① 20. 9. 2021

Teorie grafů

V .. konečná množina, $n \in \mathbb{N}$ $\binom{V}{n}$ = množina všech n-tic prvků množiny V

$$\#\binom{V}{n} = \binom{\#V}{n}$$

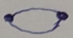
kombi. číslo

Def: Graf je $G = (V, E)$, kde V je konečná množina (vrcholů)

$E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.

= obyčejný / jednoduchý neorientovaný graf

nejsou v něm smyčky 

nejsou násobné hrany 

pro orientovaný graf $E \subseteq V \times V$ (usp. dvojice, známe směr)

Operace s grafy

pro $G = (V, E)$, $H = (U, F)$

- $G \cup H = (V \cup U, E \cup F)$
- $G \setminus D$ pro $D \subseteq E$: $G \setminus D = (V, E \setminus D)$
- pro $W \subset V$: $G \setminus W = (V \setminus W, E \cap \binom{V \setminus W}{2})$

pozn. pro $v \in V$ a $e \in E$

místo $G \setminus \{v\}$, $G \setminus \{e\}$ píšeme $G \setminus v$, $G \setminus e$

G .. graf, ⇒ $V(G)$ .. množina vrcholů G

$E(G)$ .. množina hran G

$2^{\binom{n}{2}}$ = # různých grafů na n vrcholech

Def: Grafy $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ jsou izomorfní pokud ∃ bijekce $\varphi : V \to U$, tž, že

$$\forall u, v \in V \left(\{u, v\} \in E \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in F \right)$$

znač. $G \sim H$

Def: Doplněk grafu $G = (V, E)$ je $G^c = (V, E \setminus \binom{V}{2})$.

hrany smažeme, dáme je kde nejsou.

- Graf G nazveme samokomplementární pokud $G \sim G^c$.

$\#V = n$, $\#E = m$ ⇒ $m \overset{!}{=} \overset{\#E(G^c)}{\binom{n}{2} - m}$ $m \overset{!}{=} \frac{n(n-1)}{4} \overset{!}{\in} \mathbb{N}_0$

G je samokomplementární ⇒ $\#V(G) \equiv 0 \mod 4$

$1 \mod 4$

Def: $G=(V,E)$.

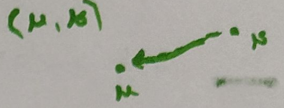
Stupeň vrcholu $v \in V$ je $d_G(v) = \#\{u \in V \mid \{v,u\} \in E\}$

outdegree / výstupní

v orientovaném grafu – výstupní stupeň vrcholu $d^-_G(v) = \#\{u \in V \mid (v,u) \in E\}$

vstupní stupeň vrcholu $d^+_G(v) = \#\{u \in V \mid (u,v) \in E\}$

indegree / vstupní



maximální stupeň vrcholu v G

$$\Delta(G) := \max_{v \in V} d_G(v)$$

minimální stupeň vrcholu v G

$$\delta(G) := \min_{v \in V} d_G(v)$$

Věta: $G=(V,E)$.

Pak $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E$.

Def: Posloupnost $(d_i)_{i=1}^{m}$ nezáporných čísel nazveme grafovou, pokud existuje graf $G=(V,E)$ takový, že $V=\{v_1, \dots v_m\}$ a $\forall i \in \hat{m} : (d_G(v_i) = d_i)$.

Věta: Posloupnost $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \dots \geq d_m$ je grafová $\iff$ posloupnost ⊛ $d_2-1, d_3-1, \dots d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_m$ je grafová.

Důkaz: ($\Leftarrow$) ke grafu s posl. ⊛ $d_2-1, d_3-1 \dots$ přidám 1 bod a napojím ho na $v_1, \dots v_{d_1+1}$ a získám graf s posl. $d_1, d_2, \dots, d_m$.

