenty

může vycházet na lib vrchol $= n$ způsobů

přidat $k+1$ ošipk. hranu mohu: $n(n-k-1)$ způsoby

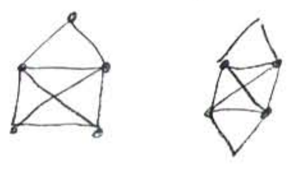
dělám to pro k: $\prod_{k=0}^{k=n-2} n(n-k-1) = n^{n-1}(n-1)!$

$T_n \cdot n \cdot (n-1)!$

$T_n = n^{n-2}$

najít procházku, aby každým mostem prošla právě 1 a skončila, kde původně vyšla

namalovat domeček 1 čarou



popeláři:

(uvažujeme i násobné hrany $\ominus$)

DEF. nechť $G = (V, E)$ je graf (i s možnými nás. hranami).

Říkáme, že G je eulerovský, jestliže v G ex. cyklus, který každou hranu grafu použije právě jednou.

zapisuji cyklus: $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m = v_0$

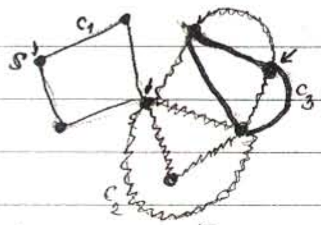
$m = \#E$.

$E = \{e_1, \dots, e_m\}$

VĚTA: (1738) nechť G je souvislý graf.
G je eulerovský $\Leftrightarrow$ všechny stupně jsou sudé!

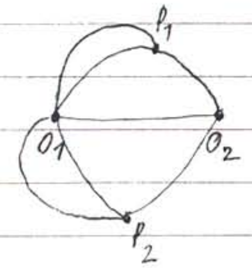
Dk: $\Rightarrow$: pro každou návštěvu vrcholu potřebuje 2 hrany
$+ v_0 \rightarrow \; + v_0 \leftarrow \; \Rightarrow$ sudý počet

$\Leftarrow$



G je souvislý, vrcholy sudý st.
nestane-li se, že nemůžu dál
jsem zpátky na startu
(nemám ještě použ.)

cyklus c_1 - na něm najdu vrchol, ze kt. vede hrana, kt. ještě není obarvená a pokračuji
cyklus c_2
spojím $c_1 + c_2$
spojím $c_1 + c_2 + c_3$, až použiju $\forall$ hrany, najdu procházku, mám euler. graf.



nelze najít procházku
mají liché st.

Pozn.: G obsahuje eulerovský sled, když v G existuje sled, který projde každou hranu právě jednou. (nemusí končit a začínat ve stejném vrcholu)

Důsledek: nechť G je souvislý graf. G obsahuje eulerovský sled $\Leftrightarrow$ všechny stupně jsou sudé nebo právě dva stupně jsou liché.

DK: $\Rightarrow$: je-li procházka, každý vrchol navštívím – spotřebuji 2 hrany
start, konec nemusí být totožné
jsou-li 2 hrany
nejsou-li ve start., kon. mi stačí 1 hrana ->
2 můžou být liché

$\Leftarrow$ $\forall$ sudé – mám eul. cyklus ✓
2 liché

uměle rozšířím o vrchol, kt. spojím na ty dva "liché" vrcholy
nový graf má všechny vrcholy sudého stupně, je eulerovský, tj. eulerovský cyklus
nový vrchol beru jako startovací
najdu cyklus, umažu a volím za liché stupně start/cíl ✓

<u>náhodně eulerovský graf</u>
lib. procházka skončí, že jsem opět ve start. vrcholu
a $\forall$ hrany byly použity

Problém obchodního cestujícího

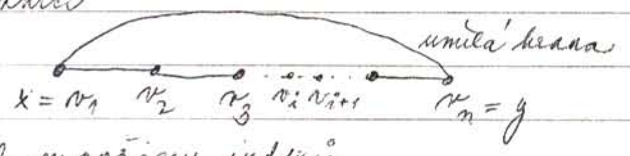
DEF: řekneme, že graf $G = (V, E)$ je hamiltonovský, když v G existuje kružnice délky $\#V$, tj. kružnice, která použije všechny vrcholy. každý vrchol právě 1

VĚTA: (1952) Dirac
když $\delta \geq \frac{n}{2}$, pak G je hamiltonovský. $(n = \#V)$
min. st. grafu

DK: sporem
nechť G není hamiltonovský
(přidávání hrany dokud není hamilt.)
zkonstruuji $G^* \supseteq G$ tak, aby G^* byl maximální nehamilt. nadgraf G
nadgraf
přidám-li 1 hranu už je hamilt
$G^+ = G$

G^* není úplný graf. $\Rightarrow \exists\, x, y \in V$ G^* + hrana $\{x, y\}$ hamilt. graf
(max.)

očísluji vrcholy podle pořadí, v jakém je procházím hamilt. kružnici



def. 2 množiny indexů

$S = \{ i \mid \{x, v_{i+1}\} \text{ hrana v } G^* \}$

$T = \{ j \mid \{y, v_j\} \text{ hrana v } G^* \}$

ukážeme 1) $S \cap T = \emptyset$

kdyby ne:

najdu kružnici aniž bych použila umělou hranu $\{x, y\}$

tzn. G^* obsahuje hamilt. kružnici = spor

2) $n \notin S \cup T$
vrchol

$\#S = d_{G^*}(x)$

$\#T = d_{G^*}(y)$

$n \overset{\le 2\delta}{\le} d_G(x) + d_G(y) \le d_{G^*}(x) + d_{G^*}(y) = \#(S \cup T) < n$

spor $n < n$

5.4.2005

1974 Chvátal

věta: nechť $G = (V, E)$ je graf a $x, y \in V$, že $\{x, y\} \in E$ a $d(x) + d(y) \ge n$. Pak G je hamiltonovský právě tehdy když $G + \{x, y\}$ je hamiltonovský.

def: nechť $G = (V, E)$ je graf a $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_k$ posl. grafů a množin vrcholů V a množin hran $E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_k$, kde $G_0 = G$ $G_i = (V, E_i)$, kde $E_i = E_{i-1} \cup \{v, u\}$ takové, že $d_{G_{i-1}}(u) + d_{G_{i-1}}(v) \ge n = \#V$ a $\{u, v\} \notin E_{i-1}$ //nově přidaná hrana
a pro graf G platí, že když $\{u, v\} \notin E_k$ tak $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) < n$ pro $\forall\, u, v \in V$ $u \ne v$.

Pak G_k nazýváme uzávěr grafu G a značíme $c(G)$.

důsledek: G je hamiltonovský $\Leftrightarrow$ $c(G)$ je hamiltonovský

př.: $G =$  $= c(G)$ je hamilt.

věta:

/* pozn.: $\delta \geq \frac{n}{2}$ $c(G) = K_n$ úplný graf na n vrcholech
*/ je hamilt.

nechť $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n$,
které splňují $\forall k < \frac{n}{2}$ $d_k \le k \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k$.
Pak G je hamilt.

dk: dokážeme, že podmínka věty na skóre implikuje $C(G) = K_n$
sporem: nechť $C(G) \neq K_n \Rightarrow \exists u, v \in V$ $\{u, v\}$ nejsou v hraně $C(G)$,
protože mají málo stupňů: $d'(u) + d'(v) < n$
// $d'(.)$ stupeň v $C(G)$
najdeme takový pár u, v aby $\underbrace{d'(u) + d'(v)}_{\le n-1}$ byla max
BÚNO: $\underset{q}{d'(u)} \le d'(v)$
$q < \frac{n}{2}$
def $S(u) = \{x \in V - u \mid \{u, v\} \notin E\}$ → v $C(G)$
/* ? card(S(u)) */ $v \in S(u)$; $\forall x \in S(u)$ $d'(x) \le d'(v) \le n-1-q$
↳ $\#S(u) = n-1-d'(u) = n-1-q$
def $S(v) = \{x \in V - v \mid \{x, v\} \notin E\}$ → v uzávěru
$\#S(v) = n-1-d'(v) \geq q$
vím $q = d'(u) \le n-1-d'(v)$ $\Uparrow$ $d'(u) \le n-1-d'(u) = n-1-q$
pak $d'(x) \le d'(u) = q$ $\forall x \in S(v)$
zavedu $S(u) \cup \{u\}$; $\#S(u) \cup \{u\} = n-q$
pak $\forall x \in S(u) \cup \{u\}$ $d'(x) \le n-1-q$
$S(v)$ v $C(G)$ mám alespoň q vrcholů se stupněm $\le q$
v G —//— q —//— $\le q$
$d_q \le q$ // d_i jsou uspořádány, prvních q vrcholů je $\le q$
v $C(G)$ mám alespoň $n-q$ vrcholů stupně $\le n-1-q$
tedy v G $d_{n-q} \le n-1-q$

$d_q \le q$ $\wedge$ $d_{n-q} \le n-1-q$ .... SPOR

hamiltonovská cesta

pozn. Nechť $G=(V,E)$ je graf. Def graf $G^*=\{V\cup\{x\}, E\cup\{\{x,v\}\mid v\in V\}\}$, kde $x\notin V$. Pak G obsahuje hamilt. cestu $\Leftrightarrow$ G^* obsahuje hamilt. kružnici.

dk:  // všechny body z G napojím na x

věta: Když graf G je samokomplementární, pak G obsahuje hamilt. cestu.

dk: G samokompl. a nechť $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n$

$\overline{G}$, kde platí $\underbrace{n-1-d_1}_{d_n} \ge n-1-d_2 \ge \dots \ge \underbrace{n-1-d_n}_{d_1}$ // $\overline{G}$ doplněk

$\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $d_i = n-1-d_{n-i+1}$

G^* má stupně $d_1+1 \le d_2+1 \le \dots \le d_n+1 \le n$

ukážu, že pro $\forall k < \frac{n+1}{2}$ ukážu, když $d_k+1 \le k \overset{?}{\Rightarrow} d_{n-k}+1 \ge n+1-k$

$d_{k+1} \le k$ $\quad n-1-d_{n-k+1}+1 \le k$

$d_{n-k+1} \ge n-k$

$d_{n-k+1}+1 \ge n-k+1$ ... // to je to, co jsem chtěl ověřit

Párování v grafech

def. Nechť M je taková podmnožina množiny hran E grafu $G=(V,E)$, že $\forall e,f\in M: e\neq f$ $e\cap f=\emptyset$.
Pak M nazýváme párování grafu G.

př.:  $M=\emptyset$ ... taky je párovdní

 je párování

př: burza 

tak párování = co se realizuje

úkol: párování s max hranami

def.: Řekneme, že párování M v grafu G je maximální, když pro každé jiné párování M' v G platí $\#M \geq \#M'$.

def. Nechť M je párování grafu G. Vrchol $v \in V$ nazveme M-saturovaný, když $\exists e \in M$ $v \in e$. Když každý vrchol $v \in V$ je M saturován, pak M nazveme perfektní. Cestu $v_0 v_1 v_2 \dots v_k$ v grafu G nazveme M-střídající, když $\forall i = 1, \dots, k-1$ platí $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$. M-střídající cestu $v_0 \dots v_k$ nazveme M-zlepšující cesta, když v_0 a v_k nejsou M saturovány.

př.:  je párování, víc nepřidám, není maximální

 je max

 M zlepšující → udělám naopak a..

 ... mám o 1 větší párování

věta: Nechť M je párování v grafu G. Když v G existuje M-zlepšující cesta ($\Leftrightarrow$ pak) M není maximální. Navíc $\Leftrightarrow$.

dk: Když neexistuje M zlepš. cesta, pak je M maximální

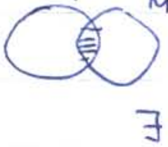
sporem: nechť neexistuje M-zlepš. cesta a M není max

$\Rightarrow \exists M'$ že $\#M' > \#M$

$H = (V, (M' - M) \cup (M - M'))$ .... symetrická diference množiny

stupně v $H \leq 2$ $\Rightarrow$ izolované body, cesty, kružnice 

navíc víme: kružnice - sudé délky



cesty - sudé i liché, ale střídají se hrany $\in$ a $\notin$ M

$\exists$ cesta liché délky $\in M'\ \in M\ \in M' \dots\dots \in M'$

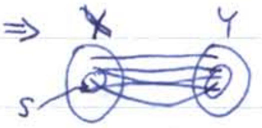
G s párováním M

úvaha → G obsahuje M zlepš. cestu

// věta (1957 Berge)

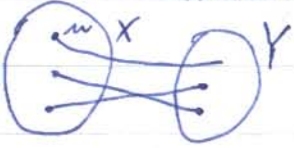
věta (1935 Hall): nechť $G=(X\cup Y, E)$ je bipartitní graf.
Pak G obsahuje párování saturující celé X $\Leftrightarrow$
$\forall S\subset X \ \#S \le \#N(S)$, kde $N(S)=\{y\in Y \mid \exists x\in S, \{x,y\}\in E\}$.

dk: $\Rightarrow$



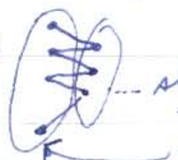
// $\forall$ vrcholy z X jsou spárované
sousedů je alespoň tolik, kolik je vrcholů v S

$\Leftarrow$ sporem $\#S \le \#N(S)$ a ~~nechť~~ neex párování saturující celé X
vezmeme si maximální párování M - ani to nesaturuje celé X
$\Rightarrow \exists u \in X$ že u není M saturováno



$S = \{v\in X \mid$ z u vede do x M střídající cesta$\}$
$T = \{v\in Y \mid$ z u do v vede M střídající cesta$\}$
$S \overset{?}{\neq} \emptyset$ ... obsahuje u; $T \overset{?}{\neq} \emptyset$ ... $\#\{u\} \le \#N(u)$ .... z u někam vede hrana
$N(u) \subset T$

ukážeme, že $N(S) = T$ a $\#S = 1 + \#T$ // má o 1 prvek víc než jeho sousedi
nejdelší střídající cesta → začíná v u,



... skončí-li zde, je maximální → to není, neex. lepší cesta ⇒ končím v

$T \subset N(S)$

platí i $T \supset N(S)$ tj

12. 4. 2005

$O^X \ O^Y$ $\exists$ párování saturující celé X $\Leftrightarrow \forall S\subset X \ \#S \le \#N(S)$

důsledek: V bipartitním grafu $G=(X\cup Y, E)$ existuje perfektní párování $\Leftrightarrow \#X=\#Y$ /* každý s každým je v páru */ a celé X je saturované /* věta výše */.

důsledek (sňatkový problém): Když G je regulární bipartitní graf se stupni $r \geq 1$. Pak v tomto grafu existuje perfektní párování.

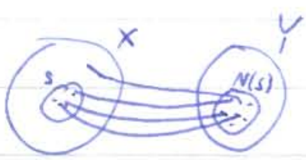
// regulární graf = všechny stupně stejné

každý zná $\overbrace{\text{všechny možné}}^{r}$ protějšky, můžou se všichni ⚭

dk: $\forall S \subset X \ \#S \leq \#N(S)$ // to ukážeme

lib. $S \subset X$; E_1 = hrany, které mají jeden konec v S

E_1 = všechny hrany s jedním koncem v $N(S)$ // mn. sousedů



jistě $E_1 \subseteq E_2$ // ale naopak ne

$r \cdot \#S = \underbrace{\#E_1 \leq \#E_2}_{} = r \cdot \#N(S) \Rightarrow \#S \leq \#N(S) \ \forall S \subset X \ \forall S \subset Y$

// platí $\forall S \subset X \ \forall S \subset Y$ symetricky $\Rightarrow X$ a Y stejně velké

// $r\#X = r\#Y$

pozn.: Sňatkový problém funguje i pro bipartitní graf s násobnými hranami. // dřív nyní ... vyjadřuje, že ♂ zná ♀ 3x lépe :)

// v obecných grafech ↓

věta: Graf $G=(V,E)$ má perfektní párování $\Leftrightarrow \forall S \subset V \ (\sigma(G-S) \leq \#S)$

// $\sigma(G-S)$ je počet komponent s lichým počtem vrcholů v grafu, který

// vznikne z G utržením podmnožiny vrcholů S.

dk: $\Rightarrow$: G má perf. pár.; utrhnu mn. S:

→ z každé „liché" musí jít alespoň 1 do S

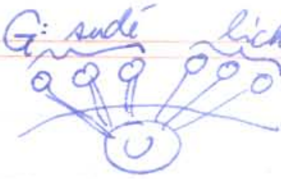
$\Leftarrow$: sporem: nechť $\forall S \subset V (\sigma(G-S) \leq \#S)$ a G nemá perf. pár.

