1. přednáška + 2. přednáška

Poznámka: (značení)

Buďte $n \in \mathbb{N}$, V konečná množina. Potom zavádíme následující značení.

i) $|V| =: \# V$

ii) $\binom{V}{n} := \{A \subset V \mid \# A = n\}$

Při tomto značení platí: $\# \binom{V}{n} = \binom{\# V}{n}$

Definice: Graf, vrcholy, hrany

Buďte V konečná množina, $E \subset \binom{V}{2}$.
Potom (neorientovaným) grafem rozumíme uspořádanou dvojici $G := (V, E)$.
V nazýváme množinou vrcholů, E nazýváme množinou hran.

Poznámka: (značení)

Buďte $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ grafy, $v \in V$, $e \in E$, potom definujeme:

i) $G \cup H := (V \cup U, E \cup F)$

ii) $G \setminus F := (V, E \setminus F)$, pokud $F \subset E$

iii) $G \setminus U := (V \setminus U, E \cap \binom{V \setminus U}{2})$

iv) $v := \{v\}$, $e := \{e\}$

Počet všech grafů na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech je $2^{\binom{n}{2}}$.

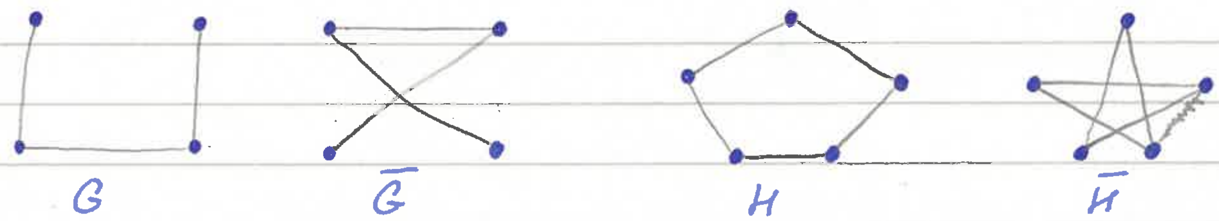
Definice: Izomorfismus grafů

Buďte $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ grafy.
Řekneme, že graf G je isomorfní s grafem H ($G \sim H$), jestliže existuje bijekce $\pi : V \to U$, taková, že platí:

$$\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \iff \{\pi(u), \pi(v)\} \in F$$

Poznámka:
Grafy jsou isomorfní, pokud jsou stejné až na označení svých vrcholů.

Definice: Doplněk, samokomplementární graf
Nechť $G=(V,E)$ je graf.
Potom jeho doplňkem rozumíme graf $\bar{G} := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.
Pokud platí, že $\bar{G} \sim G$, říkáme, že G je samokomplementární graf.
$(\bar{\bar{G}} = G)$



Poznámka:
Uvažujme graf $G=(V,E)$ na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech.
Označme $m := \#E$, jestliže $G \sim \bar{G}$, potom musí platit:

$$m = \binom{n}{2} - m \rightarrow m = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4} \in \mathbb{N}_0$$

$\rightarrow$ nejmenší ~~gp~~ samokomplementární graf existuje na 4 vrcholech.

Definice: Stupeň vrcholu
Buďte $G=(V,E)$ graf, $v \in V$.
Potom stupněm vrcholu $v \in V$ rozumíme číslo $d_G(v) := \#\{u \in V \mid \{u,v\} \in E\}$.
Dále definujeme:

i) Minimální stupeň grafu G: $\delta(G) := \min_{v \in V} d_G(v)$

ii) Maximální stupeň grafu G: $\Delta(G) := \max_{v \in V} d_G(v)$

iii) Průměrný stupeň grafu G: $\rho(G) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i)$

Věta:
Pro každý graf $G=(V,E)$ platí: $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E$.

Důkaz:
Každá hrana $e=\{u,v\}$ přispěje jedničkou ke stupni vrcholů u,v.

Důsledek:
Součet stupňů $\sum_{v \in V} d_G(v)$ je vždy sudý!

Definice: Skóre
Posloupnost čísel $(d_1,\dots,d_n)$ nazveme skóre, existuje-li graf $G=(V,E)$ na vrcholech $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ takový, že:

$$\forall i: d_i = d_G(v_i).$$

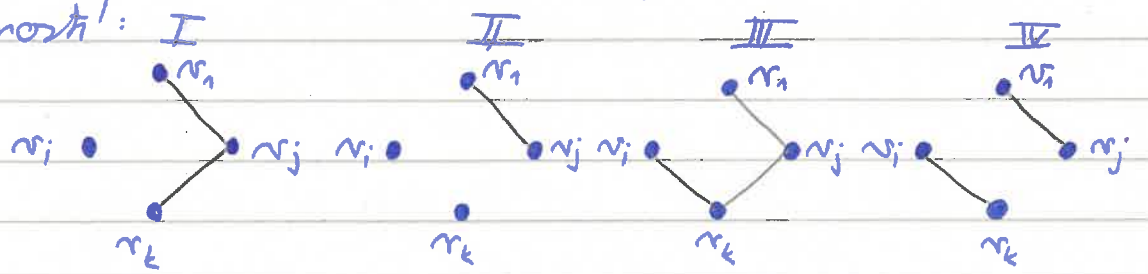
Věta:
Nechť $(d_1,\dots,d_n)$ je n-tice nezáporných čísel: $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.
Potom $(d_1,\dots,d_n)$ je skóre $\Leftrightarrow$ $(d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ je skóre.

Důkaz:
$\Leftarrow$: Nechť existuje graf se skóre $(d_2-1,\dots,d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2},\dots,d_n)$.
K tomuto grafu přidáme vrchol v_1 a spojíme jej s ~~vrcholy~~ prvními d_1 vrcholy.

$\Rightarrow$: Nechť existuje graf se skóre $(d_1,\dots,d_n)$.
Potom nastane jedna z následujících možností:
i) Hrany z vrcholu v_1 vedou právě do následujících d_1 vrcholů.
Pak stačí tento vrchol odebrat.

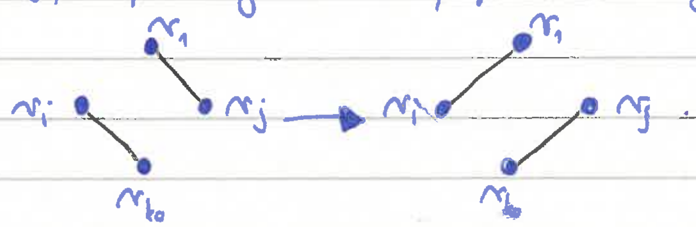
ii) Existuje $i \in \{2,3,\dots,d_1+1\}: \{v_1,v_i\} \notin E$.
To znamená, že existuje $j \in \{d_1+2,\dots,n\}: \{v_1,v_j\} \in E$.

Pro každé $k \notin \{1, i, j\}$ pak nastane jedna z následujících možností:



Přičemž alespoň pro jedno k nastane možnost IV.
Kdyby totiž nastávaly pouze možnosti I, II a III přispěl by každý další vrchol v_k ke stupni $d_j = d_G(v_j)$ tolik jako ke stupni $d_i = d_G(v_i)$.
Protože však $\{v_1, v_j\} \in E \wedge \{v_1, v_i\} \notin E$, platilo by $d_i < d_j$, což je spor.

Vezměme tedy takové k_0, že pro něj nastává případ IV a vyrobíme nyní nový graf takto:



Tento graf má stejné skóre jako původní, ale z vrcholu v_1 vede více hran do vrcholů $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$.
Potom buď nastává případ i), nebo opět nastane ii) a postup opakujeme.

Věta:
Buď $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}_0^n$: $d_1 \geq \dots \geq d_n$.
Potom je-li $(d_1, \dots, d_n)$ skóre, tak pro každé $i \in \hat{n}$ platí:

$$\sum_{k=1}^{i} d_k \leq i(i-1) + \sum_{k=i+1}^{n} \min\{i, d_k\}$$

Důkaz:
Uvažujme graf G na vrcholech $V = \{1, \dots, n\}$ odpovídající danému skóre.
Pro pevné $i \in \hat{n}$ diskutujme, které hrany přispívají do součtu $\sum_{k=1}^{i} d_k$.

i) Hrany mezi vrcholy $\{1, \dots, i\}$ přispívají do sumy dvojkou.
Proto maximální součet stupňů dosažený pouze pomocí těchto hran je $2\binom{i}{2} = i(i-1)$.

ii) Hrany mezi vrcholy $u \in \{1, \dots, i\}$ a $v \in \{i+1, \dots, n\}$ přispívají do sumy jedničkou.
Přitom z každého z vrcholů $v \in \{i+1, \dots, n\}$ nemůže do prvních i vrcholů vést více hran, než i, ale ani více, než $d(v)$.

$\rightarrow \sum_{k=1}^{i} d_k \leq i(i-1) + \sum_{k=i+1}^{n} \min\{i, d_k\}$

Poznámka:
Pokud navíc je $\sum_{i=1}^{n} d_i$ sudé číslo, platí ve větě ekvivalence

3. přednáška

Definice: Sled, cesta, cyklus, kružnice

Nechť $G=(V,E)$ je graf, $(v_i)_{i=0}^{n} \subset V$ je posloupnost vrcholů.
Řekneme, že $(v_i)_{i=1}^{n}$ je:

i) sled (walk), pokud $\forall i \in \hat{n}: \{v_{i-1}, v_i\} \in E$.

ii) cesta (path), pokud je to sled a $\forall i,j \in \hat{k}_0: i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$.

iii) cyklus (closed walk), pokud je to sled a $v_0 = v_k$.

iv) kružnice (cycle), pokud je to cyklus a $\forall i,j \in \hat{k}: v_i \neq v_j \Rightarrow i = j$.

Definice: Spojené vrcholy

Řekneme, že vrcholy $u, v \in V$ v grafu $G=(V,E)$ jsou spojeny, jestliže v G existuje sled $(v_i)_{i=0}^{m}$ tak, že $v_0 = u \wedge v_k = v$.

Poznámka:

- Délka sledu / cesty / cyklu / kružnice $(v_i)_{i=1}^{n}$ je n.
- Relace „být spojený" je ekvivalence.

Definice: Podgraf

Nechť $G=(V,E)$ je graf.
Řekneme, že $H=(U,F)$ je podgraf G, pokud:
i) $U \subseteq V$
ii) $F \subset E \cap \binom{U}{2}$

Podgraf grafu G je indukovaný množinou U, jestliže $F = E \cap \binom{U}{2}$.
Indukovaný (pod)graf se značí $G[U]$.

Definice: Komponenta grafu

Komponenta grafu $G=(V,E)$ je podgraf $G[V_i]$, kde V_i je třída ekvivalence podle relace „být spojený".

Definice: Souvislý graf

Graf, který má pouze jednu komponentu nazveme souvislý.
$S_n :=$ počet souvislých grafů na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech.

Věta:

Nechť $n \in \mathbb{N}$, potom platí:

$$n\, 2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_k\, k\, 2^{\binom{n-k}{2}}$$

Důkaz:

Označme $M :=$ počet grafů na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech, z nichž jeden obarvíme načerveno.

i) $M = n \cdot 2^{\binom{n}{2}}$

ii) $\sum_{k=1}^{n}$ # grafů na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech tak, že červený vrchol je v komponentě velikosti $k \in \mathbb{N}$

tj: $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot S_k \cdot k \cdot 2^{\binom{n-k}{2}}$

počet způsobů jak vybrat k vrcholů

počet souvislých grafů

k červených vrcholů (počet možností)

zbytek grafu

Definice: Adjacenční matice

Adjacenční matice grafu $G=(V,E)$ s $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ je matice $A_G \in \{0,1\}^{n,n}$, definovaná jako

$$[A_G]_{ij} := \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Věta:

Nechť A_G je adjacenční matice $G=(\{v_1,\dots,v_n\},E)$, $k \in \mathbb{N}$.
Potom $[A_G^k]_{ij} = \#$ sledů s konci v_i, v_j délky k v G.

Důkaz: (indukcí na k)

$k=1$ ✓ (definice)

$k-1 \to k$: $[A_G^k]_{ij} = [A_G^{k-1} A_G]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A_G^{k-1}]_{ik} [A_G]_{kj}$.

Poznámka:

- maximální délka cesty v grafu na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech je $n-1$
- v G je mezi v_i a v_j cesta $\Leftrightarrow$ v G je mezi v_i a v_j sled

Věta:

Graf G na $n \in \mathbb{N}$ vrcholech je souvislý $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} A_G^k$ je pozitivní matice

Důkaz:

G je souvislý $\Leftrightarrow \forall v_i, v_j \in V(G)$ existuje sled mezi v_i a v_j

$\Leftrightarrow$ existuje cesta mezi v_i a v_j délky $l \leq n-1$

$\Leftrightarrow [A^l]_{ij} > 0$

Definice: Bi-partitní graf

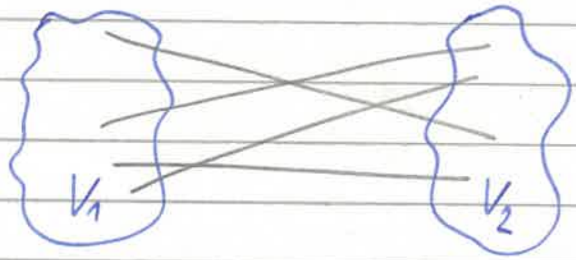
Řekneme, že $G = (V,E)$ je bi-partitní, pokud existuje rozklad V na V_1 a V_2 tak, že:

i) $V_1 \cup V_2 = V$

ii) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

iii) $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$

a platí $\binom{V_1}{2} \cap E = \binom{V_2}{2} \cap E = \emptyset$.