($\Rightarrow$) a) „máme štěstí"

vrchol odpovídající d_1 ozn. v_1 je napojený právě na vrcholy odpovídající $d_2, \dots d_{d_1+1}$

v tomto případě odebereme v_1 a $\forall$ hrany s ním incidentní

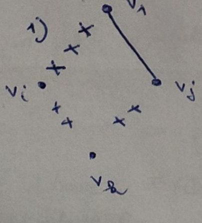
a dostáváme graf realizující ⊛

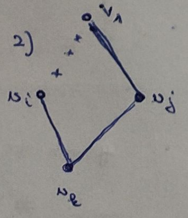
b) „nemáme štěstí"

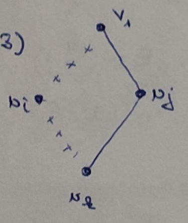
$\exists$ vrchol (ozn. v_i) t.ž. $i \in \{2, \dots d_1+1\}$, $\{v_1, v_i\} \notin E$

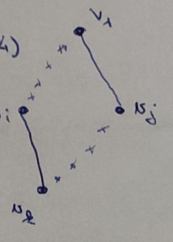
$\Rightarrow \exists j \in \{d_1+2, \dots m\} \wedge \{v_1, v_j\} \in E$.

nyní $\forall k \in \hat{m} \setminus \{1,i,j\}$ nastane jedna z násl. situací:

1)


2)


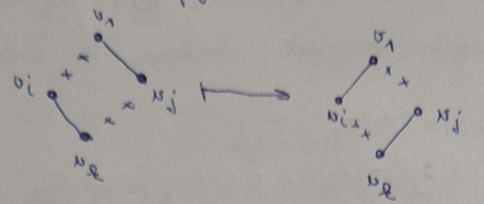
3)


4)


Tvrzení Pro alespoň jedno k nastane situace 4)

- Pokud by nastávaly pouze 1) - 3) $\Rightarrow d(v_i) \leq d(v_j)$
  + navíc $\{v_j, v_1\} \in E$ a $\{v_i, v_1\} \notin E$ $\Big\}$ $d(v_i) < d(v_j)$
  spor s uspořádáním

vezmeme graf a nalezenou konfiguraci změníme



stupně se nezmění

nový graf má stejné stupně vrcholů, navíc jsme odstranili situaci, která „způsobovala neštěstí."

Buď už „máme štěstí" nebo tento postup opakujeme pro další vrchol v_i.
□

21.9.2021

Výlet od TG

Brouwerova věta o pevném bodě

V: Nechť f je spojité zobrazení uzavřené koule $B \subset \mathbb{R}^d$ do B.
Potom f má pevný bod.

Důkaz: $d=1$

BÚNO $f: \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ $\quad g(x) = f(x) - x$ $\quad$ zjevně g spojité

$g(0) \geq 0$

$g(1) \leq 0$

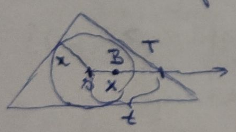
pevný bod

$\Rightarrow \exists x \in \langle 0,1\rangle,\ g(x) = 0 = f(x) - x \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x}}$

$d=2$

$f: B \to B$ spojité

$\varphi: B \to T$ bijekce



obraz x bod na polopřímce $\overline{SX}$ ve vzdálenosti $\frac{t}{r}|sx|$ od S

budeme dokazovat pro trojúhelník

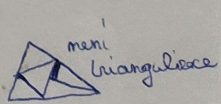
uvažujeme $\underbrace{\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}}: T \to T$ spojité

a Brouwer pevný bod $\quad \varphi(f(\varphi^{-1}(x))) = x \quad / \varphi^{-1} \quad \Rightarrow f(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x)$

$\varphi^{-1}(x)$ je pevný bod f

Def: Trojúhelníky $T_1, T_2, \dots T_k$ nazveme triangulací T pokud:

- $\bigcup_{i=1}^{k} T_i = T$
- $\forall i,j \in \hat{k},\ i \neq j,\ T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{společný vrchol} \\ \text{společná hrana} \end{cases}$
- Řekneme, že očíslování vrcholů triangulace $\bigcup_{i=1}^{k} T_i$ trojúhelníku $T = [t_0, t_1, t_2]_{\mathcal{R}}$ čísly 0, 1, 2 nazveme vlastní pokud:



⑤

pracujeme s konv. posloupnostmi (x_{m_m}), (y_{m_m}) a (z_{m_m})

$$\begin{matrix} (x_{m_m}) & (y_{m_m}) & (z_{m_m}) \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ \xi_m & \eta_m & \nu_m \\ \downarrow & & \\ w & & \end{matrix}$$

… m vrcholy m-tého slyšného trojúhelníčku

$$\eta_m = \underbrace{\eta_m - \xi_m}_{\to 0} + \xi_m \longrightarrow w$$

obvod jde k 0

$$\nu_m = \underbrace{\nu_m - \xi_m}_{\to 0} + \xi_m \longrightarrow w$$

$b(\xi_m) = 0 \Rightarrow d_0(\xi_m) > d_0'(\xi_m)$

$b(\eta_m) = 1 \Rightarrow d_1(\eta_m) > d_1'(\eta_m)$

$b(\nu_m) = 2 \Rightarrow d_2(\nu_m) > d_2'(\nu_m)$

limitně $d_i(w) \geq d_i'(w)$ $\quad i = 0,1,2$

$$1 = \underbrace{d_0(w)}_{\geq 0} + \underbrace{d_1(w)}_{\geq 0} + \underbrace{d_2(w)}_{\geq 0} \geq d_1'(w) + d_2'(w) + d_3'(w) = 1$$

$$\Rightarrow d_i(w) = d_i'(w) \quad \forall i \in \{0,1,2\}$$

spor s předpokladem

w je pevný bod f

Konec výkladu

Věta: Buď $(d_1, d_2, \dots d_m)$ m-tice nezáporných čísel takových, že $d_1 \geq d_2, \dots \geq d_m$. Potom je-li $(d_i)_{i=1}^m$ grafová, tak pro $\forall i \in \{1, 2, \dots m\}$ platí

$$\sum_{k=1}^{i} d_k \leq i(i-1) + \sum_{k=i+1}^{m} \min\{i, d_k\}$$

Důkaz: Mějme G na m vrcholech $V = \{1, 2, \dots m\}$ s danou graf. posl.. Fixni $i \in \hat{m}$, které hrany přispívají do součtu $\sum_{k=1}^{i} d_k$ v G:

a) hrany mezi vrcholy $\{1, \dots i\}$ přispívají dvojkou. Proto max. počet ~~sl~~ stupňů dosažený pomocí těchto hran je $2\binom{i}{2} = i(i-1)$ (Hand-shaking lemma)

b) další hrany přispívající k sumě vedou mezi u, v, kde $u \in \{1, 2, \dots i\}$ a $v \in \{i+1, \dots m\}$. Přispívají jedničkou. Přitom z každého vrcholu $v \in \{i+1, \dots m\}$ nemůže vést do prvních i vrcholů více hran než je i ale ani více hran než je $d(v)$

ok

Def: $G = (V, E)$. Graf $G' = (V', E')$ že $V' \subset V$ a $E' \subset \left(E \cap \binom{V'}{2}\right)$ nazveme podgrafem (subgrafem) G. Pokud $G' \neq G$ nazveme G' vlastním podgrafem G.

Graf $G[V'] = (V', E \cap \binom{V'}{2})$ se nazývá podgraf G indukovaný množinou vrcholů V'. Obecně jestliže pro podgraf $G' = (V', E')$ grafu G platí $E' = \left(E \cap \binom{V'}{2}\right)$, nazýváme G' indukovaným podgrafem G.

Def: Zavedeme násl. označení:

- úplný graf na n vrcholech

$$K_n = (\{1,2,\dots n\}, \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,2,\dots n\}, i \neq j\}) = (\hat{n}, \binom{\hat{n}}{2})$$

- cesta délky n na $n+1$ vrcholech

$$P_n = (\hat{n} \cup \{0\}, \{\{i-1,i\} \mid i \in \hat{n}\})$$

- „Hvězda"

$$S_n = (\hat{n} \cup \{0\}, \{\{0,i\} \mid i \in \hat{n}\})$$

- Kružnice délky n

$$C_n = (\hat{n}, \{\{i,i+1\} \mid i \in \{1,2,\dots n-1\}\} \cup \{\{1,n\}\})$$

Zobecněná definice grafu, adjacenční matice

Def: Buď V, E konečné množiny

Buď $\varphi: E \mapsto \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$. Potom uspořádanou trojici $G=(V,E,\varphi)$ nazýváme graf