$S = \emptyset \Rightarrow \sigma(G) = 0 \Rightarrow$ počet vrcholů v G je sudý; najdeme maximální nadgraf G^* grafu G na stejné mn. vrcholů (ve smyslu max. počtu hran) a G^* nemá perf. pár

$\Rightarrow G^*$ není úplný graf

def. $U := \{v \in V : d_{G^*}(v) = n-1\}$; $n = \#V$

$\sigma(G^*-U) \le \underbrace{\sigma(G-U)}_{\le \# U}$ /* proč to tak je */ :



G^*: počet lichých nevzroste sléváním komponent

ukážeme, že ~~G^*~~ všechny komponenty G^*-U jsou úplné grafy

spáruji v sudé:
liché: — přebývá, spáruji s něčím v U; je tam toho dost

⇒ tj. mám spárováno: ∀ sudé, ∀ liché, částečně uvnitř U

v U je sudý počet → spáruju po dvojicích liché

// → jakmile tohle dokážu, mám spor (?)

/* dk */: sporem: nechť ∃ komponenta G^*-U, která není úplná

najdu vrcholy v této komponentě, které mají vzdálenost 2

z w x y kde $\{x,y\} \notin G^*$; $w \notin U \Rightarrow d_{G^*}(w) < n-1$ // w je s něčím — ne z nespojeno

· ke G^* přidám hranu $\{x,y\}$ ⇒ pak má perf. párování M_1, které ji využívá, tj. $\{x,y\} \in M_1$

· ke G^* přidám-li $\{w,z\}$ ⇒ má perf. pár. M_2; $\{w,z\} \in M_2$

vytvořím graf $(V, M_1 \triangle M_2)$ /$\triangle$ symetrická diference: $(M_1-M_2)\cup(M_2-M_1)$

stupně v ↑ ? 0, nebo 2; nikdy ne 1

// buď M_1 M_2 nebo M_1 M_2

jsou to izolované vrcholy + několik disjunktních kružnic sudé délky

// $M_1 \triangle M_2 \ni \{x,y\}, \{w,z\}$ (?)

a) nechť $\{x,y\}$ a $\{z,w\}$ leží v různých kružnicích C_1 a C_2 // hrany z M_1: ~~~ ; M_2: - - -

// to bylo v původním grafu

$M = (\underbrace{M_1 - C_2}_{\text{už z } G^*}) \cup (\underbrace{M_2 \cap C_2}_{\text{už z } G^*})$ ... toto už je párování

/umělá hrana jen w----z

→ našel jsem párování → spor

b) leží ve stejné kružnici

// to bylo v původním

/* mám části C_1 a C_2 */

$M = (M_1 - \text{celá kružnice}) \cup (C_1 \cap M_1) \cup (C_2 \cap M_2) + \{w,y\}$

je to perf. párování → spor

SPOR /*dk*/ → SPOR věty → □

důsledek: nechť $T=(V,E)$ je strom. Pak T má perf. párování $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall v \in V \ \sigma(T-\{v\}) = 1$.

dk: $\Rightarrow$: /*strom je graf*/, $S=\{v\}$; $\sigma(T-\{v\}) \leq \#\{v\} = 1$ // minulá věta
$\sigma(T-\{v\}) = 0 \Rightarrow T$ má lichý počet vrcholů $\Rightarrow$ nemá perf. párování $\Rightarrow$ spor

$\Leftarrow$: indukcí na počet vrcholů a platí $\forall v \in V \ \sigma(T-\{v\}) = 1$

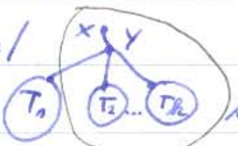
ve stromě najdu vrchol x stupně 1 

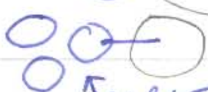
mrknu na graf $T-\{y\}$: 

$T_1, \dots, T_k$ mají sudý počet vrcholů

$\forall i \in \hat{k}$ T_i splňuje podmínku $\sigma(T_i - \{u\}) = 1 \ \forall u$ ze stromu T_i

/* tj párování:  ... to chci
*/

/* proč by to mělo splňovat pro T_1 */  sudý počet vrcholů

uberu z T_1 1 vrchol:  je právě jedna, ten lichý je připojen na sudý ○ lichá

....(?) platí to // "je to jasný, nebudu to dále okecávat"

pozn.: Počet perf. párování v bipart. grafu.

 $\#X = \#Y = n$

perf. pár. .... zobrazení, bijekce, z X na Y

$$G = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \Theta & B \\ \hline B^T & \Theta \end{array}\right) & \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \\ \begin{array}{cc} X & Y \end{array} & \end{array}$$

matice bipart. grafu // Θ .. nulová

počet bipart. pár. v G = $\mathrm{per}\,B = \sum_{\pi \in S_n} b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \dots b_{n\pi(n)}$; $(B)_{ij} = b_{ij}$

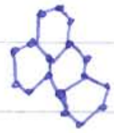
/* když $\{i, \pi(i)\}$ není hrana v G .... $\Sigma = 0$
všechny hrany jsou, $\prod b_{i\pi(i)} = 1$, funguje to
*/ připomíná determinant $\det B = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi)\, b_{1\pi(1)} \dots b_{n\pi(n)}$

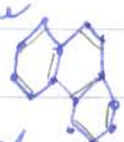
nazývá se permanent $\neq$ antilineární forma sloupců

// $\det B$ ... n^3 kroků ... převedu na $\triangledown$, vynásobím diagonálu

// $\mathrm{per}\,B$ ... NP úplný

př 

může existovat  ? ano, máli graf bipart. párování

 13 vrcholů → není (lichý → ne)  sudý, ano

stabilita slouč... souvisí s počtem párování //zakreslím vazby, najdu jiné párování

Hranová barevnost

def: Nechť $G=(V,E)$ graf, $k \in \mathbb{N}$, zobrazení $\varphi: E \to \{1,2,\dots,k\}$ nazýváme k-hranové obarvení. HO je vlastní, když $\forall e,f \in E,\ e \neq f\ (e \cap f \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(f))$.
Hranová barevnost grafu G je minimální k takové, že G má k-hranové vlastní obarvení, značíme $\chi'(G)$.

// $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$: $\varphi(e)=\varphi(f) \Rightarrow e \cap f = \emptyset$

pro $M_i = \{e : \varphi(e) = i\}$ (při vl. obarvení) je párování
$\varphi^{-1}(i)$ // min. počet disj. párování, které pokryjí celé $E = \chi'(G)$

/* čeho může nabývat */

pozn.: $\chi'(G) \geq \Delta$

př:  $\Delta=3$ ... musím mít alespoň $k=4$

př: rozvrh   kruh   učitel

 nechť je "dobrý rozvrh",

pro každou "hodinu" (den, čas) obarvím novou barvou
hledám tak obarvení grafu

"u nás" < 30 hodin > učitelů ještě míň

věta: G je bipartitní graf, pak $\chi'(G) = \Delta$

$\chi'(G) \geq \Delta$

VĚTA: G bipartitní graf $\chi'(G) = \Delta$.

DK: 1) nechť G je r-regulární, $r = \Delta$.

$r=0 \rightarrow$ 0 hran $\rightarrow$ 0 barev, není co barvit

$r \geq 1$ (snátkový problém) – existuje perfektní párování

perfektní párování

G - M

hrany perf. párování

bipartitní graf, kt. je r-1 regulární

buď $r-1=0$

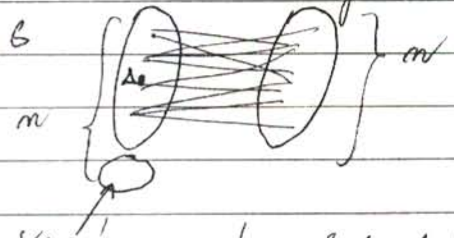
$r-1 =$ aspoň 1 $\rightarrow$ věta, že v grafu ex. perf. párování, obarvím barvou č. 2, atd...

2) G není Δ-regulární

najdu nadgraf G na ~~stejné~~ množině vrcholů, který je Δ-regulární, bipartitní

obarvím podle bodu 1 Δ barvama

přidané hrany vyhodím a původní graf mám obarvený.



přidám nové vrcholy tak, aby na obou stranách bip. grafu byl stejný počet vrcholů

ex. stupeň $< \Delta$ v X a Y $\rightarrow$ vezmu a spojím je hranou

$m \cdot \Delta$ hran z leva do prava

vpravo $< m \cdot \Delta$ hran – nelze

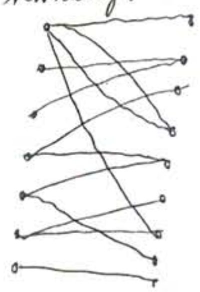
každý vrchol je stupně Δ

max stupeň 2.

přidání hrany (dostávám násobné hrany)

lze používat věta sňatkový problém platí

učitelé:
kroužky:



potřebuji
$\chi'(G) = \Delta$

$m = \#E$

l = počet posluchárem

nelze v míň odučit než $\lceil \frac{m}{l} \rceil$

počet vyučovacích bloků $\geq \max \{ \lceil \frac{m}{l} \rceil, \Delta \}$

ukážeme $=$

Lemma: M a M' jsou dvě disjunktní párování v grafu G taková, že $\#M > \#M'$. Pak existují disjunktní párování N a N' taková, že $\#N = \#M - 1$, $\#N' = \#M' + 1$ a $M \cup M' = N \cup N'$.

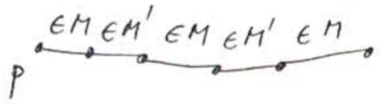
sym. diference

Dk: $G = (V, E)$ $\quad H = (V, M \triangle M')$
$= M \cup M'$

$0 \leq d(v) \leq 2$

H je sjednocení izolovaných vrcholů cest a kružnic, na kterých se střídají hrany z párování M a M'

$\#M > \#M' \Rightarrow$ ex. cesta liché délky P, kt. končí a začíná hranou z M.



$N := (M - P) \cup (P \cap M')$
$N' := (M' - P) \cup (P \cap M)$

rozvrh:

najdu $p := \max \{ \lceil \frac{m}{l} \rceil, \Delta \}$ párování, disjunktních takových, že $M_1 \cup \dots \cup M_p = E$

$\forall i = 1, \dots, p \quad \#M_i \leq l$

počet předmětů

GRAF 37

$M_1, \dots, M_\Delta$ vezmu
 tolik stačí, abych disj. pokryla (plyne z →
→ $\chi'(G) = \Delta$)

$\underbrace{M_1, \dots, M_\Delta, \emptyset, \dots, \emptyset}_{p \text{ párování}}$

∃ dvojice párování, kt. se liší aspoň o 2, použiju lemma, opakuju

až mám p párování, kde se dvojice liší jen o 1 hranu.

dostanu $N_1, \dots, N_p$

$$\# N_i - \# N_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \# N_i \leq \left\lceil \frac{m}{p} \right\rceil$$

platí? $\left\lceil \frac{m}{p} \right\rceil \leq l$

$$\left\lceil \frac{m}{p} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{m}{\lceil \frac{m}{l} \rceil} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{m}{\frac{m}{l}} \right\rceil = \lceil l \rceil = l$$

Věta: (Vizing 1961)
$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1.$

Dk:

Lemma: nechť G je souvislý graf, kt. není lichou kružnicí. Pak existuje 2-obarvení hran grafu G takové, že u každého vrcholu st ≥ 2 se vyskytují hrany obou barev.

- není vlastní

Dk: (lemma)

1) nechť všechny stupně G jsou sudé → ∀ st. = 2 kružnice
→ ∃ vrchol st. ≥ 4 je eulerovský

najdu eulerovskou cyklus
hrany na střídačku obarvím
začnu v st. 4 tímhle procházky
se tam alespoň 1 zastavím než dojdu na konec

2) nechť v G existují vrcholy lichého stupně.

$\sum_{v\in V} d(v) = 2\#E.$ ⇒ počet vrcholů s lichým stupněm je sudý

přidám a napojím na ∀ vrcholy s lichým stupněm

Graf má všechny stupně sudé, máme euler. graf → ∃ euler. cyklus → startuje a končím v x a hrany barvím střídavě barvou 1 a 2.
ubere umělé přidaný vrchol a hrany.
st sudý OK
st lichý – 1 nezajímá mě
– tzn. aspoň 3 → v obou barvách zůstane aspoň 1 hrana

Def: nechť $G=(V,E)$ je graf. k-hranové obarvení $\varphi: E \to \{1,2,\dots,k\}$ grafu G nazveme optimální, když pro každé jiné k-hranové obarvení $\varphi': E \to \{1,\dots,k\}$ platí, že
$\sum_{v\in V} c(v) \geq \sum_{v\in V} c'(v)$, kde $c(v)$ resp. $c'(v)$ je počet barev, které se vyskytují u vrcholu v při obarvení φ resp. φ'.

$c(v) \leq k$
$\leq d(v)$

Lemma: nechť φ je optimální obarvení grafu $G=(V,E)$ takové, že existuje vrchol u a barvy i a j takové, že barva i se na hraně u vrcholu u nevyskytuje a hrana j se vyskytuje alespoň 2x na hranách u vrcholu u. Pak komponenta grafu $(V, E_i \cup E_j)$, která obsahuje vrchol u je lichá kružnice (kde E_i a E_j jsou hrany v barvě i resp. v barvě j).

Dk: (lemma)

sporem: kdyby komponenta s u nebyla lichá kružnice, použiju předchozí lemma

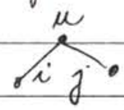
přebarvím barvami i a j tak, že každý vrchol má i i j barvu.

$\tilde{\varphi}$

u žádného vrcholu nesnížím počet barev, kt. jsem použila, u vrcholu u zvýším

v komp. $E_i \cup E_j$ st ≥ 2

bude



~~spor~~ spor s optimalitou obarvení φ.

Dk: (věty) $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$

každé vlastní obarvení už je optimální $c(v) = d(v)$, $\sum c(v) \leq \sum d(v)$

sporem:

$\varphi: E \to \{1, \dots, \Delta+1\}$

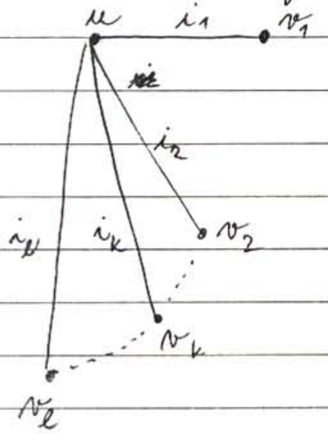
vezmu optimální φ předpokl., že není vlastní.

tzn. $\exists$ vrchol u, že počet barev na u < st vrcholu

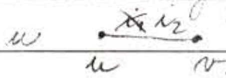
$c(u) < d(u)$.

barva, kt. schází na u označím i_0

barva, kt. se vyskytuje na u alespoň 2x označím i_1.



i_2 schází na v_1, ale vyskytuje se na u. kdyby se nevyskytovala na u



, i_1 přebarvím na i_2

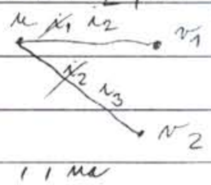
$c(u)$ nezmenším, zvedu o 1

počet barev na v_1 nezměním

spor, že pův. obarvení bylo optim.

i_3 schází na v_2, ale je na u

kdyby ne:



spor s optim. φ

i_{k+1} schází na v_k, vyskytuje se na u

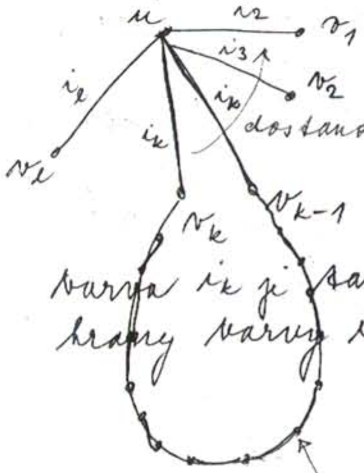
i_{l+1} schází na v_l je už rovna nějaké barvě i_k

nastavím se

definuji $\tilde{\varphi}$ optim.

$\tilde{\varphi}(\{u, v_j\}) = i_{j+1}$ pro $j = 1, \dots, k-1$

$\tilde{\varphi} = \varphi$ na ostatních hranách

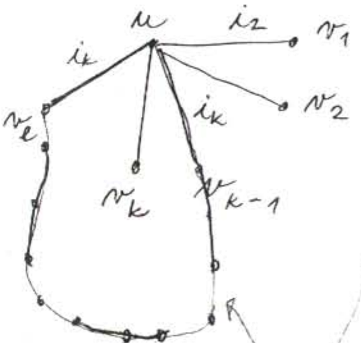


dostanou barvu svých sousedů

optim. obarvení.

barva i_k je tam 2x a barva i_0 (schází u vrcholu u)
hrany barvy i_k a i_0 tvoří lichou kružnici

$\tilde{\tilde{\varphi}}$ $\quad \tilde{\tilde{\varphi}}(\{u, v_j\}) = i_{j+1}$ pro $j = 1, \dots, l$
$\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi$ na ostatních hranách $\qquad$ opět optim.



i_k 2x
i_0 schází
i_0, i_k opět lichá kružnice

z v_{k-1} vede do i_k – lichá nemá odbočku (všechny st. 2) (v barvách i_0, i_k)
ale z v_{k-1} musí vést i do v_l ... spor

QED.