Věta:

Pro ~~gp~~ bi-partitní graf G existuje simultánní permutace řádků a sloupců A_G, tak, že:

$$A_G = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{k} & \overbrace{\quad}^{n-k} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & \mathbb{B} \\ \hline \mathbb{B}' & \mathbb{O} \end{array}\right) \end{array}.$$

4. přednáška

Věta:
Graf je bi-partitní <=> neobsahuje žádnou kružnici liché délky.

Důkaz:

=>: hrany vedou pouze z V_1 do V_2 a tedy sledy střídají vrcholy z V_1 a V_2. Abychom uzavřeli kružnici potřebujeme sudý počet hran

<=: i) Nechť G je souvislý:
Uvažujme libovolný pevně zvolený vrchol $u \in V$ a definuji:

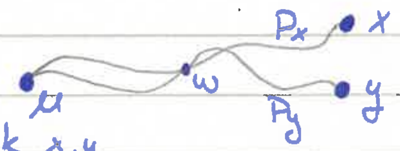
$$V_1 := \{v \in V \mid \text{nejkratší cesta z } u \text{ do } v \text{ v } G \text{ má lichou délku}\}$$

$$V_2 := \{v \in V \mid \text{nejkratší cesta z } u \text{ do } v \text{ v } G \text{ má sudou délku}\}$$

Ukážeme, že V_1, V_2 jsou bi-partitní rozklady V:

- $V_2 \neq \emptyset \Leftarrow u \in V_2$
- $V_1 \neq \emptyset \Leftarrow (G \text{ souvislý} \Rightarrow \exists \{u, w\} \in E \Rightarrow w \in V_1)$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (z definice)
- $V_1 \cup V_2 = V$ (plyne ze souvislosti)

Musíme ukázat, že $\binom{V_1}{2} \cap E = \binom{V_2}{2} \cap E = \emptyset$
tj.: neexistuje hrana s oběma konci ve V_1 (V_2):
Nechť $x, y \in V_1$: $\{x, y\} \in E$:

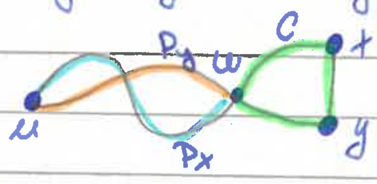


$w :=$ průsečík P_x a P_y nejblíže k x, y

Značení: uPw := úsek cesty P začínající vrcholem u a končící w

- $|uP_xw| = |uP_yw|$

(kdyby $|uP_xw| > |uP_yw|$, potom by uP_ywP_xx by byla kratší cestou z u do x, než P_x)



- C je kružnice v G ⇐ z volby w
- $|C| = |P_x| - |uP_xw| + |P_y| - |uP_yw| + 1 = \overbrace{\underbrace{|P_x|}_{\text{liché}} + \underbrace{|P_y|}_{\text{liché}} - \underbrace{2|uP_xw|}_{\text{sudé}} + 1}^{\text{liché}}$, spor

ii) G má komponenty $G^{(1)}, \dots, G^{(n)}$, $n \geq 2$.

Pro každou komponentu $G^{(i)}$ najdeme $V_1^{(i)}$ a $V_2^{(i)}$ jako v případě i).

Hledané V_1, V_2 budou $V_1 = \bigcup_{i=1}^{n} V_1^{(i)}$, $V_2 = \bigcup_{i=1}^{n} V_2^{(i)}$

Definice: Les, strom

Graf, který neobsahuje kružnici nazveme les.
Souvislý les nazveme strom.

Věta:

Následující ~~t~~ tvrzení o grafu $G = (V, E)$ jsou ekvivalentní:

i) G je strom
ii) $\forall u, v \in V$ existuje právě jedna s konci u, v
iii) G je tzv. minimální souvislý $:\Leftrightarrow$ (a) G je souvislý, b) $G \setminus e$ není souvislý pro lib. $e \in E$)
iv) G je tzv. maximální acyklický $:\Leftrightarrow$ (a) G neobsahuje kružnici, b) $\forall x, y \in V, \{x,y\} \notin E : G + \{x,y\}$ obsahuje kružnici)

Důkaz:

i) $\Rightarrow$ ii): Buďte $u, v \in V$ libovolné:
- G je strom $\Rightarrow$ G je souvislý $\Rightarrow$ $\exists$ cesta z u do v
- jednoznačnost:  kružnice (spor)

ii) $\Rightarrow$ iii)
- Mezi libovolnými u, v existuje právě jedna cesta $\Rightarrow$ G je souvislý
- Nechť existuje $e = \{x,y\} \in E$: $G \setminus \{x,y\}$ je souvislý

$\rightarrow$ Mezi x a y existuje cesta, spor (měla být jen jedna ($\{x,y\}$))

Věta: Eulerův vzorec

Nechť $G=(V,E)$ je souvislý graf.
Pak G je strom $\Leftrightarrow \#E = \#V - 1$

Důkaz:

$\Rightarrow$: (úplnou indukcí na $n = \#V$)

- $n = 1$: $\bullet_1$ ✓
- $\{1, \dots, n-1\} \to n$

Buďte G strom na n vrcholech, $e \in E(G)$.
Potom $G \setminus e$ má 2 komponenty (stromy) s k a $n-k$ vrcholy.
Označme komponenty T_1, T_2:

$$\#E(T_1) = \#V(T_1) - 1 \ \wedge\ \#E(T_2) = \#V(T_2) - 1$$

$$\to \#E(G) = \#V(T_1) - 1 + \#V(T_2) - 1 + 1 = \#V(G) - 1$$

$\Leftarrow$:
- G je souvislý $\Rightarrow \forall v \in V: d(v) \geq 1$
- $\#E = \#V - 1$

$$\to \sum_{v \in V} d(v) = 2\#E = 2\#V - 2 \to \exists w \in V(G): d(w) = 1$$

Dále indukcí na počet vrcholů:

- $n = 1$: $\#V = 1 \Rightarrow \#E = 0$ ✓
- $n-1 \sim n$: Uvažujme $G \setminus w$ (kde $d(w) = 1$)

$\to$ zmizel vrchol a hrana $\Rightarrow \#E(G \setminus w) = \#V(G \setminus w) - 1$

zjevně $G \setminus w$ je souvislý $\underbrace{\quad\quad\quad}_{G \setminus w \text{ je strom}}$

$\to$ G je strom ✓

Definice: List

Buďte $T = (V, E)$ strom, $v \in V$.
Řekneme, že $v \in V$ je list, pokud to není kořen a $d(v) = 1$.

5. přednáška

Věta: Cayley

Označme T_n počet stromů na n vrcholech.
Potom $T_n = n^{n-2}$

Důkaz:

1) ~~[illegible]~~

→ ~~[illegible]~~

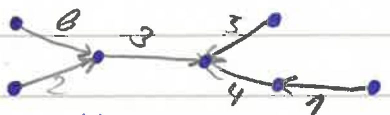
* Multibinomická věta: $(x_1+\dots+x_k)^n = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = n}} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{k} \alpha_j!} x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k}$

Dvojitým počítáním tzv. PoVyKoSů
(postupně vybudovaný kořenový strom)

PoVyKoS $\Leftrightarrow (T, r, \varphi)$: i) $T = (V, E)$ je strom na n vrcholech $(n-1)$ hran
ii) $r \in V$ ... kořen
iii) $\varphi : E \to \{1, 2, \ldots, \#E\}$ bijekce.

stromů, možnost výběru kořene, očíslování hran

1. $T_n \cdot n \cdot (n-1)!$

2. 

• každý krok - přidáme šipku
• kořen (na konci) jediný vrchol (vrchol) ze kterého nevychází šipky

k-tý krok: přidáme k-tou hranu, tedy máme $n-k+1$ komponent
→ přidáme šipku: i) počátek v kořeni některé komponenty
ii) konec v libovolném vrcholu jiné komponenty

možností v k-tém kroku:
• konec šipky: n možností
• pak počátek šipky: $n-k$ možností (jednu z komponent jsme zakázali volbou konce)

• Součet celkem: $\prod_{k=1}^{n-1} n(n-k) = n^{n-1}(n-1)!$

→ $T_n \cdot n(n-1)! = n^{n-1}(n-1)! \to T_n = n^{n-2}$

Poznámka: Isomorfismus (kořenových) stromů

• kořenový isomorfismus $\sim_k$:

$(T_1, r_1) \sim_k (T_2, r_2) \iff$ i) $T_1 \sim T_2$ pomocí bijekce φ

ii) $\varphi(r_1) = r_2$

Definice: Pěstovaný strom

Pěstovaný strom je uspořádaná trojice (T, r, ν), kde:

i) $T = (V, E)$ je strom

ii) $r \in V$ je kořen

iii) ν částečné uspořádání vrcholů

Poznámka: Terminologie

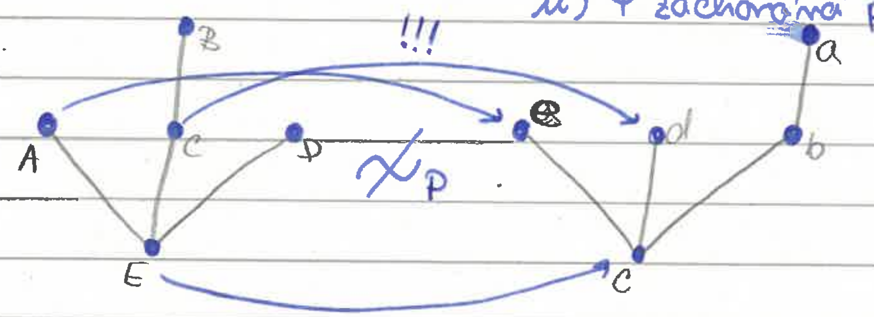
Buď (T, r) kořenový strom.

- Všechny vrcholy z r do $v \in V$ jsou předci v
- Předek $v \in V$, který je danému v ve stromě nejblíže je rodič v
- Vrchol je potomkem svého rodiče

Definice: Isomorfismus pěstovaných stromů

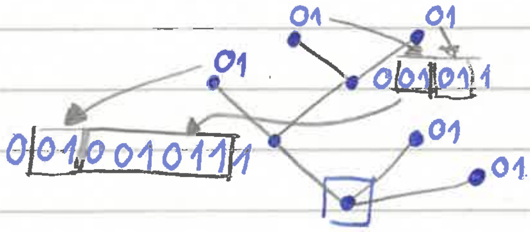
$(T_1, r_1, \varphi_1) \sim_p (T_2, r_2, \varphi_2) \iff$ i) $(T_1, r_1) \sim_k (T_2, r_2)$ pomocí φ

ii) φ zachovává pořadí potomků



Poznámka: Kódování pěstovaného stromu

- každý list dostane kód 01
- mají-li potomci $v_1 \le v_2 \le \dots \le v_k$ vrcholu v kódy $c_1,\dots,c_k$, pak v dostane kód $0c_1c_2\dots c_k1$
- kód kořene je kódem stromu



$C(T) = 0001001011101011$

- Naopak: sekáme kód po prefixech, které mají stejný # nul a jedniček.

Poznámka: Kódování kořenového stromu

- každý list dostane kód 01
- má-li vrchol $v \in V$ potomky $v_1,\dots,v_k$ tak, že pro jejich kódy platí $c_1 \le c_2 \le \dots \le c_k$ při nějakém (pevně zvoleném) uspořádání řetězců, pak kód v bude $0c_1c_2\dots c_k1$
- kód kořene je kódem stromu

- Naopak: sekáme kód po prefixech, které mají stejný # nul a jedniček

Poznámka: Značení

Buďte $G=(V,E)$ graf, $u,v \in V$.
$d(u,v) :=$ délka nejkratší cesty v G s konci u,v.

- vzdálenost u,v

- excentricita $u \in V$ je:
  $ex(u) := \max_{v \in V} d(u,v)$

- centrum grafu $C(G) = \arg\min_{v \in V} ex(v)$

6. přednáška

Tvrzení:
Centrem stromu má jeden nebo dva vrcholy.
Navíc, pokud $\mathcal{C}(T) = \{x,y\}$, pak $\{x,y\} \in E(T)$

Poznámka: Isomorfismus stromů T_1, T_2
i) Najdi centra $\mathcal{C}(T_1)$, $\mathcal{C}(T_2)$
ii) • pokud $\# \mathcal{C}(T_1) \neq \# \mathcal{C}(T_2)$, pak $T_1 \neq T_2$
• pokud $\mathcal{C}(T_1) = \{c_1\} \wedge \mathcal{C}(T_2) = \{c_2\}$, pak $T_1 \sim T_2 \iff (T_1, c_1) \sim_k (T_2, c_2)$
• pokud $\mathcal{C}(T_1) = \{c_1, d_1\} \wedge \mathcal{C}(T_2) = \{c_2, d_2\}$, pak $T_1 \sim T_2 \iff (T_1, c_1) \sim_k (T_2, c_2) \vee$
$\vee (T_1, c_1) \sim_k (T_2, d_2)$

Definice: Kostra grafu (Spanning tree)
Kostra grafu $G = (V,E)$ je strom $T = (V, E')$, kde $E' \subset E$.