- E – „jména" hran
- φ hraně přiřazuje koncové vrcholy
- zahrnuje násobné hrany i smyčky

Def: (zob. def. orient. grafu)

Buďte V, A konečné množiny. Buď $\varphi: A \longrightarrow \binom{V}{2} \cup (V \times V)$. Potom uspořádanou trojici $G=(V,A,\varphi)$ nazýváme orientovaný graf.

- def. připouští $\binom{V}{2}$ i neorient. hrany, smyčky jako $\varphi(k) = (v,v)$

Def: $G=(V,E)$, $n = \#V$. Adjacenční maticí grafu G (maticí sousednosti) rozumíme matici $A_G \in \{0,1\}^{n,n}$ pro kterou platí:

$$(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Zjevné vlastnosti A_G: - symetrická, tedy diagonalizovatelná s reálným spektrem

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = 0}_{\text{z definice}} = \operatorname{Tr} A_G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rightarrow \text{vl. čísla}$$

- $(A_G^2)_{ii} = d_G(v_i)$ (ze součinu)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \operatorname{Tr}(A_G^2) = \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2\#E$$

Souvislost

délka sledu = počet hran ve sledu!

Def: G=(V,E). Posl. vrcholů $v_0, v_1, \dots v_k$ nazveme sledem délky k, pokud platí $(\forall i \in \hat{k})(\{v_{i-1}, v_i\} \in E)$

Sled $v_0 \dots v_k$ nazveme cestou délky k, pokud navíc

$$(\forall i,j \in \{0,1,2,\dots k\})(i \neq j \Rightarrow v_j \neq v_i)$$

stačilo $v_i \neq v_{i-1}$ stačil ne?

Sled $v_0, v_1, \dots v_k$ pro který $v_0 = v_k$ nazveme cyklem délky k ~~pot~~.

Cyklus délky k nazveme kružnicí délky k pokud

$$(\forall i,j \in \{0,1,\dots k-1\})(i \neq j \Rightarrow v_j \neq v_i)$$

Def: G=(V,E), $u, v \in V$. Řekneme, že u a v jsou spojeny v G, existuje-li sled v G s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v.

tj. sled $u = v_0, v_1 \dots v_k = v$

Pozn: „být spojen" je ekvivalence na množině vrcholů V. Každý vrchol sám se sebou spojen sledem délky 0,

Def: Třídy ekvivalence podle relace „být spojen" nazýváme komponenty grafu G. Jejich počet značíme c(G). Je-li c(G)=1, říkáme, že graf G je souvislý

Věta Buď s_n počet souvislých grafů na n vrcholech. Pak platí

$$n \cdot 2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\, s_k\, 2^{\binom{n-k}{2}}$$

Dk: Vyjádříme počet všech dvojic (G,x), kde G je graf na n vrcholech a x jeho vrchol takového grafu, a to dvěma způsoby

1) Počet všech grafů je $2^{\binom{n}{2}}$ (dám hranu nebo ne), vrchol lze volit n způsoby

tedy $P = n \cdot 2^{\binom{n}{2}}$

2) Pevné $k \in \hat{n}$. Počet dvojic (G,x), kde x se nachází v komponentě G, která má k vrcholů

je $p_k = \binom{n}{k} k\, s_k\, 2^{\binom{n-k}{2}}$

protože
- a) $\binom{n}{k}$ způsoby lze vybrat k vrcholů z n
- b) k způsoby lze zvolit z k vrcholů vrchol x
- c) s_k je počet různých komponent (souvislých podgrafů), které lze na k vybraných vrcholech vytvořit
- d) $2^{\binom{n-k}{2}}$ je počet grafů na n−k vrcholech, které mohou být vytvořeny na n−k nevybraných vrcholech

Pro každou dvojici (G,x) se x nachází v komponentě o počtu vrcholů od 1 do n platí

$$n\, 2^{\binom{n}{2}} = \sum^{n} p_i$$

Adjacenční matice souvislého grafu

Věta: Buď A_G adjacenční matice G, nechť $k \in \hat{m}$. Potom prvek $(A_G^k)_{ij}$ je roven počtu sledů délky k z vrcholu v_i do v_j.