Nezávislé množiny a kliky

Def: nechť $G = (V, E)$ je graf. Podmnožina $S \subset V$ se nazývá klika, když všechny dvojice ($\binom{S}{2} \subset E$) jsou hranami.

Podmnožina $S \subset V$ se nazývá nezávislá množina, když množina dvojic není v hraně.
$$\binom{S}{2} \cap E = \emptyset.$$

Číslo $\omega(G)$ značím maximální mohutnost kliky v G

$\alpha(G)$ je max. mohutnost nezávislé množiny v G.

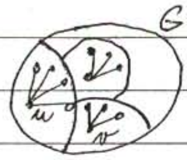
Pozn. $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$
$\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Př: G bip.
$\omega(G) \leq 2$
$\alpha(G) \geq \frac{n}{2}$ (větší z knedlíků)
$n = \# V$

obrácené to neplatí

Pozn.: $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta+1}$, $n = \# V$.
↳ vždycky najdu aspoň takhle velkou

Dk: (pozn.) G



Tvořím S, vyberu lib. vrchol u
u má max Δ kamarádů
vyhodím u i jeho kamar. (max $\Delta+1$ vrch.)
znovu ve zbytku lib. vrch. v,
kamarádi, v + kam. vyhodím
max $\Delta+1$ vrcholů
u a v nebyly spolu v hraně
⋮

za každé ukrojení
1 vrchol do S.

Dú: $\alpha(G) \stackrel{?}{=} \frac{n}{\Delta+1}$ ... pro kt. grafy

26.4.2005

věta (Turán) $\alpha(G) \geq \frac{n}{\rho+1}$ kde ρ = průměrný stupeň grafu $= \frac{1}{n}\sum_{v \in V} d(v)$, $n = \# V$

věta: $\alpha(G) \geq \frac{n}{2\rho}$; $\rho \geq 1$

dk: $p \in \langle 0,1 \rangle$, konstruujeme S $v \in V$ pravd$(v \in S) = p$ hodím si mincí a ta tam padne či ne
X n.v. = počet vrcholů v S
sledujeme podgraf indukovaný na S
Y n.v. = počet hran mezi vrcholy z S
$\forall v \in V$, $X_v = \begin{cases} 0 & v \notin S \\ 1 & v \in S \end{cases}$ $\quad \forall e \in E$ $Y_e = \begin{cases} 0 & e \text{ neleží v } S \\ 1 & e \text{ leží v } S \end{cases}$

$X = \sum_{v \in V} X_v \qquad Y = \sum_{e \in E} Y_e$

spočtu $E(X-Y) = EX - EY = \sum_{v \in V} E(X_v) - \sum_{e \in E} E(Y_e) = (*)$

$E(X_v) = 0 \cdot prob(X_v = 0) + 1 \cdot \underbrace{prob(X_v = 1)}_{p}$ // prob = pravd.

$E(Y_e) = 0 \cdot prob$ (alespoň jeden konec hrany e není v S)
$+ 1 \cdot prob$ (dva konce hrany e jsou v S) $= p^2$

$(*) = np - p^2 \underbrace{\# E}_{\frac{n\rho}{2}} = (\#)$ /* $\sum_{v \in V} d(v) = 2\#E$ */

$(\#) = np - \frac{p^2}{2} n\rho = $ /* položím $p = \frac{1}{\rho}$ */ $= \frac{n}{2\rho}$

$\exists S \subset V$ takové, že počet vrcholů v S - počet hran v $S \geq \frac{n}{2\rho}$
za každou hranu hranu z S vyhodím jeden konec hrany
co mi zbyde $\to \tilde{S}$... má alespoň $\frac{n}{2\rho}$ vrcholů
... nemá žádnou hranu
S je nezávislá množina v G
$\alpha(G) \geq \#S \geq \frac{n}{2\rho}$ $\rho \geq 1$

věta: $\omega(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d(v)}$
dk: $G = (V, E)$ π... permutace vrcholů $V = \{1, \dots, n\}$
přiřadím $C_\pi \subset V$: 1) $\pi(1) \in C_\pi$
2) $\pi(j) \in C_\pi \Leftrightarrow$
$\pi(j)$ je v hraně se všemi
vrcholy $\pi(i)$ $i = 1, \dots, j$

X... počet vrcholů v C_π; každá permutace π má stejnou pravd. $\frac{1}{n!}$
→ náhodně vyberu π a zkonstruuji C_π
pozorování: C_π je klika; $X = \sum_{v \in V} X_v$ kde $X_v = \begin{cases} 1 & v \in C_\pi \\ 0 & v \notin C_\pi \end{cases}$
$E(X) = \sum_{v \in V} E(X_v)$

$\{1, 2, \overset{v}{\dots}, n\} \xrightarrow{\pi} \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(j), \dots, \pi(n)$

$n - 1 - d(v) + 1$ .... koukám na uspořádání $n - d(v)$ vrcholů
pravd., že v je před nesousedy je $\frac{1}{n - d(v)}$

$E(X) = \sum_{v \in V} E(X_v) = \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d(v)}$ = průměrná hodnota počtu vrcholů v C_π
$E(X_v) = 0 \cdot prob(v \notin C_\pi) + 1 \cdot \underbrace{prob(v \in C_\pi)}_{\frac{1}{n - d(v)}}$

tj. $\exists \pi$, že C_π má alespoň $\sum_{v \in V} \frac{1}{n - d(v)}$ vrcholů (nemusí být max)
ale je to klika

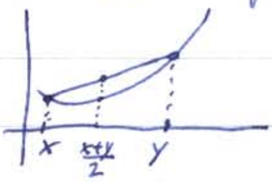
- $\alpha(G) = \omega(\overline{G}) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_{\overline{G}}(v)}$ $\quad d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n-1$

$\quad d_G(v) + 1 = n - d_{\overline{G}}(v)$

důsledek: $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d(v)}$

věta (Turán) $\alpha(G) \geq \frac{n}{\rho + 1}$

dk: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ je na $\langle 0, +\infty \rangle$ konvexní



$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$

tj. $f\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$

- $x_i = d_i \in \langle 0, +\infty)$

$\frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i}_{=\rho}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+d_i} \leq \frac{1}{n} \alpha(G)$ ... převedu $\frac{1}{n}$ a QED(Turán)

věta: Existuje taková posl. $(k_n)_{n=1}^{\infty}$, $k_n \in \mathbb{N}$, že prob(☺) $\xrightarrow{n \to \infty} 1$.

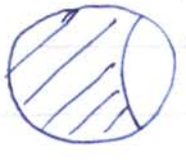
☺ = "náhodně vybraný graf G_n mezi všemi grafy na n vrcholech má $\omega(G_n) = k_n$ nebo $k_n + 1$"

jiná formulace: $\frac{\#\text{grafů na } n \text{ vrcholech, které mají } \omega = k_n \text{ nebo } k_n+1}{\#\text{grafů na } n \text{ vrcholech}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

// pro vybraný graf bude skoro jistě mít klika...

- // $k_n \sim 2 \log_2 n$

/*



$G \to \overline{G}$ prosté a na
$\alpha(G_n) = k_n$ nebo $k_n + 1$ } pro všechny grafy (?)

*/

Ramseyovská čísla

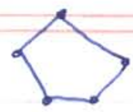
př.: 6 lidí; trojice, buď se všichni znají nebo neznají; tj.

G má 6 vrcholů, $\omega(G) \geq 3$ nebo $\alpha(G) \geq 3$

- dk: a) buď v G ex. vrchol $d(v) \geq 3$ | b) všechny vrcholy v G $d(v) \leq 2$

v ... neznají se → nezávislé; 1 pár se zná → tak △ klika

v ... s kým se nezná; varianty: znají se; klika

∃G na 5 vrcholech $\omega(G) < 3$ a $\alpha(G) < 3$:  .... 6 je minimum aby to platilo

věta (1930 Ramsey) $\forall k, l \in \mathbb{N}\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall$ graf G na n vrcholech platí
($\omega(G) \geq k$ nebo $\alpha(G) \geq l$).

Takové minimální n_0 s vlastností ↑ se značí $r(k,l)$

posn: $r(3,3) = 6$

$r(1,l) = 1$; $r(k,1) = 1$

$r(2,l) = l$; $r(k,2) = k$

$r(k,l) = r(l,k)$ .... symetrické → buď klika či nez. mn.

dk: indukcí na k+l

předp., že platí pro dvojici (k-1, l) a (k, l-1)

tj. mám $r(k-1,l)$ a $r(k,l-1)$; položím $n = r(k-1,l) + r(k,l-1)$

G... lib. graf na n vrcholech "daný nepřítelem"

ukážeme, že $\omega(G) \geq k$ nebo $\alpha(G) \geq l$

a) ∃ vrchol v, že $d(v) \geq r(k-1,l)$ tak

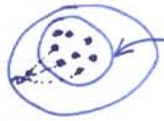
kamarádi sousedi, je jich $r(k-1,l)$

graf sousedů buď
- obsahuje nezáv. velikosti l ... tak G obsahuje nezáv. vel. l
- obsahuje kliku vel. k-1 → připojím v, v G mi dá kliku o vel. k

b) ∀ vrchol v ; $d(v) \leq r(k-1,l) - 1$

v je nespojený s $\underbrace{n-1-d(v)}$ sousedy $\Big|_{n = r() + r()}$
$\geq r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1 - r(k-1,l) + 1 =$
$= r(k,l-1)$

/* s alespoň */



nesousedi

důsledek důkazu: $r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1)$

posn.:

k \ l	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1 ....
2	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
3	1	3	6	9	14	18	23	
4	1	4	9	17	25	?	?	
5	1	5	14	25	?	?		
	⋮	⋮	2018					

1955

1993

? ... nezná se

... nebirco se zná

$42 \leq r(5,5) \leq 50$

hrubá síla $42 \leq n \leq 50$

projdi všechny grafy na n =

kolik jich je

$2^{\binom{n}{2}}$ $2^{\binom{43}{2}}$, 2^{4321} ... náročné věta: $r(k,l) \le \binom{k+l-2}{k-1}$ $\forall k,l \in N$

dk: $r(k,l) \le$ /* IP */ $\binom{k-1+l-2}{k-2} + \binom{k+l-1-2}{k-1} =$ /* dva násl. ze stejného /* řádku pascal △

$= \binom{k+l-2}{k-1}$

důsledek: $r(k,k) \le \binom{2k-2}{k-1}$ ... jak je to velký? $\sim \frac{c}{\sqrt{k}} 2^{2k}$

$$\binom{2t}{t} = \frac{(2t)!}{(t!)^2} \overset{\text{stirling}}{=} \frac{(2t)^{2t} e^{-2t}\sqrt{2\pi 2t}}{t^{2t}e^{-2t}(\sqrt{2\pi t})^2} \simeq 2^{2t}\cdot\frac{c}{\sqrt{t}}$$

// horní mez

věta (1947 Erdős) $\exists d>0$ že $r(k,k) \ge d.k.(\sqrt{2})^k$ // dolní mez

dk: dané k; vezmu n; vytvořím náhodně graf na n vrcholech

→ každá hrana s $p = \frac{1}{2}$ tam patří (nezávisle na jiných)

(#) jaká je pravd., že náhodný graf má kliku či nezávislou velikosti k

když $p<1$ pro n; pak doplňkový jev ☺ $p>0$

☺: "nemá kliku ani nezávislou velikosti k"

$\Rightarrow \exists$ graf na n vrcholech, který nemá ani kliku ani nezávislou velikosti k, tj. $n < r(k,k)$ // n nemá vl. r_0

prob(G obsahuje kliku na $i_1,\dots,i_k$) $= \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}}$

prob(G obsahuje kliku na lib. k vrcholech) $\le \sum_{\text{všechny } k\text{-tice vrcholů}}$ prob(G obsahuje kliku na k-tici $i_1,\dots,i_k$) $\le$

.... počet k-tic vrcholů .... pravd.

$\le \binom{n}{k}\frac{1}{2^{\binom{k}{2}}}$

(#) $< 2\binom{n}{k} < 1$

28.4.2005

$r(k,k) \ge d.k.2^{\frac{k}{2}}$

když mám n že $2\binom{n}{k}\frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} < 1 \Rightarrow r(k,k) \ge n$

---

lemma: $\binom{n}{k} < \left(\frac{ne}{k}\right)^k$
nyní

dk: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} < \left(\frac{ne}{k}\right)^k$

$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n \;/\cdot \frac{1}{x^k}$

$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \frac{1}{x^{k-i}} \le \frac{(1+x)^n}{x^k}$ $\quad x \in (0,1)$

$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \le$ $\quad x := \frac{k}{n}$ ↓

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} \le \frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\left(\frac{k}{n}\right)^k} \le \frac{\left(e^{\frac{k}{n}}\right)^n}{\left(\frac{k}{n}\right)^k}$$

1\. roč: $1+x < e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

$$2\binom{n}{k}\frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} < 2\left(\frac{ne}{k}\right)^k \frac{1}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < 1$$ to mi dá volbu n v závisl. na k

$$\sqrt[k]{2}\,\frac{ne}{k}\,\frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}} < 1 \Rightarrow n < \frac{1}{e\sqrt[k]{2}\,2^{1/2}}\, k\, 2^{k/2}$$

$$n \cong \frac{1}{e\,2.2^{1/2}}\, k\, 2^{\frac{k}{2}} < \frac{1}{e\sqrt[k]{2}\,2^{1/2}}\, k\, 2^{\frac{k}{2}}$$

vezmu jako d

Extremální teorie grafů

věta (Turán 1943): Když G je graf na n vrcholech, který neobsahuje kliku velikosti $p \in \mathbb{N}$, pak $\#E \le \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)$.

pozn. $p=3$ // nechci, aby graf obsahoval $\triangle$ $\quad \#E \le \frac{n^2}{4}$

pro každý $\#E \le \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

každý s každým

dk: jak konstruovat grafy s max klikou menší než p, tj. $\omega(G) < p$

$n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} = n$

... hrany jen naštorc, ne uvnitř

→ neobsahuje kliku vel. p

? jak rozdistribuuji vrcholy do knedlíků

hledám $\max \sum_{1 \le i < j \le p-1} n_i n_j$ za podmínky $n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} = n$

$\Updownarrow$

min v doplňku; tj. hledám doplněk s min počtem hran

kolik je hran v doplňku? /v knedlíku/ $\underbrace{\min \sum_{i=1}^{p-1}\binom{n_i}{2}}_{\text{za podm } n_1+n_2+\dots+n_{p-1}=n}$

když $x,y \in \mathbb{N}$: $x > y+1$ pak $\binom{x}{2} + \binom{y}{2} \overset{?}{>} \binom{x-1}{2} + \binom{y+1}{2}$

$$x(x-1) + y(y-1) \overset{?}{>} (x-1)(x-2) + (y+1)y$$

$x \overset{?}{>} y+1$ ... ano, je to předpoklad minima se nabývá tak, že v knedlíkách bude stejně (± 1)

dk Turána: $\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-d_i}$

Schwarzova nerovnost: $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ pak $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$

pro std skalár. součin

volím $x_i = \sqrt{n-d_i}$ a $y_i = \frac{1}{\sqrt{n-d_i}}$; pak: $n^2 \leq \left(\sum n-d_i\right)\left(\sum \frac{1}{n-d_i}\right)$

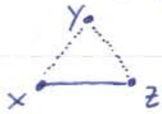
protože $\omega(G) \leq (p-1)$ $\quad (n^2 - 2\#E)$ $\quad (p-1)$

tj $n^2 \leq (n^2 - 2\#E)(p-1) \Rightarrow \frac{n^2}{p-1} \leq n^2 - 2\#E \Rightarrow \underline{2\#E} \leq n^2 - \frac{n^2}{p-1} = \underline{n^2\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)}$

lemma: Nechť G je graf s maximálním počtem hran (G na n vrch.), který neobsahuje kliku velikosti p. Pak

$\forall x, y, z \in V$: x, y, z různé, platí $\{x,y\} \notin E$ a $\{y,z\} \notin E \Rightarrow \{x,z\} \notin E$.

