Vrcholová barevnost grafu

Definice: Nechť $G = (V, E)$ je obyčejný graf a $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $\phi : V \mapsto \{1, 2, \ldots, k\}$ nazýváme k-vrcholovým obarvením grafu G. Pokud

$$\phi(u) \neq \phi(v) \quad \text{pro každou hranu } \{u, v\} \in E,$$

nazveme k-vrcholové obarvení ϕ vlastním. Minimální k takové, že graf G má vlastní k-vrcholové obarvení, se nazývá vrcholová barevnost grafu a značí se $\chi(G)$.

Poznámka 1:

i) Když interpretujeme zobrazení ϕ jako obarvení každého vrcholu grafu jednou z k barev, pak vrcholová barevnost grafu je minimální počet barev, kterými lze obarvit vrcholy grafu tak, aby každá hrana měla různobarevné konce.

ii) Pro každý podgraf H grafu G platí, že $\chi(H) \leq \chi(G)$.

iii) Když graf G má r komponent $G_1, \ldots, G_r$, pak $\chi(G) = \max\{\chi(G_i) \mid i = 1, \ldots, r\}$.

Příklad 1: Úplný graf na n vrcholech má zřejmě vrcholovou barevnost $\chi(K_n) = n$. Všechny jiné grafy na n vrcholech už mají barevnost menší než n, protože ubráním jediné hrany z úplného grafu, dostaneme graf jehož barevost je $n - 1$.

Věta 1: *Nechť $G = (V, E)$ je obyčejný graf na n vrcholech. Pak*

$$\chi(G) \geq \omega(G) \qquad a \qquad \alpha(G).\chi(G) \geq n.$$

Důkaz: První nerovnost plyne z toho, že jedním z podgrafů grafu G je klika velikosti $\omega(G)$ a jenom na vlastní obarvení vrcholu této kliky je zapotřebí $\omega(G)$ barev.

Pro důkaz druhé nerovnosti uvažujme vlastní obarvení vrcholů grafu G minimálním počtem barev, tedy $\phi : V \mapsto \{1, 2, \ldots, \chi(G)\}$. Pro každou barvu i označme V_i množinu těch vrcholů, které dostaly barvu i. Zřejmě $V_1 \cup V_2 \ldots \cup V_{\chi(G)}$ je rozklad množiny V.

Mezi vrcholy, které dostaly barvu i, není žádná hrana, tedy množina V_i, tvoří nezávislou množinu a její velikost nepřevyšuje maximální velikost nezávisle množiny grafu, symbolicky $\#V_i \leq \alpha(G)$. Celkově

$$n = \#V = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \#V_i \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \alpha(G).\chi(G).$$

Poznámka 2: Pro graf G s barevností $\chi(G) = 2$ definuje vlastní obarvení vrcholů dvěma barvami rozklad množiny V na dvě nezávislé neprázdné podmnožiny V_1 a V_2, tj. G je bipartitní. Naopak, každý bipartitní graf s alespoň jednou hranou má vrcholovou barevnost 2.

Proto rozhodnout, zda daný graf má barevnost 2, je stejné náročné, jako rozhodnout, zda graf obsahuje kružnici liché délky. To lze zjistit algoritmem polynomiálním v počtě vrcholů. Na druhé straně se ví, že pro každé $k \geq 3$ je úloha určit, zda $\chi(G) = k$, už NP-úplná.

Věta 2: *Nechť $G = (V, E)$ je obyčejný graf s maximálním stupněm Δ. Pak*

$$\chi(G) \leq \Delta + 1.$$

Důkaz: Důkaz provedeme indukcí na n, což bude značit jako obvykle počet vrcholů grafu. Obyčejný graf s jediným vrcholem má $\Delta = 0$ a $\chi(G) = 1$, takže tvrzení platí.