Důkaz: indukce podle k

- $k=1$ Dle def. $(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

  tedy ~~A~~ je počet sledů (přímo hrana) délky 1 z v_i do v_j

- $k \longrightarrow k+1$

$$(A_G^{k+1})_{ij} = \sum_{l=1}^{m} (A_G^k)_{il} \underbrace{(A_G)_{lj}}_{= 1 \Leftrightarrow \{v_l, v_j\} \in E} = \sum_{l=1}^{m} \overbrace{(A_G^k)_{il}}^{*}$$

$*$ počet sledů délky k z v_i do v_l. Sčítáme přes vrcholy v_l z nichž vede hrana do v_j. Proto $*$ navíc představuje počet sledů délky $k+1$ z v_i do v_j tak že předposledním vrcholem ve sledu je v_l. Sečtením přes v_l dostaneme všechny sledy délky $k+1$ z v_i do v_j.

Důsledek: Nechť A_G je adjacenční matice $G=(V,E)$, $m = \# V$. Potom G je souvislý $\Longleftrightarrow$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} A_G^k}_{} > 0$$

tj. když všechny prvky matice jsou kladné

Důkaz: ~~Ka~~ Mezi vrcholy je sled $\Leftrightarrow$ je mezi nimi cesta (lze odstranit opakující se vrcholy)
Každá cesta v G o m vrcholech má délku $\leq m-1$

$\boxed{\Rightarrow}$ G je souvislý $\Rightarrow \forall i,j \in \hat{m}, i \neq j$ ex. cesta (a tedy i sled) z v_i do v_j něj. délky $k \leq m-1$
$\Rightarrow (A_G^k)_{ij} > 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{m-1} A_G^k\right)_{ij} > 0$ ok

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall i,j \in \hat{m}$ $\left(\sum_{k=0}^{m-1} A_G^k\right)_{ij} > 0 \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots m-1\}$, že $(A_G^k)_{ij} > 0 \Rightarrow \exists$ sled délky k mezi v_i a v_j
$\Rightarrow G$ je souvislý

Bipartitní grafy

Def: Řekneme, že graf $G=(V,E)$ je bipartitní, existuje-li rozklad množiny V na dvě disjunktní neprázdné množiny V_1, V_2 takový, že $E \cap \binom{V_1}{2} = \emptyset$, $E \cap \binom{V_2}{2} = \emptyset$, tj. mezi vrcholy ve V_1 (V_2) nejsou hrany.

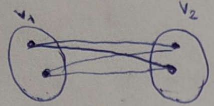
Pozn: Vrcholy lze očíslovat, že $A_G = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ pro bip. graf.

Def: Bipartitní graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ se nazývá úplný, pokud $(\forall u \in V_1)(\forall v \in V_2)(\{u,v\} \in E)$

Věta

Buď $G=(V,E)$ graf, $\#V \geq 2$. Pak G je bipartitní $\iff$ neobsahuje kružnici liché délky.

Dk:



$\boxed{\Rightarrow}$

hrany vedou pouze z V_1 do V_2, tedy vrcholy na ∀ sledech střídají vrcholy z V_1 s vrcholy z V_2.