Poznámka: Algoritmus hledání kostry
Nechť $e_1, \dots, e_m$ jsou hrany G.
i) Konstruujeme podgrafy $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G$: $V(G_i) = V(G)$, $\forall i \geq 0$
• $G_0 := (V, \emptyset)$
• $E(G_i) = \begin{cases} E(G_{i-1}) \cup \{e_i\}, & \text{pokud přidáním } e_i \text{ do } G_{i-1} \text{ nevznikne kružnice} \\ E(G_{i-1}), & \text{jinak} \end{cases}$

Poznámka: Úloha minimální kostry
• ohodnocený graf $G = (V, E, W)$
$G = (V,E)$ je jednoduchý graf
$W : E \to (0, +\infty)$ (váha)

• Minimální kostra ohodnoceného grafu $G = (V, E, W)$ je souvislý graf $T = (V, E')$ tak, že:
i) $E' \subset E$
ii) $W(T) = \sum_{e \in E'} W(e)$ je minimální možná

Poznámka: Kruskalův algoritmus pro minimální kostru
input: ohodnocený graf $G = (V, E, w)$

i) seřadíme hrany tak, aby $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$
ii) aplikuji algoritmus $\oplus$.

Věta:
Kruskalův algoritmus řeší úlohu minimální kostry.

Důkaz: (sporem)
Buď $G = (V, E, w)$ ohodnocený souvislý graf, $\#V = n \in \mathbb{N}$,
$T_{KR} \subseteq E$ množina $(n-1)$ hran nalezených Kruskalovým algoritmem

$$\mathcal{T} := \left\{ E' \subseteq E \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ (V, E') \text{ je souvislý} \\ \cdot\ w(E') \text{ je minimální možné} \end{array} \right\}$$

Pro spor: nechť $T_{KR} \notin \mathcal{T} \Rightarrow$:
→ můžeme definovat funkci $g: \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ následovně:
Pro $T \in \mathcal{T}$: $g(T) := \min \{ i \in \mathbb{N} \mid e_i \notin T \wedge e_i \in T_{KR} \}$

$$\tilde{T} := \operatorname*{argmax}_{T \in \mathcal{T}} g(T), \quad k := g(\tilde{T})$$

- $e_k \notin \tilde{T} \to (V, \tilde{T} \cup \{e_k\})$ je souvislý graf a má n vrcholů a n hran
  $\to (V, \tilde{T} \cup e_k)$ obsahuje kružnici C

- $\exists e \in C : e \notin T_{KR}$ ((V, T_{KR}) nemůže obsahovat kružnici)

Uvažujme nyní $\tilde{T} \cup e_k \setminus e =: \tilde{\tilde{T}}$. $(V, \tilde{\tilde{T}})$ má n vrcholů, má $(n-1)$ hran, je souvislý → je strom
→ $(V, \tilde{\tilde{T}})$ je kostra (V, E)

$$w(\tilde{\tilde{T}}) = w(\tilde{T}) + w(e_k) - w(e)$$

Tvrzení: $W(e_k) \leq W(e)$:

Kruskalův algoritmus se rozhodnul pro e_k a ne pro e:
i) $W(e_k) \leq W(e)$ ✓.
ii) $W(e) \geq W(e_k)$

Kruskalův algoritmus nemohl přeskočit z důvodu, že tvořila kružnici s některými dříve zařazenými $(e_1, \dots e_{k-1}, e) \subset \tilde{T}$.

→ $W(\tilde{\tilde{T}}) \leq W(\tilde{T})$, protože $W(\tilde{T})$ je minimální možná, pak nutně $W(\tilde{\tilde{T}}) = W(\tilde{T})$ a tedy $\tilde{\tilde{T}} \in \mathcal{T} \wedge e_k \in \tilde{\tilde{T}}$.

Definice: Orientovaný graf

Orientovaným grafem rozumíme $G = (V, E)$, tak, že G je graf a $E \subset V \times V$.

Definice: Incidenční matice orientovaného grafu

Incidenční matice orientovaného grafu s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ je $B \in \{-1, 0, 1\}^{n, m}$ tak, že:

$$[B]_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{pokud } e_j \text{ začíná ve } v_i \\ 1, & \text{pokud } e_j \text{ začíná ve } v_i \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Definice: Kostra orientovaného grafu

Kostra orientovaného grafu $G = (V, E)$ je:
i) podgraf (V, E')
ii) je souvislý a bez kružnic nehledíme-li na orientaci hran

Věta:

Nechť B je incidenční matice orientovaného grafu a B_0 vznikla z B odstraněním libovolného řádku. Pak počet koster $G =: M$ je:

$$M = \det(B_0 B_0^T).$$

Důkaz:

BÚNO jsme odstranili poslední řádek

$C :=$ libovolná $(n-1)\times(n-1)$ podmatice B_0

Lemma:

$|\det C| = 1 \iff$ odpovídajících $(n-1)$ hran tvoří kostru G, označme G'.
$(\det C = 0$ jinak$)$

Důkaz:

indukcí na n:

- $n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓
- $n-1 \to n$: a) v G' existuje vrchol v_i, $i \leq n-1$ stupně 1
  b) v G' není vrchol stupně 1, nebo jediný vrchol stupně 1 je v_n

a) i-tý řádek C obsahuje právě jeden nenulový prvek (± 1)
Pak determinant C rozvineme podle i-tého řádku

$$G' \text{ je kostra } G \iff G' \setminus v_i \text{ je kostra } G \setminus v_i \overset{\text{IP}}{\iff} \det C = 1$$

7. přednáška

b) Víme, že každý strom má alespoň 2 listy (vrcholy stupně 1)
$\Rightarrow G'$ není strom $\Rightarrow$ není to kostra $G \overset{?}{\Rightarrow} \det C = 0$

- platí, že $\# V(G') = n$, $\# E(G') = n-1 \Rightarrow$ existuje vrchol stupně 0

$2(n-1) = 2\# E(G') = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$

i) $\exists k \in \hat{n-1} : d_{G'}(v_k) = 0 \Rightarrow k$-tý řádek je nulový $\Rightarrow \det C = 0$

ii) $d_{G'}(v_n) = 0 \Rightarrow$ každá hrana začíná a končí v některém z vrcholů $v_1, \dots, v_{n-1}$
→ každý sloupec obsahuje právě jednu $1, -1$
→ součet řádků C je nulový → řádky C LZ → $\det C = 0$

Pokračování důkazu věty:

$\det(B_0 B_0^T) = \sum (\det C)^2$

Binet-Cauchy

sčítáme přes všechny čtvercové podmatice B_0 řádu $(n-1)$

Speciální případ: $\# V = n$ a $\# E < n-1$
→ G není souvislý → G má alespoň 2 komponenty
Pak G můžu vrcholy přečíslovat společně s hranami tak, že:

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \rightarrow B_0 B_0^T = \begin{pmatrix} B_1 B_1^T & 0 \\ 0 & B_2 B_2^T \end{pmatrix}$$

$$0 \overset{?}{=} \det B_1 B_1^T \cdot \det B_2 B_2^T = \det B_0 B_0^T$$

$[B_1 B_1^T]_{ij}$: standardní skalární součin i-tého řádku a j-tého řádku B_1
- $i = j$: $[B_1 B_1^T]_{ii} = d_G(v_i)$

• $i \neq j$: $[B_1 B_1^T]_{ij} = -1$, $(v_i, v_j) \in E \vee (v_j, v_i) \in E$

$[B_1 B_1^T]_{ij} = -2$, $(v_i, v_j) \in E \wedge (v_j, v_i) \in E$

→ každý řádek $B_1 B_1^T$ se vysčítá na nulu
→ sloupce LZ → $\det B_1 B_1^T = 0$ → $\det B_0 B_0^T = 0$

Věta: Kirchoff's Matrix-tree theorem
Buď $G = (V, E)$ jednoduchý neorientovaný graf. $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, definujme matici $\mathbb{L}_0$ řádu $(n-1)$:

$$[\mathbb{L}_0]_{ij} = \begin{cases} d_G(v_i) & , i = j \\ -1 & , i \neq j, \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & , \text{jinak} \end{cases}$$

Počet koster grafu $G = \det \mathbb{L}_0$

Důkaz:
Podle G sestrojíme orientovaný graf H:
i) $V(G) = V(H)$
ii) každou hranu G nahradíme dvojicí hran opačné orientace

$B_0 \equiv$ vznikla z incidenční matice H umazáním posledního řádku.
~~Pak $\det \mathbb{L}_0 = \det B_0 B_0^T$~~
~~#koster~~
Pak $2\mathbb{L}_0 = B_0 B_0^T$

• z každé ~~kravy~~ kostry G vznikne 2^{n-1} koster H
• $\det B_0 B_0^T = 2^{n-1} \det \mathbb{L}_0$

• $[B_0 B_0^T]_{ii}$ = standardní skalární součin i-tého řádku B_0 se sebou samým $= d_{\vec{G}}(v_i) = 2 d_G(v_i)$

• $[B_0 B_0]_{ij} = \begin{cases} -2, & \text{pokud } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$

Definice: Eulerovský sled / cyklus / graf

Buď $G = (V, E)$ obecně s násobnými hranami, $\# E = m$.

• Sled $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m$ nazveme eulerovský, pokud $\forall i, j \in \hat{m}: i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$

• cyklus $v_0, e_1, \dots, e_m, v_0$ nazveme eulerovský, pokud $\forall i, j \in \hat{m}: i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$

• Graf nazveme eulerovský, pokud v něm existuje eulerovský cyklus.

Věta: Eulerova

Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf.
Pak G je eulerovský právě tehdy, když stupně všech vrcholů v G jsou sudé.

Důkaz:

$\Rightarrow$: evidentně nutná podmínka

$\Leftarrow$: $i := 1$, $s_i :=$ libovolný vrchol

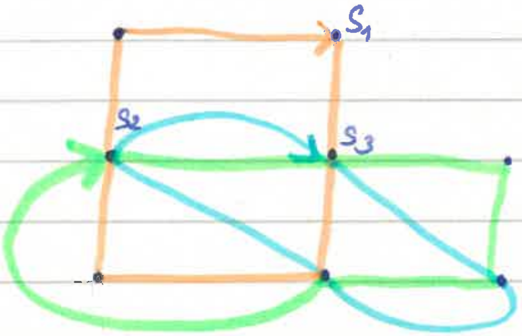
A1 • zvolím i-tou barvu b_i (různou od barev $b_1, \dots, b_{i-1}$)

A2 • vyrazím z s_i, po neobarvených hranách chodím náhodně, pokaždé, když nějakou hranu použiji, tak ji obarvím b_i až nemohu pokračovat

A3 → vrátil jsem se do s_i a navíc všechny hrany incidentní s s_i jsou již obarvené

Mohou nastat možnosti:
a) všechny hrany ~~b~~ jsou již obarvené → B1
b) v G zbývají neobarvené hrany → A4

A4 $i := i+1$
$S_i :=$ libovolný vrchol tak, že některé hrany incidentní s S_i jsou obarvené a některé neobarvené



Spojení cyklů do jednoho (eulerovského)
- vyrazíme z S_1 po 1. cyklu
- kdykoliv narazíme na S_i - startovní vrchol zatím nepřipojeného cyklu, tak na tento (i-tý) cyklus přestoupíme a obkroužíme ho celý, pak se vrátíme na cyklus původní

Věta:
Buď $G=(V,E)$ souvislý graf.
Pak G obsahuje eulerovský sled právě tehdy, když počet vrcholů lichého stupně je 0 nebo 2

8. přednáška: Hamiltonovské cesty a kružnice

Definice: Hamiltonovská cesta / kružnice / graf

Buď $G=(V,E)$ graf, $\#V = n$, potom:

i) Cesta v G se nazývá hamiltonovská, má-li délku $(n-1)$.

ii) Kružnice v G se nazývá hamiltonovská, má-li délku $(n-1)$.

iii) Graf se nazývá hamiltonovský, obsahuje-li hamiltonovskou kružnici.

Věta: Dirac

Buď $G=(V,E)$ graf, $\#V=n$.

Pokud $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, potom G je hamiltonovský.

Důkaz: (sporem)

Nechť $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, G není hamiltonovský.

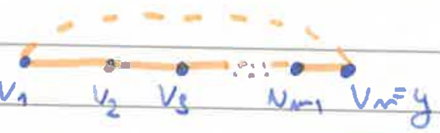
Buď $G^* \supseteq G$, $V(G)=V(G^*)$ nadgraf G maximální nehamiltonovský,

tj.: G^*+e je hamiltonovský $\forall e \in \binom{V}{2} \setminus E$

$\rightarrow \exists\, x,y \in V$: i) $\{x,y\} \notin E$

ii) $G^* + \{x,y\}$ obsahuje hamiltonovskou kružnici

v G^*:



$S := \{i \mid \{x, v_{i+1}\} \in E^*\}$

$T := \{i \mid \{y, v_i\} \in E^*\}$

Pak platí: $S \cap T = \emptyset$, $n \notin S$, $n \notin T$ $\rightarrow n > \#(S \cup T) = \#S + \#T = d_{G^*}(x) + d_{G^*}(y)$

$\rightarrow n \geq d_G(x) + d_G(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$

Věta: Ore

Buďte $G=(V,E)$ graf, $\#V=n$, $x,y\in V$: i) $\{x,y\}\notin E$

ii) $d(x)+d(y)\geq n$.

Pak G je hamiltonovský $\Leftrightarrow$ $G+\{x,y\}$ je hamiltonovský

Definice: Uzávěr grafu

Buď $G=(V,E)$ graf, $\#V=n$.