Nechť G je graf s $n > 1$ vrcholy a v jeho vrchol s maximálním stupněm $d(v) = \Delta$. Uvažujme podgraf G' grafu G idukovaný množinou $V - \{v\}$. Označme Δ' jeho maximální stupeň. Zřejmě $\Delta' \leq \Delta$. Protože G' má $n - 1$ vrcholů, je podle indukčního předpokladu

$$\chi(G') \leq \Delta' + 1 \leq \Delta + 1.$$

Proto G' lze obarvit $\Delta + 1$ barvami tak, že hrany G' mají různobarevné konce. Protože vrchol v měl v grafu G právě Δ sousedů, je mezi $\Delta + 1$ barvami alespoň jedna, která se při obarvení grafu G' nevyskytuje na vrcholech, které byly sousedy vrcholu v v grafu G. Obarvíme-li touto barvou vrchol v a ostatním vrcholům ponecháme barvu, kterou byly obarvené v G', dostaneme vlastní obarvení celého G pomocí $\Delta + 1$ barev. Minimální počet barev potřebných k vlastnímu obarvení G může být ve skutečnosti i menší.

Věta 3: *Pro vrcholovou barevnost grafu G s n vrcholy a jeho doplňku $\overline{G}$ platí:*

$$\chi(G).\chi(\overline{G}) \geq n \qquad a \qquad \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

K důkazu této věty potřebujeme dvě lemmata.

Lemma 1: *Nechť $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou obyčejné grafy. Pak platí*

$$\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1).\chi(G_2),$$

kde sjednocením dvou grafů se rozumí graf $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Důkaz: Nejdříve předpokládejme, že oba grafy mají stejnou množinu vrcholů $V = V_1 = V_2$.

Označme $\phi_1 \colon V \mapsto \{1, 2, \ldots, \chi(G_1)\}$ a $\phi_2 \colon V \mapsto \{1, 2, \ldots, \chi(G_2)\}$ vlastní obarvení grafu G_1 respektive G_2. Definujme zobrazení

$$\psi : V \mapsto \{1, 2, \ldots, \chi(G_1)\} \times \{1, 2, \ldots, \chi(G_2)\}$$

předpisem $\psi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v))$. Je-li $\{u, v\} \in E = E_1 \cup E_2$, pak buď $\{u, v\} \in E_1$, a potom $\psi_1(u) \neq \psi_1(v)$ nebo $\{u, v\} \in E_2$, a pak $\psi_2(u) \neq \psi_2(v)$. V každém případě

$$\psi(u) \neq \psi(v) \quad \text{pro každou hranu } \{u, v\} \in E = E_1 \cup E_2,$$

Protože kartézský součin $\{1, 2, \ldots, \chi(G_1)\} \times \{1, 2, \ldots, \chi(G_2)\}$ má stejný počet prvků jako množina $\{1, 2, \ldots, \chi(G_1).\chi(G_2)\}$, existuje prosté zobrazení B mezi těmito dvěma množinami. Prosté zobrazení přiřadí různým vzorům různé obrazy, a tím pro složené zobrazení $B \circ \psi : V \mapsto \{1, 2, \ldots, \chi(G_1).\chi(G_2)\}$ platí

$$B(\psi(u)) \neq B(\psi(v)) \quad \text{pro každou hranu } \{u, v\} \in E.$$

$B \circ \psi$ je tedy vlastní obarvení grafu $G_1 \cup G_2$ pomocí $\chi(G_1).\chi(G_2)$ barev. Tím je lemma dokázano.

Lemma 2: *Nechť množina vrcholů obyčejného grafu* $G = (V, E)$ *má rozklad* $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ *takový, že* $(\forall i, j \in \{1, \ldots, k\},\ i \neq j)\,(\exists x_i \in V_i)\,(\exists x_j \in V_j)\,(\{x_i, x_j\} \notin E)$. *Pak*