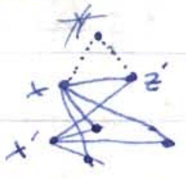
dk sporem: $\{x,y\}, \{y,z\} \notin E$ ale $\{x,z\} \in E$



2 případy • A) $d(y) < d(x)$ nebo $d(y) < d(z)$

• nechť nastalo $d(y) < d(x)$; přidám x': x' je v hraně se vším, s čím x, y vyhodím

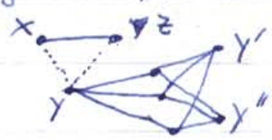
kopie



→ vyřešeno ?

• B) $d(y) \geq d(x)$ a $d(y) \geq d(z)$

x, z oba vyhodíme, udělám 2 kopie y: y', y'' se stejnými sousedy



hrany: kolik jsem vyhodil $d(x) + d(z) - 1$ ($\{x,z\}$)
přidal $2d(y)$

pozorování počet hran se tedy zvedl, opět neobsahuje kliku o vel. p ∎

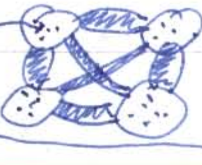
~~Důsledek~~: lemma + $\{x,x\} \notin E$; $\{y,y\} \notin E \Rightarrow \{y,x\} \notin E$

.... tj. nebýt v hraně je ekvivalence

třídy → knedlíky → nejsou v hraně vrcholy uvnitř, ale naopak všechny hrany jsou mezi knedlíkama

mezi 2 částmi $\left(\frac{n}{p-1}\right)^2$
kolik je částí $\binom{p-1}{2}$

$\frac{n}{p-1}$ vrcholů



celkem n vrcholů; $p-1$ knedlíků
~~[illegible]~~
hran je celkově $\binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \dots = \frac{n^2}{2}\left(\frac{p-2}{p-1}\right)$

věta: $K_{r,r}$ je úplný bipartitní graf na $r+r$ vrcholech.

Nechť G je graf na n vrcholech, který neobsahuje $K_{r,r}$ jako svůj podgraf. Pak $\exists C = C(r)$; $\#E \le C . n^{2-\frac{1}{r}}$

// pozn.: 1. věta $\#E \le O(n^2)$; teď $\rightsquigarrow$ nižší řád; pro velký n řídký graf

$: \{1,..,r\}$ $\binom{V}{r}$

$\vdots$

$: \{n-r+1, n-r+2, \dots, n\}$

a řeknu, že v spojím s $\{i_1,\dots,i_r\} \in \binom{V}{r}$, když v G $i_1,\dots,i_r$ jsou sousedi v, tedy jsou v hraně s v

stupeň v ve V:

kolik je r prvkových podmnožin z $N(v)$? $\binom{d(v)}{r}$ ...

pak počet hran zleva doprava $= \sum_{v\in V}\binom{d(v)}{r}$

naopak, s kolika je spojena r prvková podmnožina? $\Rightarrow_{\le r-1}$

// kdybych měl r .... v původním by bylo bipart. na $r+r$

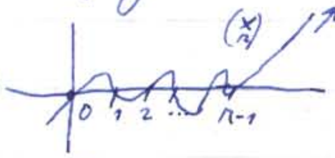
$\rightarrow$ počet hran zprava doleva $\le (r-1)\binom{n}{r}$ // $\binom{n}{r}$ kolik je r prvkových podm.

$$\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{r} \le (r-1)\binom{n}{r}$$

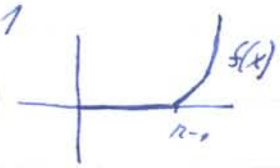
f konvexní: $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

f si def: $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)\dots(x-r+1)}{r!} & \text{pro } x \ge r-1 \quad \binom{x}{r} \\ 0 & x < r-1 \end{cases}$

polynom má kořeny



, vezmu tedy



pak $\binom{d(v)}{r} \rightarrow f(d(v))$: tedy $\sum_{v\in V} f(d(v)) \ge n f\left(\frac{1}{n}\sum_{v\in V} d(v)\right)$ tj. pak

$$(*) = n f\left(\frac{2}{n}\#E\right) \le \sum_{v\in V}\binom{d(v)}{r} = (\#)$$

- pro $\frac{2}{n}\#E < r-1$ nemůžu převést na komb. číslo
  $\#E < \frac{r-1}{2} . n < C . n^{2-\frac{1}{r}}$
- jinak $(*) = n\binom{\frac{2}{n}\#E}{r} \le (\#) \le (r-1)\binom{n}{r} \le (r-1)\frac{n^r}{r!}$
  $= n\frac{(\frac{2}{n}\#E)(\frac{2}{n}\#E-1)\dots(\frac{2}{n}\#E-r+1)}{r!} \ge \dots$

převedu: $\frac{n\left(\frac{2}{n}\#E - r\right)^r}{r!} \le r\frac{n^r}{r!}$ $\quad / \cdot r!; \sqrt[r]{\ }$

$\sqrt[r]{n}\left(\frac{2}{n}\#E - r\right) \le \sqrt[r]{r} . n$ $\quad / \cdot \frac{1}{\sqrt[r]{n}} . \frac{n}{2}$

$\#E - r\frac{n}{2} \le \frac{\sqrt[r]{r}}{2} n^{2-\frac{1}{r}}$

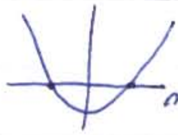
$\#E \le \frac{\sqrt[r]{r}}{2} . n^{2-\frac{1}{r}} + r . \frac{n}{2} \le r . n^{2-\frac{1}{r}}$

- $r := 2$; označím $\#E = m$; jak vylepším/upravím c?

$n \cdot \frac{(\frac{2m}{n})(\frac{2m}{n}-1)}{2} \le \frac{n(n-1)}{2} \quad / \cdot n^2$

$2m(2m-n) \le n^2(n-1)$

$4m^2 - 2mn - n^2(n-1) \le 0$; hledám m: $m_{1,2} = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2+16n^2(n-1)}}{8} = \frac{n \pm n\sqrt{4n-3}}{4}$



$\boxed{m \le \frac{n+n\sqrt{4n-3}}{4}}$

$r=2$: $\#E \le n\frac{1+\sqrt{4n-3}}{4}$ ... z věty

ukážeme, že $\exists G$ na n vrcholech, který neobsahuje $K_{2,2}$ // $\cong C_4$

a má $\#E = (n-1)\frac{1+\sqrt{4n-3}}{4}$ // řádově stejné...

- 3.5.2005

vyšlo nám zjemnění odhadu $\#E \le \frac{1}{4} n(1+\sqrt{4n+3}) \sim O(n^{3/2})$

uděláme konstrukci grafu, aby $\#E \le \frac{1}{4}(n-1)(1+\sqrt{4n+3})$

↳ s hodně hranami bez $K_{2,2} = C_4$

$p \in \mathbb{P}$ /*prvočíslo*/; vezmu těleso $\mathbb{Z}_p = \{0,1,\dots,p-1\}$ s modulo p

vytvořím $\mathbb{Z}_p^3 = \{\vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \mid x_i \in \mathbb{Z}_p \; i \in \hat{3}\}$

$\#\mathbb{Z}_p^3 = p^3$

vrcholy grafu jsou přímky v $\mathbb{Z}_p^3$, které procházejí počátkem

dva různé vrcholy dám do hrany, když odpovídající přímky jsou na sebe $\perp$

- přímka: $\vec{x} \neq \theta$ $[\vec{x}]_\lambda = \{k\vec{x} \mid k = 0,1,\dots,p-1\}$; přímka má p bodů

kolik je tam přímek procházejících počátkem? potřebuji směrový v.

p^3-1... kandidáti na směrové vektory (jeden, nulový, nepočítám)

$p-1$ ... nenulových vektorů dá stejnou přímku

$\#V = \frac{p^3-1}{p-1} = p^2+p+1$ ... tolik má tedy vrcholů

$[\vec{x}]_\lambda = [(x_1,x_2,x_3)]_\lambda$; $[\vec{y}]_\lambda = [(y_1,y_2,y_3)]_\lambda$ ... kdy jsou v hraně?

zavedu std skal. souč. $x_1y_1+x_2y_2+x_2y_3 = 0 \iff$ jsou v hraně

kolik má přímka hran? $\hat{=}$ kolik má řešení? $\vec{x} \neq \theta$

- 3 neznámé, 1 rce, má tedy $3-1 = 2$ LN řešení, tj.

$\exists$ basické řešení $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}$ že $\alpha\vec{y}^{(1)} + \beta\vec{y}^{(2)}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_p$

hledám nenulová řešení → mám p^2-1 řešení // krom 0 dosadím za α,β p parametrů kolmých přímek na $[\vec{x}]_\lambda$ je $\dfrac{p^2-1}{p-1} = p+1$ // Kolik jich je v daném kolmém směru?

víme: $[\vec{x}]$ má $p+1$ hran; p hran když $\vec{x} \perp \vec{x}$

$[\vec{x}]_\lambda, [\vec{y}]_\lambda$ jsou dvě různé přímky $\Rightarrow \exists 1$ přímka $\vec{z}$ taková, že $\vec{z} \perp \vec{x}$ a $\vec{z} \perp \vec{y}$

tedy nikoliv  $\Rightarrow$ pak graf neobsahuje C_4

hledáme $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ $\quad x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0$

$y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0 \quad h\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists_1$ LN řešení, ostatní jsou násobky $\rightarrow$ určuje jedinou přímku

mezi p^2+p+1 přímek je právě $p+1$ přímek $[\vec{x}]_\lambda$ kolmých na sebe

všech vrcholů je p^2+p+1: $p+1$ vrcholů má p hran; p^2 vrcholů má $p+1$ hran

víme: $2\#E = \sum_{v \in V} d(v) = p(p+1) + (p+1)p^2 = p(p+1)^2$

tedy u nás $\#E = \frac{1}{2} p(p+1)^2 \overset{(*)}{=}$ $\quad n = p^2+p+1$ // $n :=$ ozn.

řeším $p^2+p+1-n = 0 \quad p_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4n-4}}{2} \dots p = \dfrac{-1+\sqrt{4n-3}}{2}$

$(*) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{4n-3}}{2}}_{p} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right)}_{p+1}}_{\frac{4n-3-1}{4} = n-1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right)}_{p+1} = \underbrace{\frac{1}{4}(n-1)(1+\sqrt{4n-3})}$

---

teď ještě dokážeme: "mezi p^2+p+1 přímek je právě $p+1$ přímek $[\vec{x}]_\lambda$ kolmých na sebe"

$A \dots (p^2+p+1) \times (p^2+p+1) \qquad [\vec{x}^{(1)}]_\lambda, [\vec{x}^{(2)}]_\lambda, \dots, [\vec{x}^{(p^2+p+1)}]_\lambda$

$(A)_{ij}$ matice $=$ 1 když $\vec{x}^{(i)} \perp \vec{x}^{(j)}$; 0 jinak ; je diagonizovatelná

chceme ukázat, že na diagonále sedí právě $p+1$ jedniček $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}\, A = p+1$; je diagonalizovatelná $\Rightarrow D = P^{-1}AP$

$\mathrm{tr}\, P^{-1}AP = \mathrm{tr}\, D =$ suma vl. čísel

vezmu $[\vec{x}]_\lambda$ je kolmý na $p+1$ přímek $\Rightarrow$ matice A má v každém řádku $p+1$ jedniček

$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = $ /* sečtu počet jedniček */ $= \begin{pmatrix}p+1\\p+1\\\vdots\\p+1\end{pmatrix} = (p+1)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ tj. $p+1$ je vl. číslo

// "kolmý na sebe" $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \mod p$

// při počítání matice A ... užiju mod p; při počítání s maticí → normálně
jsem v $\mathbb{Z}_p$ ... jsem v $\mathbb{R}$

// chci ukázat, že ostatní vl. čísla v sumě dají 0, nejsou 0, ale "vyruší se"

A^2: $\begin{array}{c}\\ i\end{array}\begin{pmatrix}0\,1\,0\,1\,1\dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $(A^2)_{ij}$ = počet takových k, že A_{ik} a A_{kj} je 1, tj $\vec{x}^{(i)} \perp \vec{x}^{(k)}$ a $\vec{x}^{(j)} \perp \vec{x}^{(k)}$

$= \begin{cases} 1 & i \neq j \\ p+1 & i=j \end{cases}$

tj. $A^2 = pI + J$ $\qquad J = \begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&1&1&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\\1&\dots&&&1\end{pmatrix}$ $\qquad$ tj. $A^2 = \begin{pmatrix}p+1&1&\dots&1\\1&p+1&1&1\\\vdots&&p+1&1\\1&\dots&1&p+1\end{pmatrix}$

→ 0 je p^2+p vl. čísla // $h(J)=1$
má p^2+p LN vl. v. k číslu 0
→ $J\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p^2+p+1\\\vdots\\p^2+p+1\end{pmatrix} \Rightarrow p^2+p+1$ je vl. č. k vl. v. $\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} + J\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = (p+p^2+p+1)\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = (p+1)^2\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ tj. $(p+1)^2$ je vl. č. A^2 s násobností 1

ostatní vl.č. A: $\vec{\alpha}$ vl. v. k vl. č. 0 matice J

$A^2\vec{\alpha} = pI\vec{\alpha} + \underbrace{J\vec{\alpha}}_{\theta} = p\vec{\alpha}$ /* protože */

tj A^2 má vl. č. p s násobností p^2+p

// víme: λ vl. č. $A \Rightarrow \lambda^2$ je vl. č. A^2

tj. A má $\sqrt{p}$ vl. č. s nějakou násobností r a $-\sqrt{p}$ s násobností s

tj. suma vl. č. A: $p+1 + r.\sqrt{p} + s.(-\sqrt{p}) = tr\, A \in \mathbb{N}\cup\{0\} = p+1$

$p \in \mathbb{P}$, $\sqrt{p}$ irac; tj. r a s jsou stejné, musí dát 0

QED

G neobsahuje kliku velikosti $P \Rightarrow \#E \leq \frac{1}{2}n^2\left(1-\frac{1}{p-1}\right)$

$S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ diam $S = \max\{\|x_i - x_j\| : i,j = 1,\dots,n\} = 1$ // diametr

volím $d \in (0,1)$ a ptám se "kolik dvojic bodů je od sebe vzdáleno $> d$"

pro $1 > d > \frac{1}{\sqrt{2}}$ je počet párů vzdálených $> d$ je maximálně $\frac{n^2}{3}$

dk: def G: $V = \{x_1, \dots, x_n\}$; $\{x_i, x_j\} \in E \Leftrightarrow \|x_i - x_j\| > d$

ukážeme, že G neobsahuje $K_4 \xRightarrow[\text{Tur.}]{} \#E \leq \frac{1}{2}n^2\left(1-\frac{1}{4-1}\right) = \frac{1}{3}n^2$

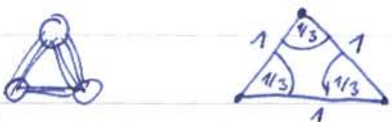
ještě musím ukázat, že neobsahuje kliku velikosti 4

~~mezi~~ z každé ~~každou~~ čtveřicí bodů v rovině lze vybrat 3 body tak, že tvoří úhel $\geq 90°$

1 bod je konvexní kombinace zbylých bodů ... dokonce $120°$

není, ~~...~~ 4 body určují 4úhelník ... alespoň 1 úhel $\geq 90°$

kdyby G obsahovalo kliku velikosti 4 ... K_4; najdu 3 ze 4 vrcholů tak, že úhel $90° \leq$ ... $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pro >1 tím spíše pro → spor, s diam = 1 QED



do △ dám 1/3 bodů

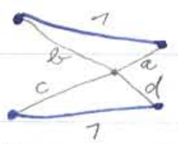
?: jak mám rozmístit n bodů v rovině tak, aby vzdálenost mezi různými body ≤ 1 a co nejvíc dvojic mělo vzdálenost $= 1$

3 body: △ 4 body: věta: Takových párů je $\leq n$. / n:

dk: zkonstruujeme graf G s $V=\{x_1,\dots,x_n\}$ a $\{x_i,x_j\}\in E \Leftrightarrow \|x_i-x_j\|=1$

pozorování: každé dvě hrany mají buď společný vrchol, nebo se protínají // ... nenastane, tj. buď nebo

dk: zoom:



△ věta: $a+b>1$

$c+d>1$

tj. $(a+c)+(b+d)>2$ tj. buď $(a+c)$ či $(b+d)>1$ ... spor

pozorování (alias fakt): Když nějaký vrchol stupně $d_i \geq 3$, tak má alespoň d_i-2 sousedů se stupněm 1.