Konstruuje posloupnost $G=G_0\subset G_1\subset\ldots\subset G_k$ tak, že:

i) $V(G)=V(G_i)$, $\forall i\in \hat{k}$

ii) $E(G_{i+1})=E(G_i)+\{x_i,y_i\}$,

kde $\cdot \{x_i,y_i\}\notin E(G_i)$

$\cdot d_{G_i}(x_i)+d_{G_i}(y_i)\geq n$

a pro G_k platí: $\forall x,y\in V: \{x,y\}\notin E(G_k)\Rightarrow d_{G_k}(x)+d_{G_k}(y)<n$.

Pak G_k nazveme uzávěr grafu G, značíme $\bar{G}$.

Důsledek:

Graf G je hamiltonovský $\Leftrightarrow$ $\bar{G}$ je hamiltonovský

Věta: Chvátal

Buďte $G=(V,E)$ graf, $d_1\leq\ldots\leq d_n$ stupně vrcholů v G.

Pokud $\forall k<\frac{n}{2}: (d_k\leq k\Rightarrow d_{n-k}\geq n-k)$ $(*)$, pak G je hamiltonovský.

Důkaz: (sporem)

Ukážeme, že uzávěr $\bar{G}$ splňující $(*)$ je úplný graf.

Nechť $\exists x,y\in V: \{\{x,y\}\notin E(\bar{G})$; tedy $d_{\bar{G}}(x)+d_{\bar{G}}(y)<n$.

- volíme takovou dvojici $\{x,y\}$, pro kterou je $d_{\bar{G}}(x)+d_{\bar{G}}(y)$ maximální možný.

$q := d_{\bar{G}}(x)\overset{\text{BÚNO}}{\leq} d_{\bar{G}}(y)<n-d_{\bar{G}}(x)=n-q$, tj.: $\boxed{q<\frac{n}{2}\ (*_1)}$

Dále definujeme množiny S, T jako:

$S := \{w \in V \setminus x \mid \{x,w\} \notin E(\bar{G})\} \to \#S = n-1-g$

$\forall w \in S: d_{\bar{G}}(w) \le d_{\bar{G}}(y) \le n-g-1$ (z volby y) $\to$ V $\bar{G}$ máme $n-g$ vrcholů stupně nejvýše $n-g-1$ a tedy v $(d_i)_{i=1}^{n}$ je alespoň $n-g$ prvků menších (nebrovano), než $n-g-1 \Rightarrow \boxed{d_{n-g} \le n-g-1 \ \#_3}$

$S' := S \cup \{x\} \to \#S' = n-g$

$\forall w \in S': d_{\bar{G}}(w) \le n-g-1$

$T := \{w \in V \setminus y \mid \{y,w\} \notin E(\bar{G})\} \to \#T = n-1-d_{\bar{G}}(y) \ge g$

$\forall w \in T: d_{\bar{G}}(w) \le d_{\bar{G}}(x) = g \to$ V $\bar{G}$ máme alespoň ~~maximálně~~ g vrcholů stupně nejvýše g a tedy v $(d_i)_{i=1}^{n}$ je alespoň g prvků menších (nebrovano) než $g \Rightarrow \boxed{d_g \le g \ \#_2}$

$G: d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n$

$\bar{G}: d_1' \ge d_2' \ge \dots \ge d_n'$

$\to \#_1 + \#_2 + \#_3$ spor s $(*)$

Věta: Pósa

Buďte $G = (V,E)$ graf, $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n$ stupně vrcholů v G.
Pokud $\forall k < \frac{n}{2}: d_k > k$, pak G je hamiltonovský.

Lemma:

Buď $G = (V,E)$ graf.
Definujme $G^* := (V \cup \{w\}, E \cup \{\{w,x\} \mid x \in V\})$.

Pak G^* je hamiltonovský $\Leftrightarrow$ G obsahuje hamiltonovskou cestu.

9. přednáška

Věta:
Každý samokomplementární graf obsahuje hamiltonovskou cestu.

Důkaz:
Nechť $G=(V,E)$ je samokomplementární graf.
Uspořádáme vrcholy tak, že jejich stupně splňují:

$$d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n.$$

Jeho doplněk potom má skóre:

$$\underbrace{n-1-d_1}_{d_n} \geq \underbrace{n-1-d_2}_{d_{n-1}} \geq \ldots \geq \underbrace{n-1-d_n}_{d_1}$$

G je samokomplementární, tj.: $G \simeq \overline{G}$ a tedy

$$\forall i \in \hat{n}: \ d_i = n-1-d_{n+1-i}$$

Nyní definujeme graf $G' := (V \cup \{x\}, E \cup \{\{x,v\} \mid v \in V\})$, kde $x \notin V$.

Označme stupně vrcholů G' jako d_i'. Zřejmě potom platí:

$$d_i' = d_i + 1 \quad \text{a} \quad d_{n+1}' = n \quad , \forall i \in \hat{n}$$

Zvolme nyní $k < \frac{n+1}{2}$ libovolně, pak platí:

$$d_k' \leq k \iff d_k + 1 \leq k \iff (n-1-d_{n+1-k}) + 1 \leq k \iff n-k \leq d_{n+1-k} \iff$$

$$\iff (n+1)-k \leq (d_{n+1-k}+1) \iff d_{n+1-k}' \geq (n+1)-k$$

Definice: Párování (matching)

Buď $G = (V, E)$ graf.

Párování (matching) v G je podmnožina $M \subset E$ taková, že:

$$\forall e, f \in M : e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset$$

Definice: Maximální párování

Řekneme, že párování M je maximální, pokud pro každé jiné párování M' platí $\# M \geq \# M'$.

Definice: M-saturovaný vrchol, perfektní párování.

Nechť M je párování v $G = (V, E)$, $v \in V$. ~~[illegible]~~.

Řekneme, že v je M-saturovaný, jestliže $\exists e \in M : v \in e$.

Je-li každý vrchol z V M-saturovaný, říkáme, že M je perfektní párování.

Poznámka:

Každé perfektní párování je maximální.

Nutná podmínka pro existenci perfektního párování je $\# V \in 2\mathbb{N}$.

Poznámka: Perfektní párování bi-partitních grafů

Uvažujme bi-partitní graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

Nutnou podmínkou existence perfektního párování pak zřejmě je $\# V_1 = \# V_2$.

Připomeňme, že adjacenční matice bi-partitního grafu lze psát:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^T & 0 \end{pmatrix}$$

Buď $\pi \in S_n$, pak $M := \{\{v_i, v_{\pi(i)}\} \mid i \in \hat{n}\}$ představuje perfektní párování právě, když: $b_{1\pi(1)} \cdot b_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n\pi(n)} = 1$.

Počet perfektních párování v G je potom roven permanentu matice $\mathbb{B}$:

$$\operatorname{per} \mathbb{B} = \sum_{\pi \in S_n} b_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\pi(n)}$$

Definice: M-střídající/M-zlepšující cesta

Nechť M je párování v grafu $G = (V, E)$.
Řekneme, že cesta $(v_i)_{i=0}^{k}$ je M-střídající, jestliže:

$$\forall i \in \widehat{k-1} : \{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M.$$

M-střídající cestu $(v_i)_{i=0}^{k}$ nazveme M-zlepšující, jestliže vrcholy v_0, v_k nejsou saturovány.

Definice: Symetrická diference

Buďte A, B množiny.
Symetrickou diferencí množin A, B rozumíme množinu:

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Věta: Berge

Párování v grafu G je maximální právě tehdy, když v G neexistuje M-zlepšující cesta.

Důkaz: (sporem)

$\Rightarrow$: Nechť M je maximální a přitom existuje M-zlepšující cesta, označme P.
Pak definujeme párování $M' := M \triangle P$.

Tj.: M' vznikne tak, že mimo cestu necháme M jak je a na cestě dáme do M' naopak jen ty hrany, které nejsou v M.

Je zřejmé, že M' bude opět párování, přičemž $\#M' > \#M$, to je spor.

$\Leftarrow$: Nechť v G neexistuje M-zlepšující cesta a přitom M není maximální.
Pak existuje párování M' : $\#M' > \#M$.

Definujme graf $H := (V, M \triangle M')$.

Zřejmě H se skládá jen z kružnic a cest, na nichž se střídají hrany z M a z M' (to také znamená, že v H jsou všechny kružnice sudé délky).

Protože $\#M' > \#M$, tak také $M \triangle M'$ obsahuje více ~~kružnic~~ hran z M, než z M.
Z toho plyne, že v H musí existovat alespoň jedna kružnice liché délky, která obsahuje $2k+1$ ($k \in \mathbb{N}_0$) hran. Z toho k hran je z M a $(k+1)$ hran je z M', a navíc její koncové body nejsou M-saturovány v G.

Taková cesta je ale M-zlepšující a to je spor.

Definice: Množina sousedů

Množinou sousedů vrcholu v v grafu $G=(V,E)$ rozumíme množinu

$$N(v) := \{u \in V \mid \{u,v\} \in E\}.$$

Množinou sousedů vrcholů z množiny $S \subset V$ rozumíme množinu

$$N(S) := \bigcup_{v \in S} N(v)$$

Věta: Hall

Nechť $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bi-partitní graf.
Potom v G existuje párování saturující celé V_1 právě tehdy, když

$$\forall S \subset V_1 : \# N(S) \geq \# S.$$

Důkaz:

$\Rightarrow$: Z každého vrcholu ve V_1 odchází hrana z M a ty mají ve V_2 různé konce (jsou z M).

To nutně platí i pro $\forall S \subset V_1$.

$\Leftarrow$: Nechť G splňuje Hallovu podmínku a zároveň neobsahuje párování saturující celé V_1

Položme $S :=$ minimální vrcholové pokrytí a nechť $S = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2$, kde $\tilde{V}_1 \subset V_1 \wedge \tilde{V}_2 \subset V_2$

$$\# V_1 > \# S = \# \tilde{V}_1 + \# \tilde{V}_2 \Rightarrow \# \tilde{V}_2 < \# V_1 - \# \tilde{V}_1 = \#(V_1 \setminus \tilde{V}_1)$$

V G nemůže existovat hrana s jedním koncem ve $V_1 \setminus \tilde{V}_1$ a druhým koncem ve $V_2 \setminus \tilde{V}_2$

$\rightarrow N(V_1 \setminus \tilde{V}_1) \subset \tilde{V}_2$

a tedy $\# N(\underbrace{V_1 \setminus \tilde{V}_1}_{T}) \leq \# \tilde{V}_2 < \#(V_1 \setminus \tilde{V}_1)$

$\rightarrow \exists T \subset V : \# N(T) < \# T$

Definice: Vrcholové pokrytí

Buďte $G = (V, E)$ graf, $S \subset V$.
Řekneme, že S je vrcholové pokrytí G, jestliže $\forall e \in E : \exists s \in S : s \in \bar{e}$.
Dále definujeme:
i) $\nu(G) :=$ velikost maximálního párování v G
ii) $\tau(G) :=$ velikost minimálního vrcholového pokrytí G

Poznámka:
- Obecně platí $\nu(G) \leq \tau(G)$.
- Pokud pro nějaké párování M a vrcholové pokrytí S platí $\# M = \# S$, pak M je maximální párování a S minimální vrcholové pokrytí.

Věta: König - Egerváry
Nechť $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bi-partitní graf, pak $\nu(G) = \tau(G)$

Důkaz:
Nechť M je maximální párování v G.
i) pokud M je perfektní, pak tvrzení platí

ii) pokud M není perfektní, označíme $U \subset V_1$ nesaturované vrcholy a položíme:

$X := \{ v \in V_1 \mid z\ u$ do v vede M-střídající cesta, $u \in U \}$

$Y := \{ v \in V_2 \mid z\ u$ do v vede M-střídající cesta, $u \in U \}$

· Dále definujeme $N(v) := \{u \mid \{u,v\} \in E\}$ (množina sousedů)

• Ukážeme, že $N(X) = Y$, tzn: i) do každého vrcholu Y vede hrana z X
ii) neexistuje hrana s jedním koncem v X a druhým v X

i) Každá M-střídající cesta z $u \in U$ nutně končí v X (nelze prodloužit), kdyby končila v Y, tak má lichou délku → koncový bod není M-saturovaný
→ cesta je M-zlepšující
→ i) platí ✓

ii) $\forall x \in X \cdot \forall z \in V_2 : \{x,z\} \in E \Rightarrow z \in Y$:

$\exists P_x$ M-střídající cesta z U do x (její poslední hrana je nutně z M)
· $\{x,z\} \in P_x$: potom $P_x \setminus \{x,z\}$ je M-střídající z U do $z \Rightarrow z \in Y$
· $\{x,z\} \notin P_x$: $\{x,z\} \notin M$, potom $P_x + \{x,z\}$ je M střídající cesta z U do z
→ $z \in Y$ ✓ ii) platí ✓

• Ukážeme, že $K := (V_1 \setminus X) \cup Y$ je i) vrcholové pokrytí
ii) $\#K = \#M$

i) Kdyby ne : $\exists e \in E(G)$, která nemá ani jeden konec v K
tj.: $e = \{u,v\} \Rightarrow u \in X \wedge v \in V_2 \setminus Y$, spor s $N(X) = Y$

ii) Pokud $\#K \neq \#M$, pak $\#K > \#M \Rightarrow \exists e \in M$ s oběma konci v K,
nechť $e = \{x,y\}$: $x \in V_1 \cap K = V_1 \setminus X$
$y \in V_2 \cap K = Y$

→ $\exists P_y$: M-střídající cesta z $u \in U$ do y → nutně poslední hrana není z M

→ Potom $P_y + e$ je M-střídající cesta z u do $x \Rightarrow x \in X$, spor

10. přednáška

Definice: Regulární graf

Graf $G=(V,E)$ je regulární (k-regulární), jestliže

$$\delta(G)=\Delta(G)=k\in\mathbb{N}.$$

Důsledek:

Regulární bi-partitní graf má perfektní párování.