$$\chi(G) \leq \#V - k + 1.$$

Důkaz: Důkaz provedeme indukcí na k; tvrzení pro $k = 1$ je zřejmé. Nechť $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ je rozklad množiny vrcholů grafu G s vlastností požadovanou ve znění lemmatu a nechť $k > 1$. Na podgraf G' grafu G, který je indukovaný množinou $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}$, lze použít indukční předpoklad. Tedy vrcholy G' lze obarvit vlastním obarvením ϕ pomocí $\#V - \#V_k - (k-1) + 1 = \#V - \#V_k - k + 2$ barev. Obarvení ϕ rozšíříme na celý graf G tak, že použijeme $\#V_k$ nových, zatím nepoužitých barev: každý vrchol ve V_k dostane jednu z těchto nových barev. Je zřejmé, že máme vlastní obarvení celého grafu G. Použili jsme však $\#V - k + 2$ barev. To je o jednu víc než tvrdí lemma. Ukážeme proto, jak jednu barvu lze ušetřit. Pro každé $i = 1, \ldots, k-1$ najdeme podle předpokladu vrcholy $x_i \in V_i$ a $y_i \in V_k$ tak, že $\{x_i, y_i\} \notin E$. Protože množina $V - \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ má $\#V - k + 1$ prvků, což je o jeden méně než použitých barev, existuje mezi $\#V - k + 2$ barvami barva, řekněme b, která se vyskytuje pouze na vrcholech z množiny $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$. Každý vrchol x_i, který má barvu b, přebarvíme barvou vrcholu y_i. Barvu ostatních vrcholů neměníme. Snadno se přesvědčíme, že toto obarvení je vlastní. Barva b teď není použitá.

Důkaz věty: Podle lemmatu 1 je

$$n = \chi(K_n) = \chi(G \cup \overline{G}) \leq \chi(G).\chi(\overline{G}).$$

Tím je první nerovnost dokázána.

Pro důkaz druhé nerovnosti označme $k = \chi(G)$. Uvažujme vlastní k-vrcholové obarvení ϕ grafu G. Množiny $V_i := \{v \in V \mid \phi(v) = i\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ tvoří rozklad množiny vrcholů V. Přitom pro různé barvy i, j existuje hrana s jedním koncem ve V_i a druhým ve V_j. (V opačném případě by vrcholy z množiny V_j bylo možné obarvit také barvou i, aniž bychom v celém grafu měli hranu se stejnobarevnými konci. To by znamenalo, že máme vlastní obarvení grafu G pomocí $k - 1$ barev, což by bylo ve sporu s $\chi(G) = k$.)

Rozklad $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ množiny vrcholů grafu $\overline{G}$ proto vyhovuje podmínkám lemmatu 2 a podle něj

$$\chi(\overline{G}) \leq n - k + 1 = n - \chi(G) + 1.$$

Definice: Obyčejný graf $G = (V, E)$ nazveme k-kritickým, když $\chi(G) = k$ a pro každý vlastní podgraf $H \subsetneq G$ platí $\chi(H) < k$.

Poznámka 3:

i) Každý graf G s barevností $\chi(G) = k$ má podgraf G', který je k-kritický. Tento podgraf lze najít tak, že z množiny M všech podgrafů grafu G, které mají barevnost k (tato množina obsahuje alespoň samotný graf G) vezmeme takový podgraf G', jehož žádný podgraf už do M nepatří. Protože relace "býti podgrafem" je uspořádání na M a protože M je konečná, je zřejmé, že takové G' existuje.

ii) Každý k-kritický graf je souvislý. To plyne z bodu iii) Poznámky 1.

Věta 4: *Minimální stupeň k-kritického grafu je alespoň $k-1$.*

Důkaz: (sporem) Nechť v grafu $G = (V, E)$ existuje vrchol v takový, že $d(v) \leq k-2$. Jelikož G je k-kritický, na vlastní obarvení podgrafu G' grafu G indukovaného množinou $V - \{v\}$ stačí $k-1$ barev. Protože v měl v G nanejvýš $k-2$ sousedů, jedna barva z $k-1$ barev se na obarvení těchto sousedů nepoužila. Touto barvou lze obarvit vrchol v a dostat tak obarvení celého grafu G pouze $k-1$ barvami, což je ve sporu s tím, že $\chi(G) = k$.

Aby nějaký graf měl minimální stupeň $\geq k-1$, pak musí mít alespoň k vrcholů. To už spolu s bodem i) Poznámky 3 implikuje následující důsledek.