$\Rightarrow$ k uzavření kružnice je třeba sudý počet hran

ok

$\boxed{\Leftarrow}$

a) $G=(V,E)$ je souvislý

fixní $u \in V$

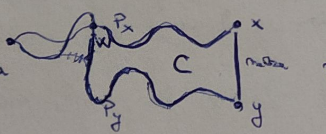
$V_1 := \{ v \in V \mid$ nejkratší cesta z u do v má lichou délku $\}$

$V_2 := \{ v \in V \mid$ ———— " ———— sudou délku $\}$

námečky dohromady $\Rightarrow G$ je bipartitní

- $\boxed{V_2 \neq \emptyset} \Leftarrow u \in V_2$
- G je souvislý $\Rightarrow \exists \{u,v\} \in E(G) \Rightarrow v \in V_1 \Rightarrow \boxed{V_1 \neq \emptyset}$
- $\boxed{V_1 \cap V_2 = \emptyset}$ ok z definice
- $\boxed{V_1 \cup V_2 = V}$ díky souvislosti se z u dostanu všude nej. cestou, tzn. každý bod $\in V_1$ a V_2
- neexistuje hrana s oběma vrcholy ve V_1 (pro V_2 obdobně)

sporem $x,y \in V_1$, $(\{x,y\} \in E)$



P_x .. nejkr. cesta z u do x (liché)

P_y .. —— " —— u do y (liché)

~~proč~~ w = průsečík P_x, P_y nejblíže k x (pokud není $w=u$)

- uPw .. úsek cesty P začínající vrcholem u a končící w
- $|P|$ - délka cesty P

tvrzení $|uP_xw| = |uP_yw|$

kdyby byla jedna kratší, BÚNO uP_xw pak by nejkratší cesta z u do y musela vést také přes uP_xw tj. uP_xwP_yy by byla kratší než uP_yy

- C je kružnice v $G \Leftarrow$ z volby w
- $|C| = |P_x| - |uP_xw| + |P_y| - |uP_yw| + 1_{(x,y)}$

$= \underbrace{|P_x| + |P_y|}_{\text{sudé}} - 2|uP_yw| + 1$ = liché číslo

spor s předpokladem

b) G má komponenty $G^{(1)}, \dots G^{(r)}$, $r \geq 2$

pro každou komponentu $G^{(i)}$ najdeme $V_1^{(i)}, V_2^{(i)}$ jako v bodě a)

hledané V_1 a V_2 budou $V_1 = \bigcup_{i=1}^{r} V_1^{(i)}$, $V_2 = \bigcup_{i=1}^{r} V_2^{(i)}$

$V_1^{(i)}$ a $V_1^{(j)}$ nemají hrany, jsou v různé komponentě

∎

Lesy, stromy

Def: Graf, který neobsahuje kružnici nazveme les (acyklický).

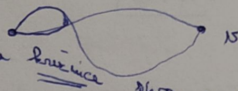
Souvislý les nazveme strom.

Věta: Následující 4 tvrzení o $G=(V,E)$ jsou ekvivalentní:

1) G je strom
2) $\forall u,v \in V$ v G $\exists$ právě jedna cesta s konci u,v
3) G je tzv. minimální souvislý (a) G je souvislý; b) $G - e$ není souvislý pro $\forall e \in E$)
4) G je tzv. maximální acyklický (a) G je acyklický; b) přidáním jedné hrany už vznikne kružnice $\forall x,y \in V : \{x,y\} \notin E$, $G + \{x,y\}$ obsahuje kružnici)

Důkaz: 1) ⇒ 2)
- ~~strom~~ fix $u,v \in V$
- G strom ⇒ G souvislý ⇒ ex. cesta z u do v

jednoznačnost: sporem



spor s předp. že G je strom

2) ⇒ 3) mezi lib. u,v ex. právě 1 cesta ⇒ G je souvislý

- sporem: $\exists$ hrana $e = \{x,y\} \in E$ $\quad \underbrace{G - \{x,y\}}_{\text{odebírám jen hranu}}$ je stále souvislý ⇒ mezi x a y $\exists$ v $G - \{x,y\}$ cesta P

⇒ v G je $P + \{x,y\}$ kružnice - **SPOR**

3) ⇒ 4)

G nemá kružnice, pokud ano, pak odebráním hrany $\{x,y\}$ neporušíme souvislost (spor)

$G + \{x,y\}$ obsahuje kružnici ?