Důkaz:

- $\#V_1\cdot k=\#V_2\cdot k=\#E \to \#V_1=\#V_2$ (je splněna nutná podmínka)

- Buď $S\subset V_1$ fixní:

$E_1:=$ hrany s jedním koncem v S

$E_2:=$ hrany s jedním koncem v $N(S)$

$\to E_1\subset E_2 \Rightarrow \#E_1\leq\#E_2$

$\to k\#S=\#E_1\leq\#E_2=k\cdot\#N(S)\to\#S\leq\#N(S)$

Věta: Tutte

Nechť $G=(V,E)$ je graf.

- G má perfektní párování právě tehdy, když:

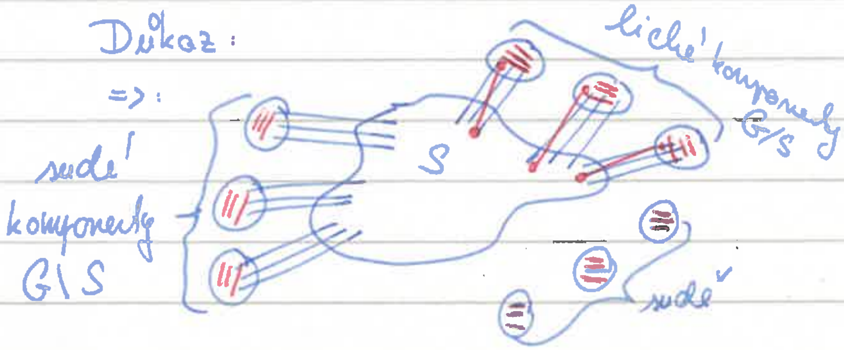
$$\forall S\subset V: C_L(G\setminus S)\leq\#S.$$

$C_L(G)$ je počet tzv. lichých komponent,

(tj.: komponent s lichým počtem vrcholů grafu G)

Důkaz:

$\Rightarrow$:



I v ideálním případě, tj. v případě dovolujícím co nejmenší počet vrcholů v S máme $c_L(G\setminus S) = \#S$.
Jinak jich je v S nutně víc.

$\Leftarrow$: (sporem)

Nechť $\forall S \subset V : c_L(G\setminus S) \le \#S$ $\wedge$ v G není perfektní párování

- Pro $S = \emptyset$ máme $c_L(G) \le 0 \rightarrow$ každá komponenta je sudá

- $G^* \supset G$, $V(G^*) = V(G)$ maximální nadgraf tak, že nemá perfektní párování

  není úplný!

- $U := \{v \in V \mid d_{G^*}(v) = n-1\}$ $(\#V(G) = n)$

$\rightarrow c_L(G^*\setminus U) \le c_L(G\setminus U) \le \#U$

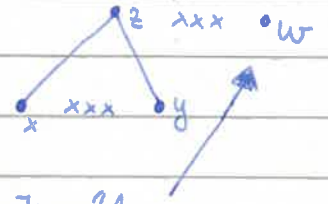
Přidáním hran, které z G udělaly G^* do $G\setminus U$ počet lichých komponent

- nemění – hrana v rámci komponenty
  - hrana mezi 2 sudými komponentami
  - hrana mezi sudou a lichou komponentou

- klesne o 2 – hrana mezi lichými komponentami

Zbývá ukázat: (sporem)
Každá komponenta $G^*\setminus U$ je úplný graf.

Nechť komponenta G_1 není úplná:
Tj.: Existují alespoň dva vrcholy, které nejsou spojeny hranou
→ $\exists x,y,z \in V(G_1)$:

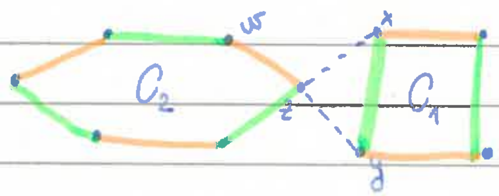


$z \in V(G_1) \Rightarrow z \notin U \Rightarrow \exists w \in U$:

Zároveň G^* je maximální bez perfektního párování
→ $G^* + \{x,y\}$ má perfektní párování $M_{xy} \Rightarrow \{x,y\} \in M_{xy}$
→ $G^* + \{z,w\}$ má perfektní párování $M_{zw} \Rightarrow \{z,w\} \in M_{zw}$

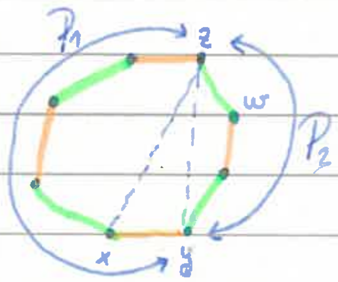
$H := (V, M_{xy} \triangle M_{zw}) \Rightarrow d_H(v) \in \{0,2\}$
→ H tvoří izolované body a sudé kružnice

i) $\{x,y\}$ a $\{z,w\}$ leží na jiných kružnicích :



$\tilde{M} := (M_{zw}\setminus C_2) \cup (M_{xy}\cap C_2)$
je perfektní párování na G^*, to je spor

ii) $\{x,y\}$ a $\{z,w\}$ leží na stejné kružnici :



$\tilde{M} := (M_{zw}\setminus P_2)\cup(M_{xy}\cap P_2)\cup\{z,y\}$
je perfektní párování na G^*, to je spor

11. přednáška

Věta:

Nechť $T=(V,E)$ je strom.

Potom T má perfektní párování právě tehdy, když $\forall v \in V: c_L(T \setminus v) = 1$.

Důkaz:

$\Rightarrow$: Tutte: $\forall v \in V: c_L(T \setminus v) \leq 1$

Proč nemůže platit $c_L(T \setminus v) = 0$?

Pak by $T \setminus v$ měl sudý počet vrcholů, tedy T by měl lichý počet vrcholů a takové T nemůže mít perfektní párování.

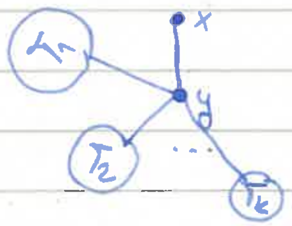
$\Leftarrow$: Indukcí na počet vrcholů

i) $n = 1$: $c_L(T \setminus v) = c_L(\emptyset) = 0$

$\rightarrow$ není splněn předpoklad implikace, a proto implikace platí

ii) $\{1, \dots, n-1\} \rightarrow n$

T je strom $\Rightarrow \exists x \in V(T): d_T(x) = 1$

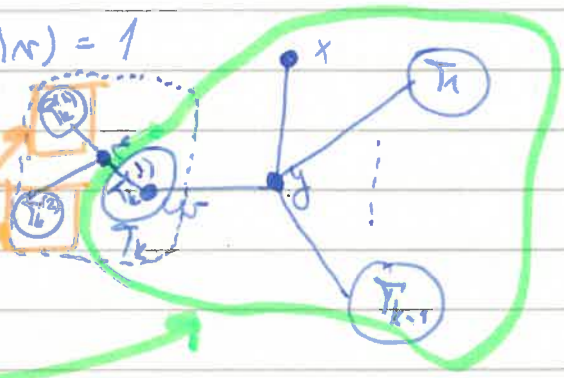


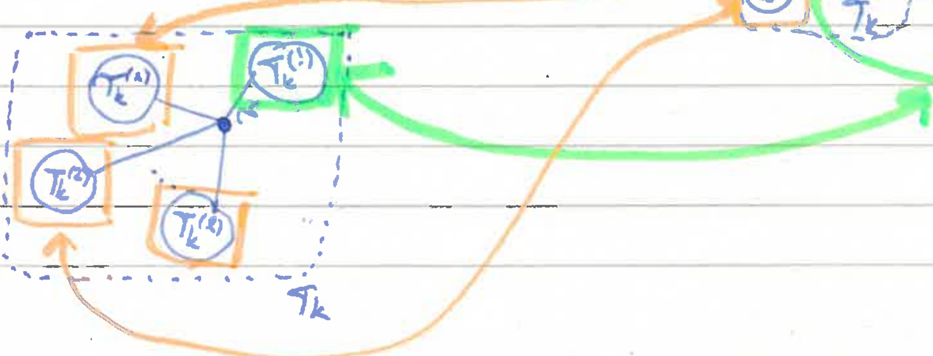
$c_L(T \setminus y) = 1 \rightarrow \{x\}$ je lichá komponenta

$T_1, \dots, T_k$ jsou sudé komponenty

Stačí ukázat: $\forall i \in \hat{k}: \forall v \in V(T_i): c_L(T_i \setminus v) = 1$

BÚNO $i = k$: $\forall v \in V(T_k): c_L(T_k \setminus v) = 1$





• „oranžové" komponenty jsou stejné v obou obrázcích

• „zelené" komponenty se liší, ale pravá má o sudý počet vrcholů více, než levá

→ 1 v levé části obrázku je právě jedna lichá

Definice: Hranové obarvení

Nechť $G=(V,E)$ je graf.

k-hranové obarvení G je zobrazení $\varphi: E \to \hat{k}$.

Definice: Vlastní hranové obarvení

k-hranové obarvení φ v G je vlastní, jestliže $\forall e,f \in E,\ e \neq f: e \cap f \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(f)$

Definice: Hranová barevnost (chromatic index)

Hranová barevnost, označíme $\chi'(G)$, je nejmenší $k \in \mathbb{N}$ tak, že G má vlastní k-hranové obarvení.

Poznámka:

- $\Delta(G) \leq \chi'(G)$
- φ vlastní k-hranové obarvení, pro $i \in \hat{k}$: $\varphi^{-1}(i)$ je párování na G

Věta:

Nechť $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bi-partitní graf.
Pak $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Důkaz:

i) Nechť G je k-regulární

→ v G existuje perfektní párování M_1

· hrany M_1 dostanou barvu 1.

· uvažujme (bi-partitní) graf $G \setminus M_1 =: G_2$

→ G_2 je $(k-1)$-regulární → existuje perfektní párování M_2 v G_2

· hrany z M_2 dostanou barvu 2.

⋮

po k-krocích máme obarveno: $\chi'(G) \leq \Delta(G) \wedge \Delta G \leq \chi'(G)$ (Obecně)

ii) G není regulární

→ do V_1 nebo V_2 přidáme vrcholy, tak aby $\# V_1 = \# V_2 = \max\{\# V_1, \# V_2\}$,
potom přidáme hrany tak, aby vznikl $\Delta(G)$-regulární graf H

$$\to \underbrace{\Delta(G) \leq \chi'(G)}_{\text{z konstrukce}} \underbrace{\leq \chi'(H)}_{\text{z i)}} \underbrace{= \Delta(H) = \Delta(G)}_{\text{z konstrukce}}$$

Věta: Vizing

Nechť $G = (V, E)$ je graf.
Pak $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Definice: Optimální hranové obarvení

Nechť $G = (V, E)$ je graf.
Řekneme, že k-hranové obarvení φ je optimální, jestliže:

$$\sum_{v \in V} b_\varphi(v) \text{ je maximální možná (přes všechny } k\text{-hranová obarvení)}$$

12. přednáška

Poznámka:

- $b_\varphi(v)$ je počet barev použitých na hranách incidentních s v
- $\forall v \in V: 1 \le b_\varphi(v) \le d(v)$
- Pokud pro všechna $v \in V$ platí $b_\varphi(v) = d_\varphi(v)$, pak φ je vlastní.

Lemma 1:

Nechť $G=(V,E)$ je souvislý graf, který nemá liché kružnice. Pak existuje 2-hranové obarvení G takové, že na každém vrcholu, stupně alespoň dva, jsou obě barvy.

Důkaz:

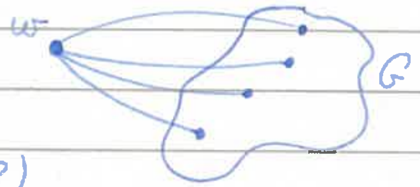
i) G je eulerovský

Projdeme G po eulerovském cyklu a na střídačku barvíme hrany.

- existuje vrchol stupně $d \ge 4$ → vyrazíme z tohoto bodu
- všechny vrcholy mají stupeň $d = 2$ → G je sudá kružnice

ii) G není eulerovský

Definujme $\tilde{G}$ jako:



$$\tilde{G} := (V \cup \{w\}, E \cup \{\{w,x\} \mid d_G(x) \equiv 1 \bmod 2\})$$

- x lichého/sudého stupně v G → x sudého stupně v $\tilde{G}$
- $d_{\tilde{G}}(w)$ = # vrcholů lichého stupně (sudé číslo, protože $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2E$)

→ v $\tilde{G}$ procházíme eulerovský cyklus začínající ve w a střídáme barvy

Lemma 2:

Nechť $\varphi: E \to \hat{k}$ je k-hranové optimální obarvení grafu $G=(V,E)$ a nechť dále existuje vrchol $u \in V$ a dvě barvy i, j takové, že i je na vrcholu u alespoň dvakrát a j na vrcholu u není.

Pak komponenta grafu $(V, \varphi^{-1}(i) \cup \varphi^{-1}(j))$ obsahující vrchol u je lichá kružnice.

Důkaz: (sporem)

Nechť příslušná komponenta C_u nemá liché kružnice.
Pak sestrojíme nové k-hranové obarvení G, tak že

$\forall e \in E \setminus E(C_u): \tilde{\varphi}(e) = \varphi(e)$

a hrany $E(C_u)$ obarvíme hranami i a j podle lemmatu 1.