Důsledek: *Každý graf s barevností k má alespoň k vrcholů se stupněm alespoň $k-1$.*

Příklad 2:
- Úplný graf K_n je n-kritický pro každé n; to plyne z Příkladu 1.
- 1-kritický graf je pouze graf s jediným vrcholem.
- 2-kritický graf je pouze graf s dvěma vrcholy spojenými hranou.
- 3-kritický graf podle Poznámky 3 nesmí být bipartitní, ale ubráním jediné hrany nebo vrcholu se bipartitním musí stát. Nebo jinak: 3-kritický graf musí obsahovat kružnici liché délky, ale ubráním libovolné hrany nebo vrcholu musejí kružnice liché délky z tohoto grafu vymizet. Je tedy jasné, že G je 3-kritický právě tehdy, když G je lichá kružnice C_{2n+1}.
- Není známá charakteristika 4-kritických grafů. Snadno se však přesvědčíme, že když k liché kružnici přidáme nový vrchol, který napojíme na všechny vrcholy liché kružnice, dostaneme 4-kritický graf.

Definice: Řez v obyčejném grafu $G = (V, E)$ je taková podmožina $S \subset V$, že podgraf G' grafu G indukovaný množinou $V - S$ má víc komponent než původní graf G.

Příklad 3:
- Je-li S řezem v kružnici C_n, pak $\#S \geq 2$. Ubráním pouze jednoho vrcholu z kružnice dostaneme souvislý graf (a to konkrétně cestu), tedy počet komponent se nezvýší.
- Úplný graf K_n nemá žádný řez.

Věta 5: *Žádný řez k-kritického grafu není klika.*

Důkaz: (sporem) Nechť $S = \{x_1, \ldots, x_s\} \subset V$ je klikou a současně řezem k-kritického grafu $G = (V, E)$. Označme $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_r = (V_r, E_r)$ komponenty podgrafu grafu G indukovaného množinou $V - S$. Protože S je řezem, je počet komponent $r \geq 2$. Z k-kritičnosti G plyne, že podgraf indukovaný množinou $V_2 \cup \ldots V_r \cup S$ lze obarvit $k-1$ barvami. Protože S je klika, musí být na obarvení S použito tolik barev, kolik má S vrcholů, tedy s. Barvy při tomto obarvení lze zpermutovat tak, aby vrchol $x_i \in S$ dostal barvu i, pro každé $i = 1, \ldots, s$. Rovněž podgraf indukovaný množinou $V_1 \cup S$ lze obarvit $k-1$ barvami, a to tak, že i zde budou mít vrcholy $x_i \in S$ barvu i, pro každé $i = 1, \ldots, s$. Dáme-li tato dvě obarvení dohromady, dostaneme vlastní obarvení celého grafu G pomocou $k-1$ barev, a to je spor.

Důsledek: *Samotný vrchol není řezem v k-kritickém grafu.*

Lemma 3: *Nechť $G = (V, E)$ je k-kritický graf s řezem $S = \{u, v\}$. Pak podgraf indukovaný množinou $V - \{u, v\}$ má dvě komponenty $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ takové, že*

i) každé obarvení podgrafu indukovaného množinou $V_1 \cup \{u, v\}$ pomocí $k-1$ barev přiřadí vrcholům u a v stejnou barvu;

ii) každé obarvení podgrafu indukovaného množinou $V_2 \cup \{u, v\}$ pomocí $k-1$ barev přiřadí vrcholům u a v různou barvu;

iii) přidáme-li k podgrafu indukovanému množinou $V_1 \cup \{u, v\}$ novou hranu $\{u, v\}$, je výsledný graf k-kritický;

iv) přidáme-li k podgrafu indukovanému množinou V_2 nový vrchol w a nové hrany $\{w, x\}$ pro každé $x \in V_2$ takové, že $\{u, x\} \in E$ nebo $\{v, x\} \in E$, je výsledný graf k-kritický.

Důkaz: Nechť počet komponent podgrafu indukovaného množinou $V - \{u, v\}$ je $r \geq 2$.