dk:

uprostřed „vějířku" nemůže mít hranu: musela by protnout vše nalevo i napravo - nelze

mám $(d_i,\dots,d_p)$ se stupni ≥ 3, skóre grafu $(\underbrace{d_1,\dots,d_p}_{\geq 3},\underbrace{2,2,\dots,2}_{k},\underbrace{1,1,\dots,1}_{l})$

$2\#E = \sum_{i=1}^{p} d_i + 2k + l$ $l \geq \sum_{i=1}^{p}(d_i-2)$ tj. $\sum_{i=1}^{p} d_i \leq 2p+l$

$\leq 2p+l+2k+l = 2(p+k+l)$

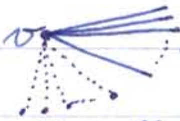
$\#E \leq n$ QED

úloha:

věta: Nechť G je graf na n vrcholech, pak počet klik velikosti 3 + počet nezávislých velikosti 3 je alespoň .... (#) # → důkaz

dk: $\Delta + \therefore$

$\Delta + \therefore + \ldots + \ldots = \binom{n}{3}$ .. všechny možnosti $\sim \frac{n^3}{6}$

vemu $v \in V$  $d(v)$ sousedů - hran ; takových trojic pro dané v je $d(v).(n-1-d(v))$

$n-1-d(v)$ ... s nima nemá

ta trojice je dvojího druhu:  a 

$\sum_{v\in V} d(v)(n-1-d(v)) = 2(\ldots)$ //2x počet doplňkových případů

 $x(n-1-x) \le \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

$\sum_{v\in V} d(v)(\ldots) \le \sum_{v\in V} \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \le n\frac{(n-1)^2}{8}$

tj $\#(\Delta + \therefore) \ge \binom{n}{3} - n\frac{(n-1)^2}{8} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)^2}{8} = \frac{n(n-1)(\underbrace{4(n-2)-3(n-1)}_{=n-5})}{24} =$

$= \frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ (#) $\sim \frac{n^3}{24}$ .... $\sim \frac{1}{4}$ ze všech

05.05.05

Vrcholová analýza

def.: K- vrcholové obarvení grafu $G=(V,E)$ je zobrazení $\varphi: V \to \{1,2,\ldots,k\}$. K- vrcholové obarvení φ, pro které platí, že pokud $\varphi(v)=\varphi(u) \Rightarrow \{u,v\} \notin E$ $\forall u,v \in V$ se nazývá vlastní. Minimální číslo k takové, že existuje k-vrcholové vlastní obarvení grafu G se nazývá vrcholová barevnost a značí se $\chi(G)$

pozn.: $V_i = \{$vrcholy barvy i při vl. obarvení $\varphi\}$ → je to nezávislá mn. → tj. $\#V_i \le \alpha(G)$

$V_i \cap V_j = \emptyset$ pro $i \ne j$ $\quad V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$

$n = \#V = \sum_{i=1}^{k} \#V_i \le \alpha(G).k$ $\quad /k = \chi(G)$

$n \le \alpha(G).\chi(G)$

pozn.: $\omega(G)$

př.: K_n ..... $\chi(K_n)=n$; pak $\omega(G) \le \chi(G)$

P_n ... cesta délky n ... $\chi(P_n)=2$

C_n ... kružnice   sudá: $\chi(C_n)=2$; lichá $\chi(C_n)=3$

pozn: G? pro $\chi(G)=2$

... hrany naštorc → bipartitní grafy

pozn.: $p\in N$, $p\ge 3$ "Je $\chi(G)=p$?" .... NP úplná úloha

dřív pro hranovou: $\Delta \le \chi'(G) \le \Delta+1$

vrcholová: nelze odhadnout pomocí max. stupně $\le \chi(G) \le$ věta....

↛ bipart: $\chi(G)=2$; ale max. st. ~ lib.

věta: $\chi(G)\le\Delta+1$.

dk: indukcí na počet vrcholů

na obarvení stačí

n vrcholů, v, $d(v)=\Delta_G$ // mám vrchol s max. st.

vezmu $G-\{v\}$ .... $\Delta_{G-\{v\}} \le \Delta_G$ a platí $\chi(G-\{v\}) \le \Delta_{G-\{v\}}+1 \le \Delta_G+1$

jak obarvím v? má Δ_G kamarádů, mám Δ_{G+1} barev ... půjde to v pohodě

pozn.: kdy $\chi(G)=\Delta+1$?

G je úplný graf $\chi(K_n)=n=\underbrace{n-1}_{\Delta}+1$

○ liché délky $\chi(C_{2n+1})=3=\underbrace{2}_{\Delta}+1$

lemma: $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ $\chi(G_1\cup G_2)\le\chi(G_1)\cdot\chi(G_2)$ kde

$G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$

dk: G, přidám izolovaný vrchol $\chi(G)=\chi(G+1$ izolovaný vrchol$)$

BÚNO: $V_1=V_2=V$ (nejsou-li stejné, doplním izolované body)

$\varphi_1: V\to \cancel{E}\ \{1,2,\dots,\chi(G_1)\}$, $\varphi_2: V\to\{1,2,\dots,\chi(G_2)\}$

$v \to (\varphi_1(v),\varphi_2(v)) = \psi(v)$

když $\{v,u\}\in E=E_1\cup E_2 \Rightarrow \psi(v)\ne\psi(v)$

$\{u,v\}\in E \Rightarrow \varphi_1(u)\ne\varphi_1(v)$

$\psi: V\to\{1,2,\dots,\chi(G_1)\}\times\{1,2,\dots,\chi(G_2)\}$

$\{1,2,\dots,\chi(G_1),\dots,\chi(G_2)\}$

∃ bijekce $\mathcal{B}$ $\quad v \to \mathcal{B}(\psi(v))$

$V \to \{1,2,\dots,\chi(G_1),\chi(G_2)\}$

pro $\{u,v\}\in E \Rightarrow \psi(u)\neq\psi(v) \Rightarrow \mathcal{B}(\psi(u))\neq \mathcal{B}(\psi(v))$

/* co jsme dokázali? */

G

• vrchol rozdělím na 2 půlky
← obarvím výsledem k G_1
← G_2

// kolik je různých funkcí?

důsledek: $\chi(G)\cdot\chi(\bar G)\geq n$

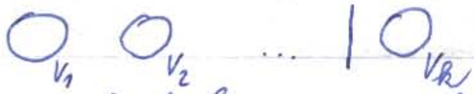
$G\cup\bar G = K_n$; $\chi(G\cup\bar G)=n$

důsledek důsledku: Buď G nebo $\bar G$ má barevnost alespoň $\sqrt{n}$

věta: Barevnosti $\chi(G)+\chi(\bar G)\le n+1$

pomocné lemma: nechť ex. rozklad množiny $V=V_1\cup V_2\cup\dots\cup V_k$ na k disjunktních částí tak, že $\forall i,j\in\{1,\dots,k\}\ i\neq j$ $\exists x_i\in V_i\ \exists x_j\in V_j$ tak, že $\{x_i,x_j\}\notin E$. Pak $\chi(G)\le n+1-k$.

dk lemmy: indukcí na k:



vezmu indukovaný podgraf na $\bigcup_{i=1}^{k-1} V_i$

$\chi\left(G_{\bigcup_{i=1}^{k-1}V_i}\right)\le n-\#V_k+1-(k-1)=n-\#V_k-k+2$

vezmu nových $\#V_k$ barev a obarvím vrcholy V_k každý novou jinou barvou,

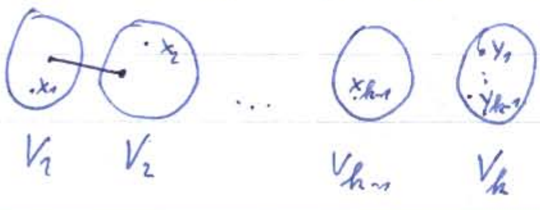
máme vl. obarvení G a počet barev $\le n-\#V_k-k+2+\#V_k$
$\le n-k+2$

jaká je situace, kdy jsme vyplácali $n-k+2$ barev?

// pro $\lneq n-k+2$ tj $\le n-k+1$ .... OK

$\forall i=1,\dots,k-1\quad x_i\in V_i\quad y_i\in V_k$

$\#(V\setminus\{x_1,\dots,x_{k-1}\})=n-k+1$



∃ barva b, která se vyskytuje pouze na vrcholech z $\{x_1,\dots,x_{k-1}\}$

vrchol x_i, který má barvu b přebarvím barvou, kterou má y_i
/*?*/ je to vlastní obarvení
dk věty: $[\chi(G) + \chi(\overline{G}) \le n+1$
$\chi(G) = k$

$\forall_{i,j \atop i \ne j} \exists x_i \in V_i \ \exists x_j \in V_j$
že $\{x_i, x_j\} \in E$;
udělám $\overline{G}$, budeme mít rozklad V
$\Rightarrow \chi(\overline{G}) \le n-k+1 = n - \chi(G) + 1$
// úloha obarvení mapy států → kolik potřebuju barev → 4 /1976
// převedu na: hl. město = vrchol; mají-li státy hranici → dám hranu

def.: Řekneme, že $G = (V, E)$ je k-kritický, když $\chi(G) = k$
a pro každý podgraf $H \subsetneq G$ platí $\chi(H) < \chi(G)$
př.: 1-kritický graf: •
2-kritický graf: — //cokoliv odeberu, stačí 1 barva
3-kritický graf: C_{2n+1} //cokoliv odeberu je bipartitní
4-kritický graf: "C_{2n+1} se středem"

pozn: nechť G je graf s komponentami $G_1, G_2, \dots, G_n$
$\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \dots, \chi(G_n)\}$

pozorování: k-kritický graf je souvislý - má jedinou komponentu

věta: Když G je k-kritický graf, pak $\delta \ge k-1$.
dk sporem: nechť $\delta \le k-2$ $\exists v \in V$ $d(v) \le k-2$

→ $G \setminus \{v\}$ ... stačilo by $k-1$ barev
zbyla by mi barva na v ... má málo sousedů

spor

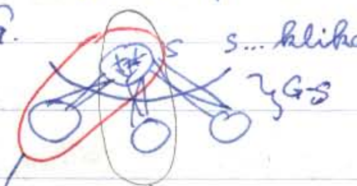
pozn.: Každý graf G, že $\chi(G)=k$ obsahuje podgraf $\hat{G}$, který je k-kritický.

důsledek: Když G má barevnost $k=\chi(G)$, pak v G existuje alespoň k vrcholů se stupněm alespoň $k-1$

def: Množinu $S \subset V$ nazveme řezem grafu $G=(V,E)$, když $c(G-S) > c(G)$. // c... počet komponent

věta: Nechť G je k-kritický graf a S jeho řezem, pak S není klika v grafu G.

dk: sporem: G-S



a nechť $\#S = r$

$S = \{x_1, \dots, x_r\}$

barevnost $\leq k-1$

obarvím tak, že x_1 má barvu 1; x_2... 2; ...; x_r... r

taky mi stačí k-1 barev

S nesmí být klika; speciálně: ubráním jednoho vrcholu z k-kritického grafu nenaruším jeho souvislost

10.5.2005

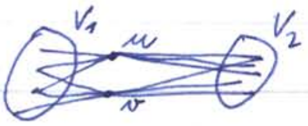
opáčko: G je k-kritický a $S \subset V$ je řez v G $\Rightarrow$ S není klika

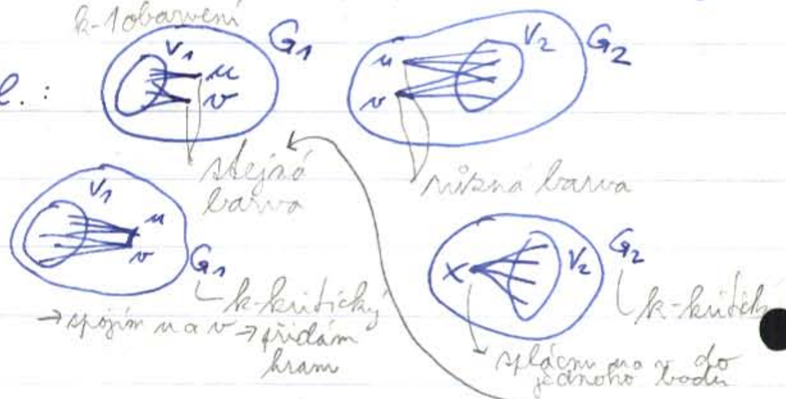
důsledek: 1 vrchol nemůže být řezem v k-kritickém vrchu

věta: Nechť $G=(V,E)$ je k-kritický graf a $S=\{u,v\}$ je jeho řezem. Pak $G \setminus S$ má právě dvě komponenty, označme množinu vrcholů těchto komponent V_1 a V_2, přičemž podgraf G_1 grafu G indukovaný množinou $V_1 \cup \{u,v\}$ má při každém obarvení k-1 barvami vrcholy v a u obarveny <u>stejnou</u> barvou; G_1 podgraf G ind. $V_2 \cup \{u,v\}$ má při každém obarvení k-1 barvami vrcholy v a u obarveny <u>různou</u> barvou, ↓

↑

navíc když ke G přidáme hranu {u,v} pak výsledný graf je k-kritický; když ke grafu indukovanému na V_2 přidáme umělý vrchol $x \notin V$ a hrany $\{x,y\}$ pro $\forall y \in V_2$ takové, že $\{y,u\}$ nebo $\{y,v\} \in E$, pak výsledný graf je k-kritický!

co říká věta: 

s vl.: přidám hranu: 

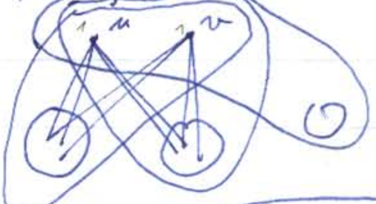
dk: • sporem: alespoň 1 komponenta má vlastnost má vl.

„nechť" pro vrcholy V_i každé komponenty platí, že graf indukovaný na $V_i \cup \{u,v\}$ lze obarvit k-1 barvami tak, že u, v má různou barvu → aby vedlo ke sporu } (*)

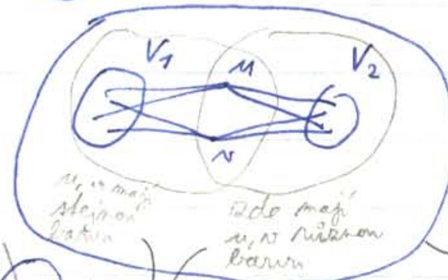
// zatím nevím, že jsou jen dvě komponenty

... spor, pro celý graf potřebuju k-barev

• ~~sporem; nechť~~ (*), ale .... , že u, v má stejnou barvu



... spor, nejde

víme: 

// ∃ V_1 a V_2 tak, že...

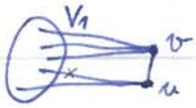
jiné komponenty 

→ stačí k-1 barev

vede ke sporu → neplatí, potřebuju k barev

žádné jiné komponenty tam nejsou

• přidáme umělou hranu $\{u, v\}$



k-barev

ubráním ~~vrchol~~ hranu snížím barevnost : odeberu u či v ... jasné; odeberu z V_1 ✗

• spláchnu 2 vrcholy dohromady x — V_2 ... výsl je k-kritický graf

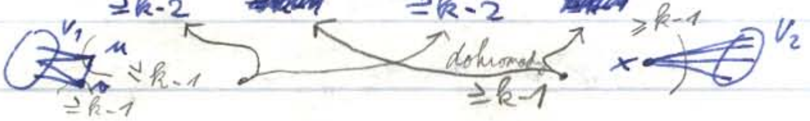
bez spláchnutí $k-1$ barev ⇒ na spláchnutí potřebuju novou barvu

důsledek: Když $S=\{u,v\}$ je řezem v k-kritickém grafu, pak
$d(u)+d(v) \geq 3k-5$.

dk: už víme: G k-kritický ⇒ $\delta \geq k-1$ // $d_{V_i}(x)$ .. kolik vede z x do V_i

$$d(u)+d(v) = \underbrace{d_{V_1}(u)}_{\geq k-2} + d_{V_2}(u) + \underbrace{d_{V_1}(v)}_{\geq k-2} + d_{V_2}(v) \geq 3k-5$$

situace:



$d_{V_2}(u)+d_{V_2}(v) \geq d(x) \geq k-1$

věta (Brooks): Nechť G je souvislý graf, který není klika ani lichá kružnice. Pak $\chi(G) \leq \Delta$.

opáčko: $\chi(G) \leq \Delta+1$; tj ↑: rovnost nastává pro kliku a lichou kruž.

dk: BÚNO: dk pro k-kritický graf

↳ proč: G.... $\chi(G)=k$; G obsahuje k-krit. podgraf G': $\chi(G')=\chi(G)$

předp., že $\chi(G') \leq \Delta' \leq \Delta$
$\| \chi(G)$ — kdy nelze použít?

co když podgraf je klika či lichá kružnice?