- Vrcholy mimo C_u: $b_{\tilde{\varphi}}(v) = b_{\varphi}(v)$
- Vrcholy v C_u, které nemají stupeň 1: $b_{\tilde{\varphi}}(v) = b_{\varphi}(v)$
- Vrcholy v C_u s výjimkou u, které mají stupeň alespoň dva v C_u: $b_{\tilde{\varphi}}(v)$ neklesne
- Vrchol u: $b_{\tilde{\varphi}}(v) = b_{\varphi}(v) + 1$

$\to \sum b_{\tilde{\varphi}}(v) > \sum b_{\varphi}(v) \to$ spor s optimalitou

Věta: Vizing

$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$

Důkaz:

Nechť φ je optimální obarvení grafu $G=(V,E)$ pomocí $\Delta(G)+1$ barev.
Ukážeme, že φ je vlastní (sporem):

- φ není vlastní: $\exists u \in V : b_\varphi(u) < d_G(u) \Rightarrow \exists$ barva c_1, která je na u alespoň dvakrát
  a navíc pro každý $v \in V$ existuje barva, která na v není

13. přednáška

Definice: Řez v síti, kapacita řezu

Nechť $N=(G,p,s,c)$ je síť a $S\subset V(G)$ tak, že $p\in S$, $s\notin S$.

Položme $\bar{S} := V(G)\setminus S$.

Řezem v síti N rozumíme $(S,\bar{S})$.

Kapacita řezu $(S,\bar{S})$ je $C((S,\bar{S}))$:

$$C((S,\bar{S})) = \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in\bar{S}}} c(e)$$

Věta:

Nechť f je tok a $(S,\bar{S})$ je řez v síti $N=(G,p,s,c)$.

Potom:

$$\operatorname{val} f = \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in\bar{S}}} f(e) - \sum_{\substack{e^-\in\bar{S}\\ e^+\in S}} f(e) \le C((S,\bar{S})).$$

Poznámka:

Pokud v síti N máme f a $(S,\bar{S})$ tak, že $\operatorname{val} f = C((S,\bar{S}))$, pak f je maximální tok v N.

($(S,\bar{S})$ je tzv. minimální řez v N)

Důkaz:

$$\operatorname{val} f = \sum_{e^-=p} f(e) - \sum_{e^+=p} f(e) = \sum_{v\in S}\Big(\sum_{e^-=v} f(e) - \sum_{e^+=v} f(e)\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in S}} f(e) + \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in\bar{S}}} f(e) - \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in S}} f(e) - \sum_{\substack{e^-\in\bar{S}\\ e^+\in S}} f(e) = \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in\bar{S}}} f(e) - \sum_{\substack{e^-\in\bar{S}\\ e^+\in S}} f(e)$$

$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k$

Definice: Polocesta

Polocesta v orientovaném grafu je tak, že:

i) $\forall i,j \in \hat{k} : i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$

ii) $\forall i \in \widehat{k-1} : (v_i, v_{i+1}) = e_i \vee (v_{i+1}, v_i) = e_i$

Definice: Rezervní polocesta

Rezervní polocesta v síti $N = (G, p, s, c)$ s tokem f je polocesta P tak, že:

i) začátek P je p

ii) $r(P) > 0$, kde

kde $r(P) := \min_{e \in P} r(e)$

Definice: Rezerva hrany

Polocesta P s počátkem v p.

Rezervou hrany $e \in P$ rozumíme $r(e)$:

$$r(e) := \begin{cases} c(e) - f(e), & \text{pokud } e \text{ je na } P \text{ orientovaná od } p \\ f(e), & \text{pokud } e \text{ je na } P \text{ orientovaná k } p \end{cases}$$

Věta: Ford & Fulkerson

Tok f v síti $N = (G, p, s, c)$ je maximální právě tehdy, když v N neexistuje rezervní polocesta s koncem v s.

Důkaz:

$\Rightarrow$: Nechť P je rezervní polocesta s koncem v s.

Upravíme tok f následovně:

$$\tilde{f}(e) := \begin{cases} f(e) + r(P), & \text{pokud } e \text{ je na } P \text{ orientovaná od } p \\ f(e) - r(P), & \text{pokud } e \text{ je na } P \text{ orientovaná k } p \\ f(e), & \text{jinak (tzn. } e \notin P) \end{cases}$$

platí: i) $\tilde{f}$ je tok

ii) $val\ \tilde{f} = val\ f + \underbrace{\tilde{r}(P)}_{>0} > val\ f$

$\Leftarrow$: Nechť v N neexistuje rezervní polocesta s koncem v s:

· Najdeme řez s kapacitou $c((S,\bar{S})) = val\ f$

Položme $S := \{v \in V(G) \mid v\ N$ existuje rezervní polocesta s koncem ve $v\}$

$\bar{S} = V(G) \setminus S$

Mějme (x,y): $x \in S \wedge y \in \bar{S}$: $r(P_x + (x,y)) = 0 \Rightarrow r((x,y)) = 0 \Rightarrow f((x,y)) = c((x,y))$

(w,z): $w \in \bar{S} \wedge z \in S$: $r(P_z + (w,z)) = 0 \Rightarrow f((w,z)) = 0$

$\Rightarrow val\ f = \sum_{\substack{e \in S \\ e^+ \in \bar{S}}} f(e) - \sum_{\substack{e \in \bar{S} \\ e^+ \in S}} f(e) = \sum_{\substack{e \in S \\ e^+ \in \bar{S}}} c(e) - 0 = c((S,\bar{S}))$

Věta: Max-flow min-cut

V libovolné síti je hodnota maximálního toku rovna kapacitě minimálního řezu.

Věta: O celočíselném toku

Nechť N je síť s celočíselnými kapacitami,

Potom v N existuje maximální tok s celočíselnými hodnotami

Definice: Booleovský tok

Tok v síti N nazveme Booleovský, jestliže $\forall e \in E: f(e) \in \{0,1\}$.

14. přednáška

Tvrzení:
V síti N existuje tok f s hodnotou $\mathrm{val}\, f = \# V_1$ právě tehdy když v G existuje párování saturující celé V_1

Důkaz:
$\Leftarrow$: Nechť existuje párování M saturující celé V_1:

Definujme tok f jako:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f((p,r)) = 1 \\ \bullet\ f((u,r)) = \begin{cases} 1, & \{u,r\} \in M \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \\ \bullet\ f((r,s)) = \begin{cases} 1, & r \text{ je } M\text{-saturovaný} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \end{array}\right\} \text{Splňuje Kirchhoffův zákon}$$

$\Rightarrow$: Nechť tok f má hodnotu $\mathrm{val}\, f = \# V_1$:

Z věty o celočíselném toku:
BÚNO nechť f je Booleovský

Definujme párování M jako:

$u \in V_1, r \in V_2$: $\{u,r\} \in M \iff f((u,r)) = 1$

M je párování díky Kirchhoffovi.

Definice: Vrcholové obarvení
Buďte $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$.
k-vrcholovým obarvením rozumíme $\varphi: V \to \hat{k}$

Definice: Vlastní vrcholové obarvení
k-vrcholové obarvení $\varphi: V \to \hat{k}$ je vlastní, jestliže:

$$\forall u,v \in V: \varphi(u)=\varphi(v) \Rightarrow \{u,v\} \notin E$$

Definice: Vrcholová barevnost
Vrcholová barevnost G, označíme $\chi(G)$ je minimální $k \in \mathbb{N}$ takové, že G má vlastní k-vrcholové obarvení

Poznámka:
$\chi(K_n)=n$, K_n je úplný graf na n vrcholech
$\chi(V,\emptyset)=1$
$\chi(G)=2 \Leftrightarrow G$ je bi-partitní s alespoň jednou hranou

Definice: Klika, nezávislá množina
Buďte $G=(V,E)$ graf, $S \subset V$, $\#S = k \in \mathbb{N}$.
Řekneme, že S je klika velikosti k v G, jestliže $\binom{S}{2} \subset E$
Řekneme, že S je nezávislá množina velikosti k v G, jestliže $\binom{S}{2} \cap E = \emptyset$.

Dále zavádíme značení:
$\omega(G)$:= velikost maximální kliky v G (clique number)
$\alpha(G)$:= velikost maximální nezávislé množiny (stability number)

Poznámka:
Nechť φ je vlastní vrcholové obarvení, pak $\varphi^{-1}(i)$ je nezávislá množina.

15. přednáška

Tvrzení:

Buď $G=(V,E)$ graf, potom platí:

i) $\chi(G) \geq \omega(G)$

ii) $\chi(G)\alpha(G) \geq \#V$

Důkaz:

Klika jako podgraf je úplný graf

$\rightarrow \#V = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \#\varphi^{-1}(i) \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G)\omega(G)$

Věta:

$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

Důkaz:

- hladový algoritmus

i) Nechť $V=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$

ii) v i-tém kroku v_i dostane 1 volnou barvu:

$\varphi(v_i) - \min_{j\in\mathbb{N}} \{\forall v \in N(i) \cap \{v_1,\dots,v_{i-1}\} : \varphi(v) \neq j\}$

$\rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)+1,$

protože každý vrchol má maximálně $\Delta(G)$ (obarvených) sousedů

$\Rightarrow$ použijeme-li $\Delta(G)+1$ barev, vždy bude alespoň 1 volná.

Poznámka:

Lepších výsledků dosáhneme, když:

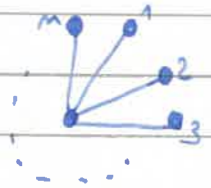
$v_m \dots d_G(v_m) = \delta(G)$

$v_{m-1} \dots$ ten, který má nejmenší stupeň v $G \setminus v_m$

Důsledek:

$\chi(G) \le \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\} + 1$

Příklad: S_n:



$\Delta(S_n) = n$

$\chi(S_n) = 2$

K_n: $\chi(K_n) = n$, C_{2n+1}: $\chi(C_{2n+1}) = 3$

$\Delta(K_n) = n-1$ $\quad \Delta(C_{2n+1}) = 2$

Definice: k-kritický graf

Buď $G = (V,E)$ graf.

G nazveme k-kritický, jestliže:

i) $\chi(G) = k$

ii) $H \subsetneq G : \chi(H) \le k-1$

Tvrzení:

k-kritický graf je souvislý

Důkaz.

G graf s komponentami $G_1, \dots, G_m$

$\rightarrow \chi(G) = \max_{i \in m} \chi(G_i)$

Tvrzení:

$G(V,E)$ k-kritický graf.

Pak $\delta(G) \ge k-1$

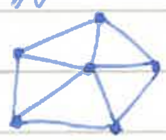
Důkaz: (sporem)
Nechť $\exists n \in N : d_G(n) \leq k-2$

→ $G \setminus n \subsetneq G \Rightarrow \chi(G \setminus n) \leq k-1$
→ $\exists (k-1)$-vrcholové obarvení $G \setminus n$ (vlastní)

Vrátíme n do $G \setminus n$:

n má v G $(k-2)$ sousedů, na nich nanejvýš $(k-2)$ barev
$\Rightarrow \exists$ vlastní $(k-1)$-vrcholové obarvení G ↯

Poznámka: Klasifikace k-kritických grafů
$k = 1$: • K_1
$k = 2$: •—• K_2
$k = 3$: C_{2n+1}, $\forall n \in N$
$k = 4$: například



Obecně je ale dále $(k \geq 4)$ nelze charakterizovat

Definice: Řez grafu
Buďte $G = (V, E)$ graf, $S \subset V$.
Množinu S nazveme řezem v G, jestliže $c(G \setminus S) > c(G)$,
kde $c(G)$ je počet komponent grafu G.

Tvrzení:
Řez k-kritického grafu G není klika v G.