Sporem ukážeme, že množina vrcholů alespoň jedné z komponent má vlastnost množiny V_1 v tvrzení i). Kdyby ne, pak by pro množinu vrcholů V' každé komponenty platilo, že podgraf indukovaný $V' \cup \{u, v\}$ lze obarvit $k-1$ barvami tak, že vrcholy u a v mají při tomto obarvení různou barvu. Zpermutováním barev bychom mohli zařídit, aby vrchol u měl pokaždé barvu 1 a vrchol v barvu 2. Spojením těchto obarvení pro množiny všech komponent V' bychom dostali obarvení celého G pomocí $k-1$ barev, a to je spor. Stejným argumentem dokážeme, že množina vrcholů alespoň jedné z komponent musí mít vlastnost množiny V_2 v tvrzení ii).

Podgraf indukovaný množinami $V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}$, kde V_1 a V_2 mají vlastnosti i) a ii), nelze proto obarvit $k-1$ barvami. Z k-kritičnosti grafu G plyne, že $V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\} = V$, a tedy řezem $S = \{u, v\}$ se G rozpadne na graf s právě dvěma komponentami.

Pro důkaz iii) si nejdříve uvědomme, že z předchozí věty víme $\{u, v\} \notin E$. Z vlastnosti i) plyne, že když přidáme k podgrafu indukovanému množinou $V_1 \cup \{u, v\}$ novou hranu $\{u, v\}$ potřebujeme na obarvení k barev, ne méně. Potřebujeme ještě dokázat, že takto vzniklý graf, označme jej H, je k-kritický. Stačí ukázat, že ubráním libovolné hrany $e = \{a, b\}$ z tohoto grafu, získáme graf, který lze obarvit $k-1$ barvami. Víme, že když ubereme z celého G hranu $e = \{a, b\}$, pak na obarvení stačí $k-1$ barev. Protože vrcholy ubrané hrany e nejsou z V_2, je toto obarvení speciálně i obarvením podgrafu indukovaného na $V_2 \cup \{u, v\}$. Proto z vlastnosti ii) vrcholy u a v dostaly různou barvu, proto lze tyto vrcholy spojit umělou hranou, aniž bychom narušili vlastní obarvení. Máme tedy vlastní obarvení i grafu H pomocí $k-1$ barev. Bod iv) se dokazuje analogicky.

Důsledek: *Nechť G je k-kritický graf s řezem $S = \{u, v\}$. Pak*

$$d(u) + d(v) \geq 3k - 5$$

Toto tvrzení plyne z bodů iii) a iv) předchozího lemmatu a z toho, že v k-kritickém grafu je minimální stupeň alespoň $k-1$.

Věta 6: *Nechť $G=(V,E)$ je souvislý graf, který není ani klika ani lichá kružnice. Pak*

$$\chi(G) \leq \Delta\,.$$

Důkaz: A) Nejdříve ukážeme platnost věty pro k-kritické grafy. Pro $k=1,2,3$ je k-kritický graf klikou nebo lichou kružnicí, proto uvažujeme $k \geq 4$.

• Uvažujme nejdříve případ, že G má dvouprvkový řez $S=\{u,v\}$. Pak podle předchozího důsledku

$$2\Delta \geq d(v)+d(u) \geq 3k-5 = \underbrace{k-4}_{\geq 0} + 2k-1 \geq 2k-1 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta \geq k-\frac{1}{2}$$

To už implikuje $\Delta \geq k = \chi(G)$.

• Teď předpokládejme, že G nemá dvouprvkový řez. Protože G není klika a jako k-kritický graf je G souvislý, existují v G dva vrcholy se vzdáleností 2, tj. $\{u,v\} \notin E$ a existuje vrchol $w \in V$, takový, že $\{u,w\} \in E$ a $\{w,v\} \in E$. Podgraf G' grafu G indukovaný množinou $V-\{u,v\}$ je souvislý. Označíme-li n počet vrcholu v G, graf G' má $n-2$ vrcholů. Uspořádejme vrcholy grafu G do posloupnosti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takto: $v_1=u, v_2=v$ a zbylé vrcholy, tedy vrcholy grafu G', jsou uspořádány vzestupně podle vzdálenosti od w v grafu G', tj. pro posloupnost vrcholů $v_3, v_4, \ldots, v_n$ platí

$$3 \leq i < j \quad \Rightarrow \quad d_{G'}(w,v_i) \geq d_{G'}(w,v_j)$$

Zřejmě $v_n = w$, protože vzdálenost w od w je 0. Toto uspořádání zaručuje, že pro každé $i=1,2,\ldots,n-1$ existuje $j>i$ tak, že $\{v_i,v_j\}$ je hranou v G', tj. každý vrchol s výjimkou $v_n=w$ má doprava v posloupnosti alespoň jednu hranu. To znamená, že doleva má každý vrchol nanejvýš $\Delta-1$ hran.