→ pak $G' \subsetneq G$ /* G není */ → G má něco navíc,

pak $\Delta' < \Delta$ ⇒ $\chi(G') \leq \Delta'+1 \leq \Delta$

$k=1$ • ✓ ; $k=2$ — ✓; $k=3$ △ ✓

$k \geq 4$ G je k-kritický ($\chi(G)=k$)

① nechť v G ex. řez na dvou vrcholech $S=\{u,v\}$

$$2\Delta \geq d(u)+d(v) \geq 3k-5 = \underbrace{k-4}_{\geq 0}+2k-1 \geq 2k-1 \quad / \cdot \tfrac{1}{2}$$

$\Delta \geq k-\frac{1}{2}$ ⇒ $\Delta \geq k = \chi(G)$
↑ celé číslo

② neex. řez, tj. ubráním lib. dvou vrcholů zůstane G souvislý

$u, v \in V$ $\{u,v\} \notin E$ $d(u,v) = 2$

u — w — v /* z u do v přes w */

$G \setminus \{u,v\}$ je stále souvislý graf

$V \setminus \{u,v\}$ uspořádáme podle vzdálenosti od w

v u v_{n-2} … v_i v_{i+1} … v_2 v_1 w

n-2 … 2, vzdál. 1, vzdál. 0

barvy: 1. 1.

nechť mám obarveno do v_i → jak obarvím v_{i+1}?

$\underbrace{d(w, v_i) > d(w, v_j)}_{G \setminus \{u,v\}} \Rightarrow i > j$ → vzdálenost

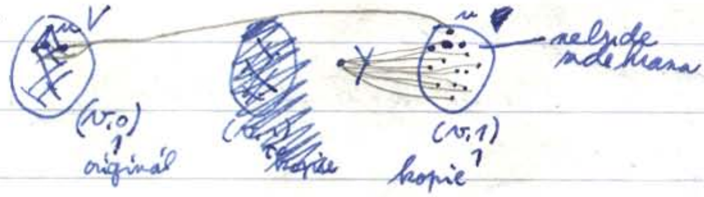
z v_{i-1} alespoň 1 hrana vede doprava
doleva vede max $\Delta - 1$ hran a mám
Δ barev → alespoň 1 barva mi zbyla, tou barvím

potřebuju obarvit w, má Δ sousedů, ale u a v jsou obarveni
stejně, jedna barva mi zbyla

konstrukce: z k-kritického grafu vyrobím (k+1)-kritický graf

$G = (V,E)$, G je k-kritický, $G' = (V', E')$, $V' = V \times \{0,1\} \cup \{y\}$

$E' = \{\{(v,0),(u,i)\} : \{u,v\} \in E,\ i = 0 \text{ nebo } 1\} \cup \{\{(v,1), y\} : v \in V\}$

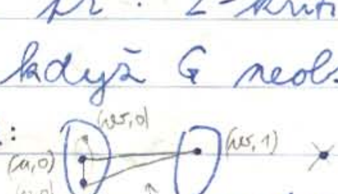
G:


, u v kopii spojím se všemi, s kterými byl spojen původní u

tvrzení: G' je (k+1)-kritický.

př: 2-kritický ! ⇒ orig, kopie, y = ⬠ lichá kružnice

• když G neobsahuje K_3 ⇒ G' neobsahuje K_3

dk:


// Δ = klika vel 3

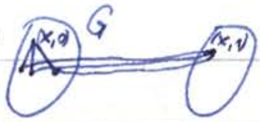
tento stav by předpokládal kliku $(w,0)$ — $(u,0)$, $(v,0)$ v G … spor

$\chi(G) \not\geq \omega(G)$

tj. existují grafy, kde $\chi(G) > K$ ... velká const $\omega(G) = 2$

$\chi(G') = k+1$: · lze obarvit k+1 barvama

·· nelze obarvit méně barvama

ověření ·: 

obarvené k barvami

$\varphi: V \to \{1, \dots, k\}$ ... vl. obarvení G

$\psi(x,0) = \varphi(x)$

$\psi(x,1) = \varphi(x)$

$\psi(y) = k+1$

def ψ → OK (·)

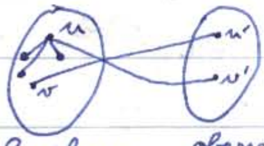
··: sporem, kdyby šlo ... třeba k barvama

BÚNO y má barvu k; y spojeno se vším v kopii ⇒ všechny vrcholy kopie obarveny $\{1, \dots, k\}$ ⇒ i v originálu?

tak nevadí, když přebarvím na i

udělám-li pro všechny ↑ : celý graf k-1 → spor

nelze obarvit méně barvami



k-1 barev

obarvím stejně pomocí k-1 barev

· y obarvím k. barvou

u, v mají stejnou barvu

u' i v' –//–

to vadí, přebarvím u, v na k. barvu

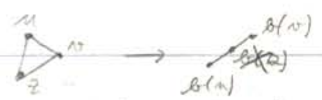
Planární grafy

def: nakreslení grafu $G = (V,E)$ je $b: V \to R^2$, b prosté a jednoduché a

$\psi: E \to \{$spojité křivky$\} = \{(x(t), y(t)); t \in \langle 0,1 \rangle, x, y$ spojité$\}$

přičemž platí: $E \ni e = \{u,v\} \Rightarrow b(u)$ a $b(v)$ je koncový vrchol $\psi(e)$ a

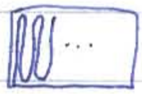
$\forall w \in V \quad b(w) \notin \{(x(t), y(t)); t \in (0,1)\}$ ↛ obraz w není uvnitř hrany



Planární graf je nakreslení do roviny takové, že hrany se neprotínají (nenastane nebo X) spojitost: $(x(t), y(t))$ $t \in \langle 0,1 \rangle$ x, y a skoro nikde nemá tečnu

$x(t) = \sin t$; $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(t 3^n)$ → nemá derivaci → udělá z toho divergentní řadu

chci něco víc

další "blbá" křivka  křivka co vyplní čtverec

Jordanova věta: Jednoduchá křivka rozděluje rovinu na 2 části; spojnice bodu z vnitřku a vnějšku protíná hranici křivky.

aplikace - plošné spoje

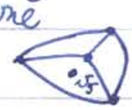
12. 5. 2005

K5 není planární

3 body definují křivku 

4. je uvnitř 

pak 5. nemůže ležet vně 

5. leží uvnitř  → v_5 leží v uzavřené křivce → nejde

4. je vně  5. .... taky nejde

na doma: 3 domy; pošta, hostel, obchod → 

... nejde propojit aniž by se protli → 1 hrana nejde

$K_{3,3}$ není planární; $K_{3,3} \setminus$ jedna hrana je planární 

K_5 není ... ; $K_5 \setminus$ jedna hrana je ...

... minimální neplanární

def. operace dělení hrany: $G = (V, E)$ $e = \{x, y\} \in E$

$G \% e = (V \cup \{z\}, E \setminus \{x, y\} \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\})$,

kde $z \notin V$. // z je nový vrchol

Řekneme, že G' je dělení grafu G, když G' lze získat z G postupným opakováním operace dělení hrany.

př.: K_5 ...: dělení K_5 ... K_5, ale ani dělení K_5 není planární
// G neplanární ⇔ dělení G neplanární //dělení != isomorfismus

věta: Když G obsahuje jako svůj podgraf K_5 nebo $K_{3,3}$, pak G není planární.

věta (Kuratowski) 1930: % ⇔ %

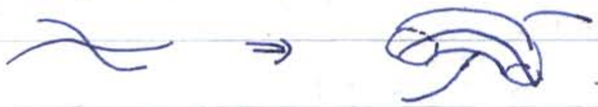
// povrch koule ⇔ rovina
pneumatika

... lze K_5

Möbiův pás

lze $K_{3,3}$

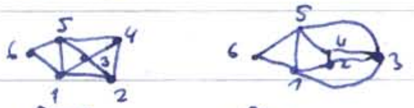
pro každý graf existuje souvislá 2D plocha taková, že lze na něm graf nakreslit planárně



→ udělám „ucho"

na žádnou plochu nelze nakreslit všechny grafy
rovina: jen dva blbé grafy K_5, $K_{3,3}$
pro každou plochu ∃ konečný počet "blbých" grafů, které nelze nakreslit

---



.. různé namalování

... různé typy oblastí

věta: (Euler) Nechť $G=(V,E)$ je souvislý planární graf. Pak pro počet oblastí $\phi(G)$, na které se rozpadne rovina při namalování G platí $\#V - \#E + \phi(G) = 2$

// mnohostěn → lze „roztáhnout" do roviny, jedna stěna se stane nekonečná
// potáhnu fólií, označím vrcholy, ve stěně udělám
// díru, tu roztáhnu do plochy

dk: indukcí na $\phi(G)$

$\phi(G)=1 \Leftrightarrow G$ neobsahuje kružnici $\Leftrightarrow G$ je strom $\#E = \#V-1$

$\#V - (\#V-1)+1 = 2$

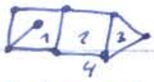
$\phi(G)>1$ $\exists e$ rozděluje dvě oblasti; vezmu $G \setminus e$ ... zůstane planární i souvislý

$\phi(G\setminus e) = \phi(G)-1$; využiji IP: $\#V - (\#E-1) + \underbrace{\phi(G\setminus e)}_{=\phi(G)-1} = 2$

$\Downarrow$

$\#V - \#E + \phi(G) = 2$

věta: Nechť $G=(V,E)$ je obyčejný, souvislý, planární graf, $\#V \geq 3$. Pak $\#E \leq 3\#V-6$ // bez nás. hran a smyček

dk: $(*) \geq \sum_{\substack{\text{přes všechny}\\ \text{oblasti na kt.}\\ \text{se rozpadne rovina}}} \underbrace{(\text{počet hran grafu v uzavřené oblasti})}_{\geq 3 \ \triangle} \geq 3\phi(G)$  $= 3(2-\#V+\#E)$

$2\#E \geq (*)$ → každá hrana se započítá max 2x

upravím: $3\#V-6 \geq \#E$

důsledek: K_5 není planární // $3.5-6 \overset{?}{\geq} \binom{5}{2} = 10$ .... $9 \not\geq 10$

$K_{3,3}$ ale splňuje // $\#V=6; \#E=9$ $3.6-6 \geq 9$

ale ne ↓ $9 \not\leq 12-4$

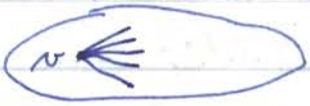
pozn.: Když navíc graf neobsahuje kružnici délky 3 → lepší odhad $\#E \leq 2\#V-4$

důsledek: G je obyčejný, planární graf, pak $\delta \leq 5$.

dk: $3\#V-6 \geq \frac{1}{2}\sum_{v\in V} \underbrace{d(v)}_{\geq \delta} \geq \frac{\delta}{2}\#V$ $/ \cdot 2 \cdot \frac{1}{\#V}$

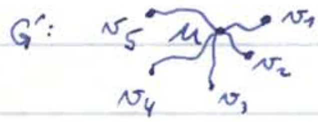
$6 - \frac{12}{\#V} \geq \delta \Rightarrow \delta \leq 5$

důsledek: G je planární $\Rightarrow \chi(G) \leq 6$
dk: indukcí
indukcí na počet vrcholů G... $\exists$ v že $d(v) = \delta \leq 5$



G\v stále planární
lze obarvit 6 barvami
v obarvím ... má jen 5 sousedů

věta: G je planární, obyčejný graf, pak $\chi(G) \leq 5$.
sporem: G je planární a $\chi(G) = 6$, vezmu jeho podgraf $G' \subseteq G$, že G' je 6 kritic.
k-kritický $\Rightarrow \delta \geq k-1$ $\quad 5 \geq \delta_{G'} \geq 5 \quad \delta_{G'} = 5$



obarvím graf $G-u$ 5 barvami (vlastní obarvení)
na sousedy je použito všech 5 barev, jinak spor
s tím, že $\chi(G') = 6$
V_i == vrcholy v barvě i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$
podgraf indukovaný $V_i \cup V_j$, v něm jsou
vrcholy v_i a v_j ve stejné komponentě
:

R^d ... konvexní polytop konvexní obal konečně mnoha bodů v R^d
konvexní obal: vezmu nadroviny ($\cancel{R^{d-1}}$) $H = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \mid \sum \beta_i x_i = B\}$
kde R^d je dán $(\beta_1, \dots, \beta_d)$; B ... const
polytop: vezmu konečně mnoho nadrovin, udělám průnik,
pokud je výsledek omezený, tak to nazvu polytop
R^2: #V /*nularozměrné*/ − #E /* jedno */ = 0
vícerozměrný prostor?
def.: Stěna P: nechť H je nadrovina taková, že $H \cap P \neq \emptyset$ ← ano
$H \cap P^o = \emptyset$, ← ne
pak $H \cap P$ nazveme stěna. $\quad$ vnitřek
Dimense stěny: min. dimense lin. variety, která obsahuje $H \cap P$
vrchol: 0. dimenzionální stěna
hrana: 1. dim

P konvexní polytop $\quad f_j(P)$ počet j-dimenzionálních stěn P
$P \subset \mathbb{R}^d \qquad j = 0, \dots, d-1$

Eulerova fle: $\mathbb{R}^3$: $f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) = 2$
$\mathbb{R}^2$: $f_0(P) - f_1(P) = 0$

věta: nechť P je konvexní polytop v $\mathbb{R}^d$. Pak

$$f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1}(P) = 1 - (-1)^d$$

~~KOMB 42/G~~ GRAF67

Eulerova fle pro R^3: $f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) = 2$
R^2: $f_0(P) - f_1(P) \qquad = 0$

Věta: nechť P je konvexní polytop v $\mathbb{R}^d$. Pak
$$f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - \underbrace{\ldots}_{\text{střídání znaménka}} (-1)^{d-1} f_{d-1}(P) = 1-(-1)^d$$

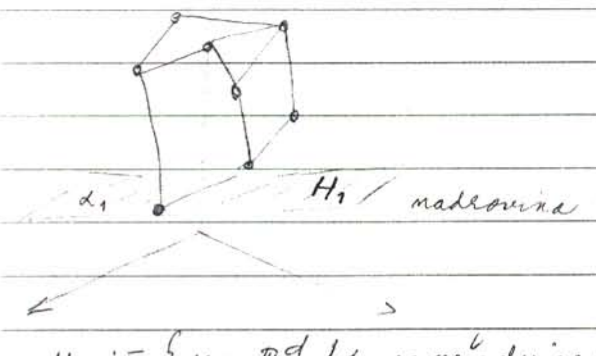
P $f_j(P)$, $P^\circ \neq \emptyset$
chceme ukázat vztah: $\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j f_j(P) = 1-(-1)^d$

DK: dodefinuji: $f_{-1}(P) = 1$
$f_d(P) = 1$
$f_k(P) = 0$, $k > d$

$$\sum_{j=-1}^{d} (-1)^j f_j(P)$$

$\mathbb{R}^d \supset P$ s vrcholy $x_1, \ldots, x_n$ $\quad f_0(P) = n$
P natočíme tak, aby první souřadnice bodů $x_1, \ldots, x_n$ byly od sebe různé

$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \ldots \qquad < \alpha_{2n-2} < \alpha_{2n-1}$
↑ nejmenší 1. souřadnice vrcholy; ↑ 2. nejmenší 1. souř.; ↑ 3. nejm. 1. souř.; ↑ poslední



H_2 seká
H_3 dalším bodem
⋮

$H_k := \{x = \mathbb{R}^d \,/\, 1. \text{ souřadnice } x = \alpha_k\}$
$P_k := H_k \cap P$
P_1 bod
P_{2n-1} bod
P_k polytop v $\mathbb{R}^{d-1}$ pro $\forall k = 2, \ldots, 2n-2$
$$\sum_{j=-1}^{d-1} (-1)^j f_j(P_k) = 0$$

fungují i pro $k = 1$ a $2n-1$

$$\downarrow$$

$$(-1)^{-1}\underbrace{f_{-1}(\text{bodu})}_{=1} + \underbrace{f_0(\text{bod})}_{=1} + \ldots 0$$

tzn. $\sum_{j=-1}^{d-1} (-1)^j f_j(P_k) = 0 \qquad \forall k = 1, \ldots, 2n-1$

$$/\cdot (-1)^{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} \sum_{j=-1}^{d-1} (-1)^j f_j(P_k) = 0.$$

záměním meze

$$\sum_{j=-1}^{d-1} (-1)^{j+1} \underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f_j(P_k)}_{=: z_j} = 0.$$