Důkaz: (sporem)

Buď $S \subset V$ tak, že $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ $<$ je klika G / je řez G

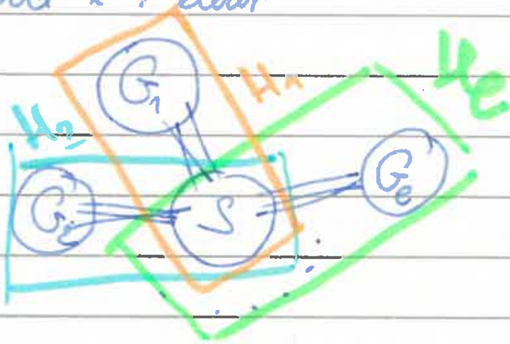
$c(G) = 1 \Rightarrow c(G \setminus S) = \ell \geq 2$

Komponenty $G \setminus S$: $G_1, \dots, G_\ell$

Najdeme vlastní obarvení G pomocí $k-1$ barev

- Pro $i \in \hat{\ell}$ položme:

$H_i := G[V(G_i) \cup S]$



→ $H_i \subsetneq G \Rightarrow \chi(H_i) \leq k-1$

→ φ_i : vlastní $(k-1)$ obarvení H_i

S klika $\Rightarrow$ vrcholy $v_1, \dots, v_n$ spojené každý s každým i v H_i
$\Rightarrow$ mají různé barvy

BÚNO: $\forall i \in \hat{\ell} : \forall j \in \hat{n} : \varphi_i(v_j) = j \Rightarrow$ spor

Nyní jednotlivá φ_i sjednotíme (S má po každé stejné barvy)

Věta: Brooks

Nechť G je souvislý graf, který není úplný ani lichá kružnice.
Pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Tvrzení:

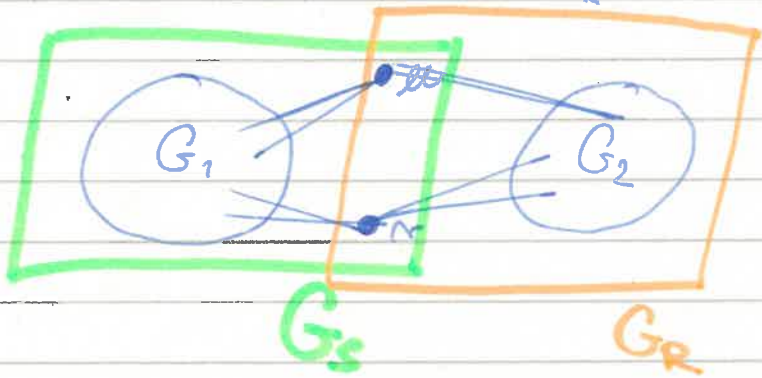
Nechť G je k-kritický graf s řezem $\{u,v\}$.
Pak $d_G(u)+d_G(v) \geq 3k-5$

Lemma 1:

$G \setminus \{u,v\}$ má právě 2 komponenty G_1, G_2 tak, že:

i) každé vlastní $(k-1)$-obarvení $G_S := G[V(G_1) \cup \{u,v\}]$ dá u, v stejnou barvu

ii) každé vlastní $(k-1)$-obarvení $G_R := G[V(G_2) \cup \{u,v\}]$ dá u, v různé barvy



Důkaz lemma 1:

- máme alespoň jednu komponentu „s vlastností G_S"
pokud ne: všechny části $G[V(G_i) \cup \{u,v\}]$ obarvíme vlastním $(k-1)$-obarvením tak, že BÚNO u má barvu 1 a v má barvu 2. Toto obarvení rozšíříme na celý graf G jako v předchozím důkazu a to je spor

- Ze stejného důvodu máme alespoň jednu komponentu „s vlastností G_R"

• už přítomnost jediné komponenty s vlastností G_1 a jediné komponenty s vlastností G_2 vynutí $\chi(G) = k$.
Pokud by v G byla cokoliv „nové" by jeho zahrnutím barevnost neklesla → spor

Lemma 2:
$G_H := G_1 + \{u,v\}$ je k-kritický graf

Důkaz:
i) $\chi(G_H) = k$ ✓ (jasné z vlastností G_1)

ii) $\forall e \in E(G_H): \chi(G_H \setminus \{e\}) \leq k-1$:
 • $e = \{u,v\}$ ✓ (jasné)
 • $e \neq \{u,v\}$, tj.: $e \in G_1$:
→ $G_H \setminus \{e\} \subsetneq G \Rightarrow \chi(G \setminus \{e\}) \leq k-1 \Rightarrow \exists$ vlastní $(k-1)$ obarvení φ na G
 $G_2 \subseteq G \setminus \{e\} \Rightarrow u$ a v mají stejnou barvu

 $\varphi/_{G_H}$ je vlastní, protože u a v mají různou barvu

Lemma 3:
$G_V := G_2 \setminus \{u,v\} + \{\{w,x\} \mid x \in N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)\}$ (u a v stáhneme do vrcholu w)
G_V je k-kritický graf

Důkaz:
Analogicky jako výše

16. přednáška

Tvrzení:

Nechť G je k-kritický graf s řezem $\{u,v\}$.

Pak $d_G(u) + d_G(v) \geq 3k-5$

Důkaz:

$$d_G(u) + d_G(v) = d_{G_S}(u) + d_{G_R}(u) + d_{G_S}(v) + d_{G_R}(v) \geq d_{G_H}(u) - 1 + d_{G_H}(v) - 1 + d_{G_V}(w) \geq$$

$$\geq 3k-5$$

Důkaz (Brooks):

i)

Definice: Vrcholová souvislost

Buďte $G=(V,E)$ graf, $k\in\mathbb{N}$.

Řekneme, že G je vrcholově souvislý, jestliže:

i) $\#V>k$

ii) $G\setminus U$ je souvislý po každou $U\subset V, \#U<k$

Maximální $k\in\mathbb{N}$ takové, že G je vrcholově souvislý nazýváme vrcholová souvislost G, označíme $\varkappa(G) := k$.

Poznámka:

- 1-souvislé grafy jsou souvislé podle předchozí definice
- $\varkappa(K_n)=n-1$
- $\varkappa(G)=0 \iff G$ není souvislý nebo $G=K_1$

Definice: Hranová souvislost

Buďte $G=(V,E)$ graf, $\ell\in\mathbb{N}$.

Řekneme, že G je ℓ-hranově souvislý, jestliže

i) $\#V>1$

ii) $G\setminus F$ je souvislý po každou $F\subset E, \#F<\ell$.

Maximální $\ell\in\mathbb{N}$ takové, že G je ℓ-hranově souvislý nazveme hranovou souvislostí G, označíme $\varkappa'(G) := \ell$

Definice: A-B cesta, oddělení A od B

Buďte $G=(V,E)$ graf, $A,B\subset V$, pak definujeme:

- Cestu $P=x_0,x_1,\dots,x_k$ nazveme A-B cestou, pokud $P\cap A=\{x_0\}$ a $P\cap B=\{x_k\}$
- Pokud $X\subset V\cup E$ je taková, že libovolná A-B cesta v G obsahuje hranu nebo vrchol z X, pak řekneme, že X v G odděluje A od B

17. přednáška

Poznámka:

- $A \cap B \subset X$
- G - k-vrcholově souvislý $\Rightarrow$ žádné dva vrcholy nejsou odděleny méně, než k vrcholy
- $X := A$ odděluje A od libovolné $B \subset V$

Věta:

Nechť $G=(V,E)$ je graf, $\# V > 1$.
Potom $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Důkaz:

i) $\kappa'(G) \leq \delta(G)$:
Množina hran incidentních s vrcholem v, odděluje v G $\{v\}$ od ostatních vrcholů.

ii) $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$:
$F \subset E$ je minimální taková, že $G \setminus F$ není souvislý
Chceme ukázat: $\kappa(G) \leq \# F$

Pro $v \in V$ položme $C_v :=$ komponenta $G \setminus F$ obsahující v.
Může nastat:
a) $\exists v \in V$, který není koncem žádné hrany v F:

w_i

- Sousedé v v C_v, které jsou zároveň konce hran z F, oddělují v G $\{v\}$ od $G \setminus C_v$

$\rightarrow$ různé w_i jsou konce různých hran z F (jinak spor s minimalitou F)

$\rightarrow \kappa(G) \leq \# F$

b) Každý vrchol G je koncem nějaké hrany z F

Potom $v \in V$ fixní libovolné.

· každý vrchol w, soused v tak, že $\{w, v\} \notin F$ je vrcholem C_v

· opět z minimality F:
tyto vrcholy jsou konce různých hran z F

$\rightarrow d_G(v) \leq \# F$

$N(v)$ odděluje v G $\{v\}$ od „zbytku grafu" (*)

$\rightarrow \kappa(G) \leq \# F$

Jediná situace, kdy mi úvaha (*) nepomůže je případ, kdy „zbytek grafu" je prázdný a navíc to je pravda pro $\forall v \in V$.

To ale znamená, že $G = K_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a pro ně známe:

$\kappa(K_n) = n - 1 = \kappa'(K_n)$

Věta: Menger
Nechť $G = (V, E)$ je graf, $A, B \subset V$.
Minimální počet vrcholů (tzn. $X \subset V$), které v G odděluje A od B je roven maximálnímu počtu disjunktních A-B cest v G

Poznámka: Značení

• $K(G,A,B) :=$ minimální počet vrcholů, které v G oddělují A od B

Tvrzení: Vlastnosti $K(G,A,B)$

i) $K(G,A,B) \le \min\{\#A, \#B\}$

ii) Pokud v G neexistují žádné A-B cesty i prázdná množina odděluje A od B a $K(G,A,B)=0$

iii) Pokud $A \subset B$:
- A odděluje A od B
- Každá $X \subset V$, která odděluje A od B musí obsahovat A

$\Rightarrow K(G,A,B) = \#A$

iv) A, B_1, B_2 tak, že $B_1 \subset B_2 \Rightarrow K(G,A,B_1) \le K(G,A,B_2)$

Důkaz (Menger):

• Pokud v G neexistuje A-B cesta, pak je výrok triviální.

→ BÚNO máme alespoň jednu A-B cestu

• $k = K(G,A,B)$

V G není více než k disjunktních A-B cest.

→ Mengera dokážeme tak, že k disjunktních A-B cest najdeme

Lemma:

Máme-li v G $n < k(G,A,B)$ disjunktních A-B cest $P_1,\dots,P_n$, pak v G máme $n+1$ disjunktních cest $Q_1,\dots,Q_{n+1}$ tak, že je-li $b \in B$ koncem nějaké P_i, pak b je také koncem nějaké Q_j.

Důkaz (lemma):

Indukcí na $\beta := \#(V \setminus B)$

• $\beta = 0 \Rightarrow V = B$ a tedy $A \subset B$

Máme $P_1,\dots,P_n$ disjunktních A-B cest, kde $n < \#A$

cesty nulové délky na n vrcholech A → přidáme nějaký vrchol $v \in A \setminus \{P_k\}_{k=1}^{n}$

• Předpokládáme platnost pro všechna $B_z < B_0$ pro nějaké $B_0 \geq 1$ a ukážeme platnost pro B_0

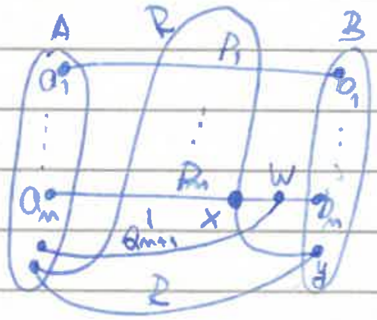
Mějme $P_1, \dots, P_n$ disjunktních A-B cest a $n < k(G,A,B)$

konce cest P_i: b_i konec v B

a_i konec v A

→ například $\{b_1, \dots, b_n\}$ neodděluje A od B

→ máme v G A-B cestu R : $R \cap \{b_1, \dots, b_n\} = \emptyset$.



• R disjunktní s $P_1, \dots, P_n$ => máme hotovo

• R není disjunktní s $P_1, \dots, P_n$:

Označme x := poslední průsečík (směrem k B) ~~průsečík~~ R s nějakou P_i (BÚNO $i=n$)

Uvažujme množinu $B' := B \cup V(xRy) \cup V(xP_nb_n)$

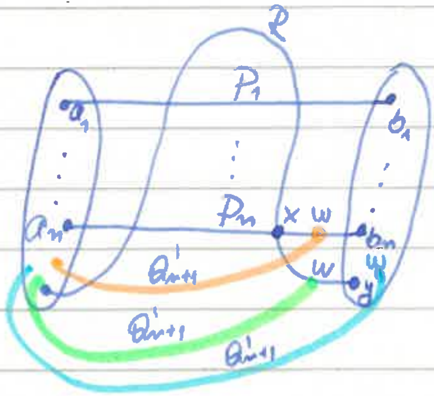
Protože $\#B' > \#B$ tak z IP máme pro $P_1, \dots, P_{n-1}$, a P_nx disjunktních A-B' cesty $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ disjunktních A-B' cest tak, že

$\{b_1, \dots, b_{n-1}, x, w\}$ jsou konce těchto cest v B'

Hledáme $(n+1)$ disjunktních A-B cest $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ s konci (v B) $\{b_1, \dots, b_n, z\}$

18. přednáška

3 varianty podle w:



a) $w \in V(xP_n b_n)$

$Q_i := Q_i', \forall i \in \widehat{n-1}$

$Q_n := Q_n' x R y$

$Q_{n+1} := Q_{n+1}' w P_n b_n$

b) $w \in V(xRy)$ (nutně $w \neq x$)

$Q_i := Q_i', \forall i \in \widehat{n-1}$

$Q_n := Q_n' x P_n b_n$

$Q_{n+1} := Q_{n+1}' w R y$

c) $w \in B' \setminus (V(x, P_n b_n) \cup V(xRy))$

$Q_i := Q_i', \forall i \in \widehat{n-1}$

$Q_n := Q_n' x P_n b_n$

$Q_{n+1} := Q_{n+1}'$

Definice: Nezávislé cesty

Nechť $G=(V,E)$ je graf.

Cesty v G nazveme nezávislé, pokud žádná z nich neobsahuje vnitřní (tj. nekoncový) vrchol jiné.

Definice: Vějíř (fan)

Nechť $G=(V,E)$ je graf, $a \in V$, $B \subset V$.

Množinu $\{a\}$-B cest (a-B cest) nazveme vějířem v G, pokud každé z nich mají společný pouze vrchol a.

Důsledek:

Nechť $G=(V,E)$ je graf, $a,b\in V, a\neq b$, $B\subset V\setminus\{a\}$, $\{a,b\}\notin E$.

i) Minimální počet vrcholů, které v G oddělují a od b je roven maximálnímu počtu nezávislých a-b cest v G.

ii) Minimální počet vrcholů, které v G oddělují a od B je roven maximálnímu počtu cest, které v G tvoří a-B vějíř.

Důkaz:

Aplikace Mengerovy věty.

Věta: Globální verze Mengerovy věty

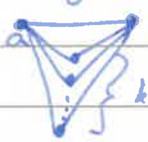
Nechť $G=(V,E)$ je graf, $k\in\mathbb{N}$.

Potom G je k-vrcholově souvislý právě tehdy, když mezi libovolnou dvojicí vrcholů existuje k nezávislých cest.