Vrcholy v posloupnosti teď obarvíme Δ barvami takto: vrcholy $v_1=u$ a $v_2=v$ dostanou barvu 1. Když máme obarvené vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ pro $i<n$ obarvíme vrchol v_i. Ten má obarvených nanejvýš $\Delta-1$ sousedů, a tedy mezi Δ barvami najdeme jednu, kterou obarvíme v_i, aniž bychom vytvořili hranu se stejnobarevnými konci. Takto můžeme pokračovat v barvení až k vrcholu v_{n-1}. Vrchol $v_n=w$ má všechny sousedy, kterých je maximálně Δ už obarvené. Víme ale, že dva z jeho sousedů u a v mají stejnou barvu, tj. na sousedech w je použito $\leq \Delta-1$ barev. Tedy jedna barva je k dispozici pro obarvení samotného w. Je zřejmé, že popsaný algoritmus vyrobí vlastní obarvení grafu G.

B) Teď uvažujme libovolný obyčejný graf G s bareností $\chi(G) =: k$ Podle Poznámky 3 lze najít jeho k-kritický podgraf G'. Onačme Δ' maximální stupeň v G'. Zřejmě $\Delta' \leq \Delta$.

• Když G' není klika ani lichá kružnice, pak s použitím bodu A) platí

$$\chi(G) = \chi(G') \leq \Delta' \leq \Delta.$$

• V případě, že G' je klika nebo lichá kružnice, jedná se o Δ'-regulárný graf a $\chi(G') = \Delta'+1$. V tomto případě je G' vlastním podgrafem G. Protože G je souvislý, alespoň z jednoho vrcholu grafu G' vede v G další hrana, tj. $\Delta'+1 \leq \Delta$. Proto dostaneme odhad

$$\chi(G) = \chi(G') = \Delta' + 1 \leq \Delta.$$

Poznámka 4: Víme, jak odhadnout barevnost grafu zdola i shora: $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta + 1$. Žádná z těchto mezí není obecně dost blízká barevnosti. Např. bipartitní graf může mít Δ libovolně velké a přitom $\chi(G) = 2$. Následující konstrukce nám ukáže, že ani dolní mez $\omega(G)$ nemusí být dost těsná.

Konstrukce $(k+1)$-kritického grafu z k-kritického (J. Mycielsky)

Nechť $G = (V, E)$ je k-kritický graf. Definujme graf $H = (U, F)$ takto:
$U = \{(v, 0) | v \in V\} \cup \{(v, 1) | v \in V\} \cup \{y\}$
$F = \{\{(u, 0), (v, i)\} \mid \{u, v\} \in E, i = 0, 1\} \cup \{\{(v, 1), y\} \mid v \in V\}$

Graf H tedy sestává z původního grafu G - to je podgraf grafu H indukovaný množinou $\{(v, 0) \mid v \in V\}$, pak H obsahuje nezávislou množinu $\{(v, 1) \mid v \in V\}$, přičemž vrchol $(v, 1)$ - říkejme mu kopie - je napojený na stejné vrcholy jako originál $(v, 0)$ pro každé $v \in V$. Vrchol y je nový vrchol, který je napojený pouze na vrcholy představující kopie.

Ukážeme v několika krocích, že H je $(k+1)$-kritický graf.

- H má vlastní obarvení $k+1$ barvami.
  Když $\phi : V \mapsto \{1, 2, \ldots, k\}$ je vlastní obarvení grafu G pomocí k barev, pak obarvení ψ definované předpisem
  $$\psi(x) := \begin{cases} \phi(v), & \text{if } x = (v, 0) \text{ or } x = (v, 1) \\ k+1, & \text{if } x = y \end{cases}$$
  je vlastní obarvení graf H pomocí $k+1$ barev.