⊛ ukážeme, že
$$z_{-1} = -1$$
$$z_0 = f_0(P) - f_1(P)$$
$$z_j = f_{j+1}(P) \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, d-1$$

$$\sum_{j=-1}^{d-1} (-1)^{j+1} z_j = 0$$

$$\underbrace{-1}_{z_{-1}} + \underbrace{f_0(P) - f_1(P)}_{-z_0} \underbrace{+ f_2(P)}_{z_1} - f_3(P) + \ldots (-1)^d f_d(P) = 0$$

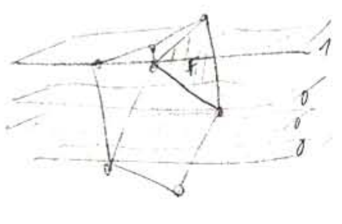
$\downarrow$

tvoří to co máme dokázat, zbývá ukázat ⊛

$j = -1$
$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \underbrace{f_{-1}(P_k)}_{=1} = -1$$

$j \geq 1$

F stěna P def. $\psi(F, H_k) := \begin{cases} 0 & \text{když } \#(F \cap H_k) \leq 1 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$ (stěna)



průnik větší než 1 bod

$$f_j(P_k) = \sum_{\substack{F \text{ } j+1 \text{ dimenzionální} \\ \text{v } P}} \psi(F, H_k)$$

~~KOMB 43/6~~ GRAF 69

$$z_j = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \sum_{\substack{F \\ j+1 \text{ dimenzionální} \\ \text{stěna v } P}} \psi(F, H_k) = \sum_{\substack{F \\ j+1 \text{ dim.} \\ \text{stěny } P}} \underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \psi(F, H_k)}$$

mám pevnou stěnu a měním k koukám jak sekají nadroviny stěnu

$$\underbrace{\sum_{k=2i_1}^{2i_2-2} (-1)^k = 1}$$

vrchol F s nejmenší 1. souřadnicí

$x_{i_1} \dots, x_{i_2}$ vrchol F s největší 1. souřadnicí

α_{2i_1-1} $\qquad$ α_{2i_2-1}

$\psi(F, H_k) = 0 \qquad k \le 2i_1 - 1$

$\psi(F, H_k) = 1 \qquad 2i_1 \le k \le 2i_2 - 2$

$\psi(F, H_k) = 0 \qquad 2i_2 - 1 \le k$

$z_j = f_{j+1}(P)$

$j = 0$

jen v případě, že k je liché

$$f_0(P_k) = (1) + \sum_{F \text{ 1rozměrná stěna } P} \psi(F, H_k)$$

$H_{\text{lichý}}$ má → seká vrchol

$H_{\text{sudý}}$ pouze když seká hranu

$$z_0 = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \Big(1 + \sum_{F \text{ 1dimenzionální stěny}} \psi(F, H_k) \Big) = -n + f_1(P)$$

pro k liché

$n \cdot (-1)$

počet lichých čísel

n... počet vrcholů

tzn. $f_0(P) = n$

Def: Graf G nazveme minimálně neplanární, když každý jeho vlastní podgraf je planární.

Lemma: G je minimálně neplanární takový, že $\delta \geq 3$ a G má řez S. Pak $\# S \geq 3$

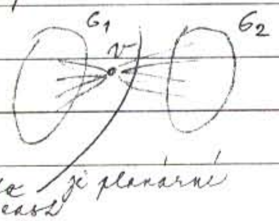
Dk: G je souvislý (každý min. neplanární graf je souvislý)

sporem

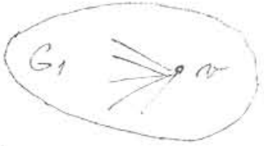
nechť ex. řez $S \subset V$, $\# S \leq 2$

$\rightarrow \# S = 1$

$S = \{v\}$



tato část je planární



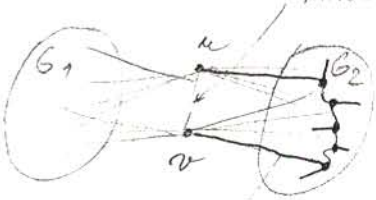
planární graf

umím dokonce namalovat: že v je na kraji

to samé udělám s částí
$G_2 + v$

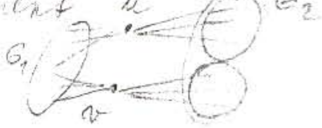
spojím obrázky, mám planární → spor
→ $\#S = 2$

může, nemusí



G_1, G_2 komponenty, víc jich už nemám

z u existuje cesta do v kt. využívá vrcholy z G_2
kdyby ne tak G_2 má víc komponent

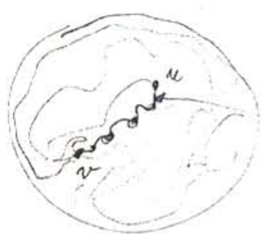


pak samotné "u" by bylo řezem, což jsem vyloučila → spor ad "1"
$\delta \geq 3$ z cesty vrcholů jistě kříží nějaké hrany

tzn.

podgraf

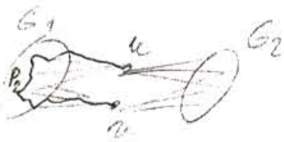
planární graf

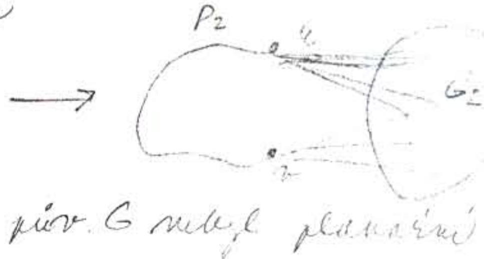


teď přesunu cestu na kraj aby vypadalo takto

transformace: $z \to \frac{1}{z-b}$

stejnou věc udělám v druhé části
najdu cestu P_2

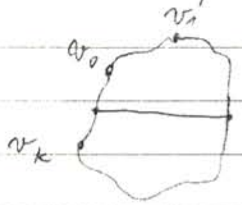




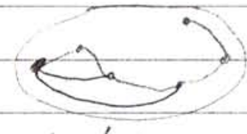
cestu umažu, spojím → spor že pův. G nebyl planární

~~KOMB 44/G~~ GRAF 71

Lemma: G je graf s $\delta \geq 3$. Pak v G existuje kružnice s tětivou, tj. kružnice s vrcholy $v_0 v_1 \dots v_k v_0$ přičemž $\exists i, j \dots i+2 \leq j$ $\{v_i, v_j\} \in E$



Dk: nechť P je cesta max. délky v G



1 vrchol má st. aspoň 3

2 hrany z něj ještě vedou → musí vést do vrcholů cesty

jinak by se prodloužila cesta

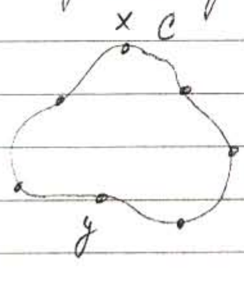
→ kružnice, tětiva

Lemma: nechť G je min. neplanární graf s $\delta \geq 3$. Pak $G = K_5$ nebo $G = K_{3,3}$.

Dk: v G existuje kružnice C s tětivou $\{x, y\}$

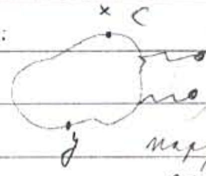
vyberu takové C a tětivu $\{x, y\}$, aby při namalování do roviny grafu $G - \{x, y\}$, počet oblastí ležících uvnitř kružnice C byl co největší.

$G - \{x, y\}$



1) vně C neleží žádný vrchol grafu

sporem:

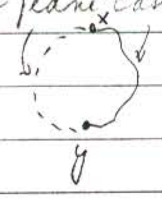


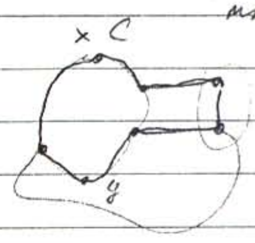
spojitý, z vrcholů vně musí vést hrany do C

napojen pouze na 2 místech → spor s tím, že není řez na 2 vrcholech

→ musí být napojen aspoň na 3 místech

aspoň 2 spojení v jedné části



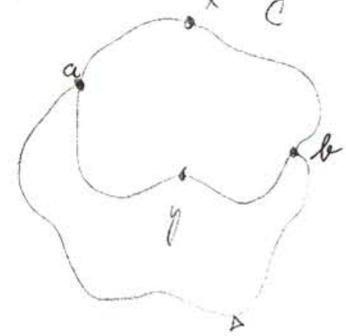


vznikne lepší kružnice

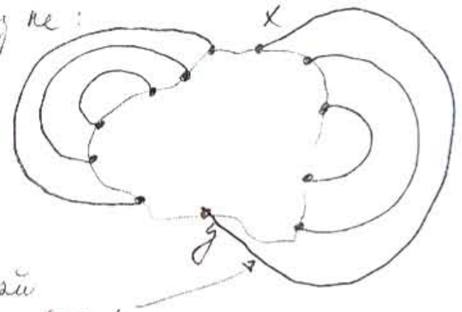
spor

2) vně leží aspoň 1 hrana, kt. spojuje vrcholy z opačných půlek

kružnice C_x C



kdyby ne:

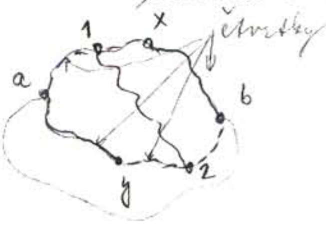


mohu přemalovat
"vnitřní" celý graf i s vnitřkem v rovině
$\to$ spor
právě hrana tomu brání

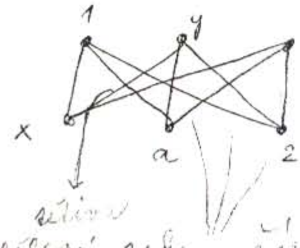
vevnitřku kružnice musí být něco co brání namalovat vnitřkem uvnitř

4 případy:

i) nechť ex. cesta spojující vnitřky protilehlých čtvrtek, která má vnitřní vrcholy uvnitř oblasti ohraničené kružnicí C.

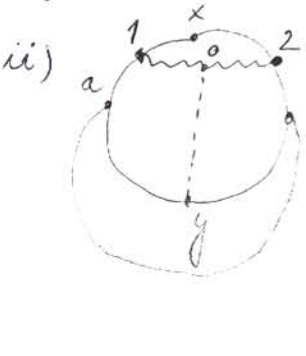


z toho plyne, že G obsahuje dělení $K_{3,3}$



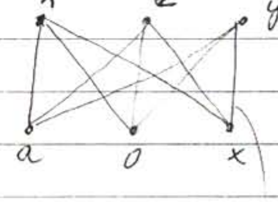
kdyby to bylo jen dělení, pak čáry nejsou hrany
kdyby tam byl vrchol, musí z něj vést ještě další hrana, když tu hranu umažu, pořád tam bude dělení $K_{3,3}$ $\to$ neplanarita
spor s G - min. nepl. graf
tzn. žádný jiný vrchol tam být nemůže
čáry jsou přímo hrany

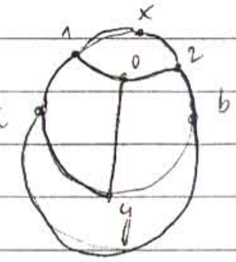
ii)



vedou ze sousedních čtvrtek
z cesty musí jistě ex. odbočka do y
kdyby ne: a,b hranu strčím dovnitř a vně domaluji hranu x,y $\to$ spor

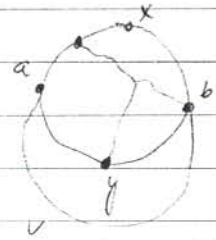
ukázat, že sám je dělení $K_{3,3}$





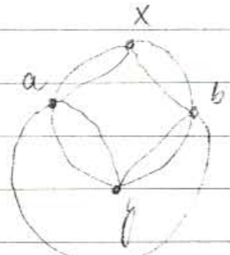
nemůže nastat, protože podrozdělení $K_{3,3}$ vůbec nevyužilo čtverku $(y \to b)$, ubereme, stále neplanární spor s tím, že byl min. neplanární

iii)

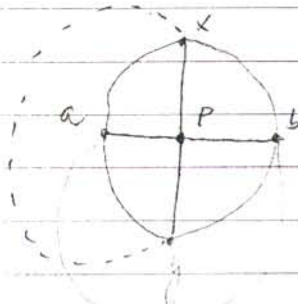


stejné jako ii)
„2" splyne s „b"

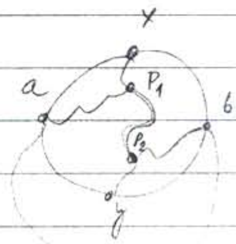
iv) t žádné vnitřky nevedou cesty napojeno jen na a, b, x, y



musí tedy napojeno na t vrcholy
jinak může dát tětivu



cesty se protínají v 1 vrcholu nebo ve více



↓

graf obsahuje dělení K_5
z každého do každého
vede cesta (nezapomenout
na obetranou tětivu)
nemá už další vrchol,
$\delta \geq 3$ → ubráním
neplan. → spor

↓ K_3

stejné...

19.5.2005

zk: A - ústně, B - písemka ; internet → příklady

termíny: I. týden písemka $7.6. : 9^{30}$; ústně $7.6.$ a $8.6.$ 14^{00}

II. týden -//- $14.6. : 9^{30}$; $14.6 : 14^{00}$; $16.6. : 9^{30}$

III. $21.6. : 9^{30}$; $21.6. : 14^{00}$, $23.6. : 14^{00}$

IV. $28.6. : 9^{30}$; $28.6. : 14^{00}$, $30.6. : 14^{00}$

5.9. - 23.9. ... 2x zk

NUTNÉ SE PŘEDEM <u>PŘIHLÁSIT</u> pelantova@km1.fjfi.cvut.cz

// "emailem to mám nejradši"

// předtermín: 3.6. 10^{00}

opáčko lemma: G minimální nepl. graf s $\delta \geq 3$. Pak $G = K_5$ nebo $K_{3,3}$

věta (Kuratovského) G je planární $\Leftrightarrow$ neobsahuje dělení $K_{3,3}$ či K_5

$\Rightarrow$ dokázáno

$\Leftarrow$ $B \Leftarrow A$; $\neg A \Leftarrow \neg B$ když G není plan $\Rightarrow$ obsahuje dělení $K_{3,3}$ nebo K_5

najdeme podgraf G' grafu G tak, aby G' byl min. neplan.

G' nemá vrcholy stupně 0 ani 1

/* inverze k dělení */ $x \overset{z}{\frown} y \Rightarrow x — y$

zbavíme se vrcholů stupně 2 : G' inverzí k dělení hrany, vznikne G'' ... vrcholy stupně ≥ 3

G'' je K_5 nebo $K_{3,3}$; G' je dělení $G'' = \begin{cases} K_5 \\ K_{3,3} \end{cases}$ ∎

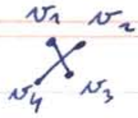
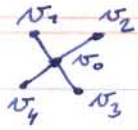
def.: Nechť G je obyčejný graf ($G = (V, E)$). <u>Minimální</u> počet dvojic hran, které se při namalování G do roviny kříží značíme $cr(G)$.

pozn.: • $cr(G) = 0 \Leftrightarrow G$ je planární

• dvojice hran: ; tj. ne , nahradím

ne , nahradím

ne

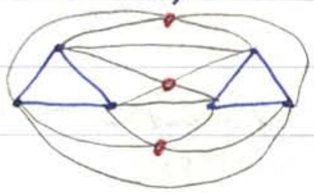
křížení  nahradím  → planární $\#V += cr(G)$

$\#E += 2cr(G)$

planární: počet hran ≤ 3.počet vrcholů − 6

nový pl.: $\#E + 2cr(G) \le 3\#V + 3cr(G) - 6 \Rightarrow \underbrace{cr(G) \ge \#E - 3\#V + 6}_{\text{věta}}$

př.: K_6 $\#V = 6;\ \#E = \binom{6}{2} = 15;\ cr(G) \ge 15 - 3.6 + 6 = 3$



• vrchol

• křížení

Erdős: $\exists c: cr(G) \ge c.\frac{m^3}{n^2}$, $m = \#E$, $n = \#V$

věta: Když $m \ge 4n \Rightarrow cr(G) \ge \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}$

dk: $G=(V,E)$, pravd. $p \in \langle 0,1\rangle$, namalování s min. počtem křížení; za každý vrchol $v \in V$ se rozhodneme s pravd. p (nezávisle), zda $v \in S$; uvažujeme podgrafu grafu G indukovaný mn. S, ten namalujeme do roviny, spočítáme počet křížení X_p

$X_p \overset{\text{věta}}{\ge} m_p - 3n_p + 6$

// počet hran, vrcholů v indukovaném grafu

$E(X_p) \ge E(m_p) - 3E(n_p) + 6$; zavedu $Y_e = \langle {}^0_1$ e $^{\text{je}}_{\text{není}}$ v G

$E(n_p) = n.p$; $E(m_p) = \sum_{e \in E} \underbrace{E(Y_e)}_{} = m.p^2$

pravd. (oba konce v S) . 1 + (ne) . 0

$E(X_p) = p^4 . cr(E)$ // p^4... všechny 4 … se musely dostat do S

$p^4 cr(G) \ge mp^2 - 3np$ // 6tku velkoryse nechám být

$p = \frac{4n}{m}$ // má podmínka, tak

$p^3 cr(G) \ge mp - 3n$

$cr(G) \ge \frac{mp - 3n}{p^3} = \frac{4n - 3n}{(\frac{4n}{m})^3} = \frac{n}{4^3 n^3} m^3 = \frac{m^3}{64 n^2}$

Spektrum grafu

spektrum grafu = spektrum adjacenční matice grafu

$A \in \{0,1\}^{n\times n}$ $A_{ij} = \begin{cases} 0 & \{i,j\} \notin E \\ 1 & \in \end{cases}$; $n = \#V$; symetrická ⇒ spektrum reálné, diagonizovatelná $A = P^{-1}DP$; $0 = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \mathrm{tr} A = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0}$ [1];

A^2; $\mathrm{tr} A^2 = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}^2 = (*)$ A_{ii}^2 = součet jedniček v i-tém řádku $A = d(i)$

$$(*) = \sum_{v\in V} d(v) = 2\#E = (\#)$$

$A^2 = P^{-1}D^2P \Rightarrow (\#) = \boxed{2\#E = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$ [2]

uspořádám spektrum $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \stackrel{\text{ozn}}{=} \Lambda$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ tvoří ON bázi // $\vec{x}_i$ odpovídá λ_i

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$ // α_i ... Fourier. koef.