Důkaz:

$\Leftarrow$: Nechť mezi libovolnou dvojicí vrcholů máme k nezávislých cest

→ žádné 2 vrcholy nejsou v G odděleny méně, než k vrcholy

→ $a,b\in V$: 

b (musí vést)

$k-1$ vrcholů → $|V(G)|\geq k+1$

$\Rightarrow$: (sporem): Nechť G je k-vrcholově souvislý a existují $a,b\in V$ mezi, kterými je maximálně $k-1$ nezávislých cest

Abychom nebyli ve sporu s důsledkem i), musí platit, že $\{a,b\}\in E$.
Uvažujme proto $G' := G\setminus\{\{a,b\}\}$

→ v G' máme maximálně $k-2$ nezávislých a-b cest

důsledek i)

→ v G' $\exists X \subset V, \#X \leq k-2$: X v G' odděluje a od b

$\#V(G') = \#V(G) > k$ (z k-vrcholové souvislosti

→ Máme $w \in V \setminus (X \cup \{a,b\})$

Nutně X v G' odděluje w buď od a nebo od b

Jinak bychom měli a-w cestu a b-w cestu, které se vyhýbají X a jejich spojením je a-b cesta, která se vyhýbá X

BÚNO v G' X odděluje w od a:

Potom ale $X \cup \{b\}$ je množina maximálně $(k-1)$ vrcholů, které v G oddělují a od w

→ spor s k-souvislostí G

Planární grafy

Poznámka: Intuitivní definice
Pro planární graf existuje alespoň jedno tzv. rovinné nakreslení, tzn. nakreslení do roviny tak, že hrany se kříží/potkávají pouze ve vrcholech

Definice: Planární graf
Nechť $G = (V, E)$ je graf.
Řekneme, že G je planární (rovinný), jestliže existují:
i) $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$, prosté
ii) $\psi : E \to C$ (množina jednoduchých spojitých křivek v $\mathbb{R}^2$)
takové, že:
i) $\forall u, v \in V, \{u,v\} \in E$: $\varphi(u), \varphi(v)$ jsou koncové body $e = \{u, v\}$
ii) $\forall e, f \in E$: $\psi(e) \cap \psi(f) = \varphi(e \cap f)$

Tvrzení:
K_5 není planární graf.

Věta: Euler
Nechť $G = (V, E)$ je planární graf, který je souvislý.
Pak pro každé rovinné nakreslení $\hat{G}$ grafu G platí:

$$\#V - \#E + \Phi(\hat{G}) = 2,$$

kde $\Phi(\hat{G})$ je počet oblastí na, které se rovina nakreslením $\hat{G}$ rozpadne.

Důkaz:
Indukcí na $\Phi(\hat{G})$
- $\Phi(\hat{G}) = 1 \Rightarrow G$ je strom

Pro strom $\#V = \#E + 1 \to \#V - \#E + \underbrace{\Phi(\hat{G})}_{1} = 2$

• $\Phi(\hat{G}) - 1 \to \Phi(\hat{G})$

Nechť $e \in E$ leží na hranici nějaké oblasti

Uvažujme $G \setminus e$: $\# V(G\setminus e) = \# V(G)$

$\# E(G \setminus e) = \# E(G) - 1$

$\Phi(\hat{G} \setminus e) = \Phi(\hat{G}) - 1$

$\to \# V(G\setminus e) - \# E(G \setminus e) + \Phi(\hat{G} \setminus e) = 2$

$\to \# V(G) - \# E(G) + \Phi(\hat{G}) = 2$

Definice: Dělení hrany

Nechť $G = (V, E)$ je graf, $e = \{u, v\} \in E$.

Patom definujeme dělení hrany e jako graf

$$G \% e := (V \cup \{\alpha\}, E \setminus \{u, v\} \cup \{\{u, \alpha\}, \{\alpha, v\}\}),$$

kde $\alpha \notin V$.

Poznámka:

G je planární $\iff$ ~~a~~ $G \% e$ je planární

Definice: Dělení grafu

Graf H nazveme dělením grafu G, vznikne-li z G konečným počtem opakování operace dělení hrany.

19. přednáška

Věta: Kuratowski
Graf G není planární právě tehdy, když obsahuje jako svůj podgraf dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

Poznámka:
K_5: úplný graf na 5 vrcholech
$K_{3,3}$: Úplný bipartitní graf: $\#V_1 = \#V_2 = 3$

Důkaz:
$\Leftarrow$: jasné
$\Rightarrow$: příliš těžké

Poznámka:
Pro každou plochu existuje konečný počet „zakázaných" grafů takových, že každý graf G lze namalovat do této plochy bez křížení hran právě tehdy, když neobsahuje jako podgraf dělení nějakého zakázaného grafu.

Naopak, pro každý graf existuje plocha do níž je možné jej namalovat bez křížení hran.

Věta:
Nechť $G=(V,E)$ je souvislý planární graf (bez násobných hran a smyček) a nechť $\#V \geq 3$.
Potom
$$\#E \leq 3\#V - 6$$

Důsledek:
K_5 není planární graf

Věta:
Nechť $G=(V,E)$ je souvislý planární graf (bez násobných hran a smyček). Potom

$$\delta(G) \leq 5$$

Důkaz:
Zřejmě $\delta(G)\cdot \#V \leq \sum_{v\in V} d_G(v) = 2\#E$.

Z toho plyne

$$\delta(G)\cdot\#V \leq 2\#E \leq 2(3\#-6) = 6\#V-12$$

$$\rightarrow \delta(G) \leq 6-\frac{12}{\#V} \xrightarrow{\delta(G)\in\mathbb{N}_0} \delta(G)\leq 5$$

Důsledek:
Je-li G planární, potom $\chi(G)\leq 6$

Důkaz (indukcí):
Uvažujme vrchol $v\in V$, který má nejmenší ~~[illegible]~~ stupeň.
Potom

$$d_G(v) = \delta(G) \leq 5$$

Graf $G\setminus v$ je z předpokladu možné obarvit 6 barvami. Když v opět přidáme, je jasné, že na něj jedna ze šesti barev vyjde, neboť má nejvýše 5 sousedů.

Věta:
Nechť $G=(V,E)$ je planární graf, potom $\chi(G) \leq 5$.

Věta: O čtyřech barvách
Každá politická mapa lze obarvit čtyřmi barvami tak, že žádné státy nemají stejnou barvu.

Definice: Minimální počet křížení
Minimální počet křížení (crossing number) $cr(G)$ grafu G je minimální počet dvojic hran, které se po namalování grafu G do roviny kříží.

Poznámka:
- $cr(G)$ není počet překřížení hran G
- G je planární právě tehdy, když $cr(G)=0$

Věta:
Nechť $G=(V,E)$ je graf, potom platí:

$$\#E - 3\#V + 6 \leq cr(G)$$

Věta:
Nechť $G=(V,E)$ je graf, $m := \#E$, $n := \#V$ a nechť $m \geq 4n$.
Potom platí:

$$cr(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$$

Poznámka: Vlastnosti adjacenční matice

Buď $G=(V,E)$ graf na $n\in\mathbb{N}$ vrcholech, $\mathbb{A}\in\{0,1\}^{n,n}$ jeho adjacenční matice, tj:

$$\mathbb{A}_{ij} := \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- $\mathbb{A}$ je reálná, nezáporná a symetrická
  → existuje unitární matice $\mathbb{U}$: $\mathbb{D} := \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

- $\mathbb{A}_{ii} = 0$, $\forall i \in \hat{n}$ → $\mathrm{Tr}\,\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

- Nechť $k\in\hat{n}$, potom $\mathbb{A}^k_{ij}$ je roven počtu sledů délky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j

- $\mathbb{A}^2_{ii} = d_G(v_i)$

- $\mathrm{Tr}\,\mathbb{A}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2\#E$

- Vlastní čísla uspořádáme tak, aby byla uspořádána podle velikosti. Největší vlastní číslo označíme Λ:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \Lambda$$

- $\|\mathbb{A}\| = \rho(\mathbb{A}) = \Lambda$

Věta:

Je-li graf G bipartitní, je spektrum jeho adjacenční matice symetrické kolem počátku na reálné ose.

Důkaz:

Adjacenční matice bipartitního grafu má při vrcholovém uspořádání vrcholů tvar

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^T & 0 \end{pmatrix}$$

Nechť nyní $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, potom $\mathbb{A}x = \lambda x$, pro nějaké $x \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{B}x_2 = \lambda x_1 \wedge \mathbb{B}^T x_1 = \lambda x_2$$

Nyní místo vektoru $\binom{x_1}{x_2}$ vezmeme vektor $\binom{x_1}{-x_2}$, pro něj platí:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{B}x_2 \\ \mathbb{B}^T x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \rightarrow -\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$$

Definice: Permutační matice

Permutační matice je regulární matice $\mathbb{P} \in \{0,1\}^{n,n}$ taková, že obsahuje právě n jedniček.

Poznámka:

Každý sloupec $\mathbb{P}$ má normu 1 a každé dva různé sloupce jsou navzájem ortogonální.

$\rightarrow \mathbb{P}^T\mathbb{P} = \mathbb{I}$

20. přednáška

Definice: Rozložitelná matice

Řekneme, že matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je rozložitelná, právě když existuje permutační matice P tak, že

$$P^T A P = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

kde B_{11}, B_{22} jsou čtvercové bloky řádu nejméně 1.
V opačném případě se A nazývá nerozložitelnou.

Věta:
Adjacenční matice grafu G je nerozložitelná právě tehdy, když G je souvislý.

Věta:
Buď A nezáporná nerozložitelná matice řádu $n > 1$.
Potom $\rho(A) \in \sigma(A)$.

Jestliže navíc existuje $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $\alpha \neq 1$ takové, že $\alpha\rho(A) \in \sigma(A)$, potom existuje diagonální matice $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $|d_i| = 1$, $\forall i \in \hat{n}$ taková, že

$$AD = \alpha DA$$

Věta:
Graf G je bipartitní právě tehdy, když je spektrum jeho adjacenční matice symetrické kolem počátku na reálné ose.

Důkaz:
Implikaci $\Rightarrow$ jsme již dokázali v předchozích větách.
Zbývá tedy implikace $\Leftarrow$:

$\Leftarrow$: Nechť $\sigma(A)$ je symetrická množina vůči počátku na reálné ose

i) Nechť G je souvislý:

Potom A je nerozložitelná a z předpokladu symetrie plyne, že existuje $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ takový, že:

$$AD = DA \quad (*)$$

a nechť BÚNO $d_1 = 1$.

Porovnáním obou součinů $(*)$ dostáváme:

$$a_{ij} d_j = -d_i a_{ij} \Rightarrow d_i = -d_j.$$

Protože G je souvislý, lze se z každého bodu dostat do libovolného jiného, a tak postupnou aplikací právě odvozeného pravidla (s určením $d_1 = 1$) dostaneme:

$$d_i = \pm 1, \text{ pro všechna } i \in \hat{n}$$

Nyní provedeme rozklad množiny vrcholů

$$V_1 := \{ i \mid d_i = +1 \}, \quad V_2 := \{ i \mid d_i = -1 \}$$

Je zřejmé, že V_i jsou neprázdné a uvnitř V_1 a V_2 nevede hrana

ii) Nechť G není souvislý:

Označme $G_1, \dots, G_\ell$ jeho komponenty.

Potom jeho vrcholy tak, že $\mathbb{A}$ má tvar:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & & & \\ & \mathbb{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{A}_\ell \end{pmatrix}$$

Nechť $-\lambda \in \sigma(\mathbb{A}_i)$.
Potom protože G_i je komponenta, tak $\mathbb{A}_i$ je nerozložitelná a tedy $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}_i)$.

Podle i) je G_i bipartitní a podle druhé implikace věty je celé spektrum $\mathbb{A}_i$ symetrické.

Komponentu G_i můžeme tedy z G odstranit a adjacenční matice výsledného grafu bude mít stále symetrické spektrum.

$$V_1 := \bigcup_{i=1}^{\ell} V_1^i, \quad V_2 := \bigcup_{i=1}^{\ell} V_2^i$$

Věta:
Nechť $\mathbb{A} \geq 0$.
Potom $\rho(\mathbb{A})$ je vlastní číslo a vlastní vektor k němu lze zvolit nezáporný.

Věta:

Nechť G je graf, $\mathbb{A}$ jeho adjacenční matice, $\Lambda := \max \sigma(\mathbb{A})$.
Potom platí:

$$\delta(G) \leq \Lambda \leq \Delta(G)$$

Důkaz:

Nechť x je nezáporný vlastní vektor matice $\mathbb{A}$: $\mathbb{A}x = \Lambda x$.
Zvolme jej tak, že $\max_{i \in n} x_i = 1$ a označme $k := \arg\max_{i \in n} x_i$

- $\Lambda = (\Lambda x)_k = (\mathbb{A}x)_k \leq \left(\mathbb{A}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)_k = \begin{pmatrix}d(v_1)\\ \vdots\\ d(v_n)\end{pmatrix}_k \leq \Delta(G).$

- $\Lambda = \max_{\|x\|=1} x^T \mathbb{A} x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1)^T \mathbb{A} \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{n}(1,\dots,1)\begin{pmatrix}d(v_1)\\ \vdots\\ d(v_n)\end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(v_k) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta(G) = \delta(G)$$

Důsledek:

Je-li G souvislý graf, tak platí:

$$\Lambda = \Delta(G) \iff (\delta(G) = \Lambda = \Delta(G))$$

Věta: (Brower)

Nechť f je spojité zobrazení uzavřené koule $B \subset \mathbb{R}^d$ do B.
Potom f má pevný bod, tj:

$$\exists x \in B : f(x) = x$$