- H nemá vlastní obarvení méně než $k+1$ barvami.
  Pro spor předpokládejme, že $\psi : U \mapsto \{1, \ldots, k\}$ je vlastní obarvení grafu H. BÚNO, nechť barva vrcholu y je k. Protože vrchol y je v hraně se všemi vrcholy typu $(v, 1)$, žádný z těchto vrcholů nemá barvu k. Předpokládejme, že nějaký vrchol tvaru $(u, 0)$ dostal při obarvení ψ barvu k. Kopie tohoto vrcholu $(u, 1)$ má barvu jinou, řekněme $i \neq k$. Proto žádný ze sousedů vrcholu $(u, 1)$ nemá barvu i. Sousedi vrcholu $(u, 0)$ a sousedi vrcholu $(u, 1)$ jsou stejní, můžeme proto přebarvit vrchol $(u, 0)$ barvou i a toto upravené obarvení je opět vlastní. Tímto přebarvováním docílíme, že barva k se nebude vyskytovat na žádném vrcholu v $\{(u, 0) \mid u \in V\}$. Dostaneme tedy vlastní obarvení původního grafu G pomocí k barev, a to je spor.

- Ubráním hrany $\{(u, 0), (v, 0)\}$ pro libovolnou hranu $\{u, v\} \in E$, se zmenší barevnost H.
  Nechť $\phi : V \mapsto \{1, \ldots, k-1\}$ je obarvení $k-1$ barvami grafu G, ze kterého jsme ubrali hranu $\{u, v\}$. Definujme obarvení ψ takto:
  $$\psi(x) := \begin{cases} \phi(w), & \text{if } x = (w, 0) \text{ and } \ w \neq u, v \\ k, & \text{if } x = (u, 0) \text{ or } x = (v, 0) \\ \phi(w), & \text{if } x = (w, 1) \\ k, & \text{if } x = y \end{cases}$$

Snadno se lze přesvědčit, že toto obarvení je vlastním obarvením k barvami grafu H bez ubrané hrany $\{(u,0),(v,0)\}$.

- Ubráním hrany $\{(u,0),(v,1)\}$ pro libovolnou hranu $\{u,v\} \in E$, se zmenší barevnost H.
  Nechť $\phi : V \mapsto \{1,\ldots,k-1\}$ je obarvení $k-1$ barvami grafu G, ze kterého jsme ubrali hranu $\{u,v\}$. Definujme obarvení ψ takto:

$$\psi(x) := \begin{cases} \phi(w), & \text{if } x = (w,0) \text{ and } \; w \neq v \\ k, & \text{if } x = (v,0) \\ \phi(w), & \text{if } x = (w,1) \\ k, & \text{if } x = y \end{cases}$$

  Opět se lze přesvědčit, že ψ je vlastní obarvení grafu H, z nějž byla ubrána hrana $\{(u,0),(v,1)\}$.

- Ubráním hrany $\{y,(v,1)\}$ pro libovolný vrchol $v \in V$ se zmenší barevnost H.
  Nechť $\phi : V - \{v\} \mapsto \{1,\ldots,k-1\}$ je obarvení $k-1$ barvami grafu G, ze kterého jsme ubrali vrchol v vvcetně hran s ním incidentních. Vlastní obarvení ψ lze definovat takto:

$$\psi(x) := \begin{cases} \phi(w), & \text{if } x = (w,0) \text{ and } \; w \neq v \\ \phi(w), & \text{if } x = (w,1) \text{ and } \; w \neq v \\ k, & \text{if } x = (v,0) \text{ or } x = (v,1) \text{ or } x = y \end{cases}$$

Protože jsme ukázali, že barevnost H je $k+1$ a ubráním hrany libovolného typu klesne barevnost H, jedná se o $k+1$ kritický podgraf.

Mycielského konstrukce má ještě jednu pozoruhodnou vlastnost: když G neobsahuje trojúhleník, tj. kliku velikosti 3, tak ani H neobsahuje kliku velikosti 3. Lze tedy najít grafy s malou klikou a velkou barevnosti, formálně zapsáno:

Důsledek: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje graf G takový, že $\chi(G) = k$ a $\omega(G) = 2$.