(std) skal. součin: $\sum \alpha_i\beta_i = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)(\beta_1,\dots,\beta_n) = \vec{y}^T\cdot\vec{x}$

ON báze: $\vec{x}_j^T x_i = 0$ $i \ne j$; $\% = 1$ $i = j$

$\vec{x}_j^T\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_j^T\vec{x}_i = \alpha_j$

Tvrzení: $\Lambda = \max_{\|x\|=1} x^TAx$ // funkcionála $\|A\| = \sup \frac{(Ax,x)}{(x,x)}$

dk: vezmu $x: \|x\|=1$; $x^TAx = \sum_{j=1}^{n} (\underbrace{x_j^Tx}_{\text{číslo}}) x_j^T A \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{x_i^T x}_{\text{číslo}}) x_i =$ $= \lambda_i x_i$ $= \delta_{ij}$

$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\le\Lambda} (x_i^Tx)^2 \le \Lambda \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i^T, x)^2}_{\text{koef. v ON bázi na druhou}} = (\$)$ → Parcevalova rovnost: $= \|x\|^2$

$(\$) = \|x\|^2\Lambda = \Lambda$; tj. $x^TAx \le \Lambda$ $\forall \|x\| = 1$

rovnost nastává pro $x = x_n$ → vl. v. k Λ, $\|x_n\| = 1$

$x_n^TAx_n = \Lambda x_n^Tx_n = \Lambda$ // maxima se nabývá např. na vl. v.

→ chci ukázat "jen na vl. v."

věta (Perron-Frobeniova): $A \ge 0$, A je nerozložitelná.
Pak $\rho(A) = \Lambda = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$

vl. č. má násobnost 1 a vl. vektor příslušný k Λ má všechny složky kladné, dále... je to jediný takový v.

věta (slabší odvar) $A \ge 0$, $\Lambda = \max\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(A)\}$, vl. v. k Λ lze volit s nezápornými složkami // A mohla být rozlož.

def: Mat. A je rozložitelná ⇔ ∃ perm. matice P, že

$P^TAP = \begin{pmatrix} \square & \square \\ 0 & \square \end{pmatrix}$, jinak nerozložitelná.

naše matice jsou symetrické $A = A^T \Rightarrow (P^TAP)^T = P^TA^TP = P^TAP$

tj. $P^TAP = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$ .... rozložitelná

grafy $\rightarrow$ G má 2+komponenty ; tj. A je nerozložitelná $\Leftrightarrow$ G souvislý

$\Lambda = \max_{\|x\|=1} x^TAx$, když G je souvislý, A je jeho matice, pak rovnost nastává pouze pro $x =$ vl. v. k. Λ

věta: $\frac{2m}{n} \leq \Lambda \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$, kde $n = \#V$, $m = \#E$

dk: 1) $\Lambda = \max_{\|x\|=1} x^TAx \geq \left| \text{dosadím } \vec{x} := \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \right| \frac{1}{n}(1,\dots,1)A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots \\ d_n\end{pmatrix}$ $\sum d_i$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{2m}{n}$$

2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} = -\Lambda$ z $\boxed{1}$

$(\%) \geq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right)^2 = (-\Lambda)^2 = \Lambda^2$

konvexnost, $f(x) = x^2$: $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)$

$\left| \begin{matrix}\text{dosadím} \\ x_1,\dots,x_{n-1} := \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\end{matrix} \right|$ $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^2 \geq \frac{1}{(n-1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)^2$

$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)^2$

$\geq (\%)$ $(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^2 = (n-1)(2m - \Lambda^2)$

$(n-1)2m \geq \Lambda^2(1+n-1) \Rightarrow (n-1)2m \geq \Lambda^2 n \Rightarrow \frac{(n-1)2m}{n} \geq \Lambda^2$

rovnosti: // $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ ... v každém řádku A je λ jedniček

// $\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \dots \pm \lambda_{n-1} + \Lambda = 0$; tj. $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = -\Lambda\frac{1}{n-1}$

// $(n-1)\Lambda^2\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 + \Lambda^2 = 2m$ ... nedokončené.

K_n ... jaké je spektrum

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ // $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A)$

$-1 \in \sigma(A)$, násobnost $\lambda = -1$ je $n-1$

max. vl. č.: $(n-1)\cdot(-1) + \Lambda = 0$; $\Lambda = n-1 \in \sigma(A)$

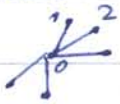
vl. č. má násobnost $(n-1)$

$\begin{matrix} -\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -\lambda & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & -\lambda & \vdots \\ \vdots & & & \end{matrix}$ // po odečtení λ musím mít stejné řádky

// kdyžby v řádku bylo 01, byly by to i v sloupci

// jsou to buď samé jedničky nebo nuly

24.5.2005

S_k  matice $(k+1)\times(k+1)$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1\,1 \dots 1 \\ 1 & \\ 1 & \Theta \\ \vdots & \\ 1 & \end{pmatrix}$ $h(A) = 2$

tj. 0 je $k+1-2$ $(=k-1)$ násobné vl. číslo

$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 0$ zbylé vl. č. $\quad \Lambda, -\Lambda$

$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^2 = 2\#E = 2k = \Lambda^2 + (-\Lambda)^2 \Rightarrow \Lambda = \sqrt{k}$

pozn.: spektrum G, kt. má komponenty $G_1, \dots, G_r$

$\begin{pmatrix} \boxed{A_{G_1}} & & \\ & \boxed{A_{G_2}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} \boxed{A} & \Theta \\ \Theta & \boxed{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hline \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sigma(G) = \bigcup_{i=1}^{r} \sigma(G_i)$

věta: G' je podgraf $G \Rightarrow \Lambda' \leq \Lambda$ | $\Lambda = \max_{\|x\|=1} x^T A_G x$
počet složek x = počet vrcholů G

dk: $\Lambda' \overset{\|x'\|=1}{=} x'^T A_{G'} x' = (x')^T A_{G'} (x') =$

$= (x', \underset{\circ}{\Theta}) \underbrace{\begin{pmatrix} A_{G'} & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \hline \Theta \end{pmatrix}}_{s}$ $s \dots$ rozměr matice A_G $\quad \leq (x', \Theta)^T A_G \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ \Theta \end{pmatrix}}_{\|\cdot\|=1} \leq (*)$

$x' \geq 0$ všechny složky nezáporné

$(*) = \max_{\|x\|=1} x^T A_G x = \Lambda$

věta: $\max(\delta, \sqrt{\Delta}) \overset{(1)}{\leq} \Lambda \overset{(2)}{\leq} \Delta$

dk: (1)(A) $\Lambda = \max_{\|x\|=1} x^T A x \geq \Big|_{\substack{x = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T \\ n = \#V}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}(1,1,\dots,1) A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots$ $/* \; \Lambda \geq \frac{2m}{n} = \frac{\sum d_i}{n} \geq \frac{n\delta}{n} = \delta$

Λ je větší než minimální stupeň

(1)(B) $\Lambda \geq \sqrt{\Delta}$; v G vezmu podgraf  $d(v) = \Delta$
má $\Lambda' = \sqrt{\Delta}$

(2) k Λ ex. nezáporný vl. v. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, vezmu tak, aby $\max\{x_1, \dots, x_n\} = 1 = x_i$

tj. $\Lambda = \Lambda x_i = (\Lambda x)_i = (Ax)_i \leq \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)_i = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}_i = d_i \leq \Delta$

i-tá složka vektoru

pozn.: ? kdy $\Lambda = \Delta$? $\quad x_i = 1$

aby rovnost: $d_i = \Delta$

i-tý řádek $\quad A_{i\cdot} \quad \begin{pmatrix} 10011\cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{———} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

sousedi i mají přísl. složky vl.v. jedničky, tj

ale pak i sousedi souseda jsou jedničky

... kam až dojdu → celá komponenta mají stupeň Δ ← je Δ-regulární

věta: G je souvislý graf a $\Lambda = \Delta \Rightarrow$ G je Δ-regulární

$\Lambda = \Delta \Leftarrow$ G je Δ-regulární

dk: $\Rightarrow$ ... už máme

$\Leftarrow$ ... každý řádek A_G má Δ jedniček $\quad (A_G)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \\ \Delta \\ \vdots \\ \Delta \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

→ Δ je vl.č. $\quad \Delta \leq \Lambda$; $\Delta \geq \Lambda \Rightarrow \Delta = \Lambda$

důsledek: G je Δ-regulární souvislý graf se spektrem
$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \overset{(\#)}{\leq} \lambda_n = \Lambda^{(\$)}$. Pak $\overline{G}$ má spektrum
$-1-\lambda_1, -1-\lambda_2, \dots, -1-\lambda_{n-1}, n-1-\Lambda \qquad // \; n = \#V$

(#) je dokonce $<$ a (\$) $\Lambda = \Delta$

dk: $A_G + A_{\overline{G}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ & & \cdots & & \end{pmatrix}}_{J \text{... matice samých jedniček}} - I$

vezmu $\vec{x}_i$, $i \leq n-1$ vl.v. k λ_i, $i \leq n-1$; $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$

$\underbrace{A(\vec{x}_i)}_{(a)} = \underbrace{\lambda_i \vec{x}_i}_{(b)}$; sečtu všechny složky $\underbrace{\lambda_i \sum_{k=1}^{n} x^{(k)}}_{(b)}$

(a): $\begin{pmatrix} a_{11}x^{(1)} + a_{12}x^{(2)} + \dots \\ a_{21}x^{(1)} + a_{22}x^{(2)} + \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$ dá $\Delta x^{(1)} + \Delta x^{(2)} + \dots + \Delta x^{(n)}$ // a platí =

tj. $\Delta \sum_{k=1}^{n} x^{(k)} = \lambda_i \sum_{k=1}^{n} x^{(k)}$ a $\Delta \neq \lambda_i \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x^{(k)}$ vl.v. k $\lambda_i < \Lambda$
tak suma je rovna nule

pak $A_{\overline{G}} = J - I - A_G$ // aplikuji $\vec{x}$ vl.v. k $\lambda_i < \Lambda$

$A_{\overline{G}}\vec{x} = \theta - \vec{x} - \lambda_i \vec{x} = (-1-\lambda_i)\vec{x}$

$\overline{\Delta} = n - 1 - \Delta$

věta: 1) Nechť G je souvislý graf. G je bipartitní ⇔ $-\Lambda$ je ve spektru
2) G je bipartitní ⇔ spektrum je symetrické kolem 0
v četné násobnosti

dk: G je bip. ⇒ spektrum symetrické
... velký kus důkazu jsem propásl .... studijní !!

1) ⇐: $\Lambda = |-\Lambda| = |-\Lambda\, w^T w| = $ w je vl. v. k $-\Lambda$, $\|w\| = 1$

$(w_1, \dots, w_n)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ $\quad \to |w^T \underbrace{Aw}_{=\Lambda w}| = (w_1, \dots, w_n)\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} w_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} w_j \\ \vdots \end{pmatrix} = (\#)$

$(\#) = |\overbrace{\sum_{ij} a_{ij} w_i w_j}^{<0}| \leq \sum_{j,i=1}^n a_{ij} |w_i||w_j| = \underbrace{(|w_1|, |w_2|, \dots)}_{\substack{\text{norma}=1 \\ \text{vl. v. k } \Lambda \\ w_i \neq 0\ \forall i}} A \begin{pmatrix} |w_1| \\ |w_2| \\ \vdots \\ |w_n| \end{pmatrix} \leq$

trojúhelníková nerovnost

$\leq \max_{\|x\|=1} x^T A x = \Lambda$

$V_1 = \{ i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid w_i > 0 \}$ $\quad$ / $V = V_1 \cup V_2$

$V_2 = \{ i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid w_i < 0 \}$

vím, že $a_{ij} w_i w_j \leq 0\ \forall ij$ tj. když $\{ij\} \in E \Leftrightarrow a_{ij} = 1$ $\quad w_i w_j \leq 0 \Rightarrow$
$\xRightarrow{w_i \neq 0} w_i w_j < 0$

⇒ hrany jen mezi V_1 a V_2 ⇒ V je bipartitní

2) ⇐: $\begin{pmatrix} \boxed{A_{G_1}} & & \\ & \boxed{A_{G_2}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

spektrum je sjednocení spekter $G_1, \dots, G_n$
$A_{G_i} \geq 0$ max. vl. č. A_{G_i} je maximální i v abs. hodnotě Λ_i

vezmu $-\Lambda$ max. vl. č. A_G ⇒ ∃ komponenta, že $-\Lambda$ je max. vl. č. A_{G_i}
$\begin{pmatrix} \square & & \\ & \boxed{A_{G_i}} & \\ & & \square \end{pmatrix}$ → $-\Lambda$ pak tam leží i Λ; komponenta je bipartitní →
víme už, že taková má symetrické spektrum

/* je ve spektru ⇒ bipart. $\rho(A)$ $\rho(A) \cdot e^{i\varphi} = \sigma$; ∃D, na diag $|d_i| = 1$
$AD = -DA$ // pokračování Peron-Frobeniovy věty

*/

věta: G je souvislý graf, počet různých vl. č. matice grafu G je $> \max_{v,u \in V} d(v,u)$

dk: K_n .... 2 různá vl. čísla $-1, n-1$

S_k ... max ~~vl.~~ č. vzdálenost 2 : $0, \sqrt{k}, -\sqrt{k}$

$p(t) = \det |A - tI|$ $p(A) = \theta$

// pro ∀ matici ∃ min. polynom q s vlastností $q(A) = \theta$

$A = P^{-1} D P$ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots \lambda_k \ldots \lambda_k \end{pmatrix}$ k = počet různých vl. č. matice A

$(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \ldots (D - \lambda_k I) = \theta$ // θ = nul. matice

$\begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & & \\ & \lambda_2 \ldots \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & 0 \ldots 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} \ddots & \\ & 0 \ldots 0 \end{pmatrix} = \theta$ protože

$P^{-1}(\%)P \cdot P^{-1}(\%)P \cdot \ldots P^{-1}(\%)P = \theta$

$(A - \lambda_1 I) \cdot (A - \lambda_2 I) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_k I) = \theta$

$A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = \theta$ // k je počet

sporem: $k \leq \max_{v,u \in V} d(v,u)$ $\exists i,j$ že $d(i,j) = k$ // $i \neq j$

A^s_{ij} = počet sledů délky s z vrcholu i do vrcholu j

spor: počet sledů A^k nalevo není θ

ŠLUS

TS: 20 otázek grafy; 10 komb; mailem přihlásit

skombinuje se 2 + 1 otázek

4 části

tj. GRAF { 1) a, b, c } def, věty, stru důkazu; d - důkaz těžšího kalibru

2) a, b, c; d

KOMB { 3)

na ③ 1a - 1c + 2a + 2c + 3; + 1d na ②; + 1d + 2d na ①