G je souvislý ⇒ $\forall x, y$ $\{x,y\}$ „jsou spojeni" tj. přidáním hrany $\{x,y\}$ uzavřeme kružnici

4) ⇒ 1)

G nemá kružnici OK

G je souvislý protože přidání každé hrany vytvoří kružnici, tj. $\forall x,y \in V$ $\{x,y\}$ přidání vytvoří kružnici ⇒ $\{x,y\}$ už „byly spojeny"

Věta (Eulerův vzorec)

Buď $G=(V,E)$ souvislý graf. Pak G je strom $\iff \#E = \#V - 1$

Důkaz: $\boxed{\Rightarrow}$ úplná indukce na $n = \#V$

- $n=1$ • $\#E = 0$ OK, $\#V = 1$
- $\{1, \dots, n-1\}$ platí $\longrightarrow n$

G je strom na ~~na~~ n vrcholech, fix. $e \in E(G)$

$G - e$ ... má 2 komponenty ≈ stromy s k a $n-k$ vrcholy — ozn T_1, T_2

$$\#E(T_1) = \#V(T_1) - 1$$
$$\#E(T_2) = \#V(T_2) - 1$$
$$\#E = \#E(T_1) + \#E(T_2) + \underbrace{1}_{e}$$

tedy $\#E = \#V(T_1) - 1 + \#V(T_2) - 1 + 1 = \#V - 1$ OK

$\boxed{\Leftarrow}$ • G souvislý .. $\forall v \in V\,(d(v) \geq 1)$

• $\#E = \#V - 1$

vrcholy stupně 1 ve stromy se nazývají listy

$$\sum d(v) = 2\#E = 2\#V - 2 \Rightarrow v\ G\ \exists w \in V(G) : d_G(w) = 1$$

• indukce na $n = \#V$

- $n=1$ • $\#V = 1$, $\#E = 0$ ok
- $n-1 \rightarrow n$

vezmu si list $w \in V$ a odebereme $\longrightarrow G \setminus w$ je stále souvislý, má o jeden vrchol a o 1 hranu méně

$\Downarrow$ $\Downarrow$

• $G\setminus w$ .. $\#E(G\setminus w) = \#V(G\setminus w) - 1 \xRightarrow{IP}$ $G\setminus w$ je strom

$\Leftarrow$ pak přidám 1 vrchol a 1 hranu, nelze vytvořil kružnici

G je strom

ok

Věta: (Cayley)

Označme T_n počet stromů na n vrcholech.

Pak $T_n = n^{n-2}$

Důkaz:

1) pomocí posloupnosti stupňů vrcholů v grafu   verze 1 multinom. věta / ble

Lemma

Nechť $(d_i)_{i=1}^{n}$, $n \geq 2$, je posloupnost přirozených čísel taková, že $\sum d_i = 2n-2$. Pak existuje $N_{(d_1,..d_n)} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\dots(d_n-1)!}$ stromů na vrcholech $v_1 .. v_n$ tak, že $d(v_i) = d_i$

Dk: lemmatu indukcí • $n=2$ $d_1 \geq 1, d_2 \geq 1$ $d_1 + d_2 = 4-2 = 2 \Rightarrow d_1, d_2 = 1$

$$N_{(1,1)} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

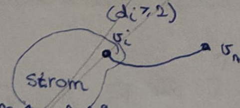
 ok

• $n-1 \Rightarrow n$

ze vztahu $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ existuje v grafu nějaký list BÚNO $\underbrace{d_n = 1}$

$(d_{(1)}, .. d_{(n-1)}, 1)$

$(d_i \geq 2)$



posl. $(d_{(1)}, d_{(2)} .. d_{(i)}-1, .. d_{(n-1)})$

$$N_{(d_1,..d_{n-1},1)} = \sum_{\substack{i=1\\ d_i \geq 2}}^{n-1} N_{(d_1,..d_i-1,..d_{n-1})} \overset{IP}{=} \sum_{\substack{i=1\\ d_i\geq 2}}^{n-1} \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!..(d_i-2)!(d_{n-1}-1)!}$$

• $\frac{d_i-1}{d_i-1}$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ d_i \geq 2}}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_i-1)^{\leftarrow =0}}{\prod_{k=1}^{n-1}(d_k-1)!} = \frac{(n-3)!}{\prod_{k=1}^{n-1}(d_k-1)!} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)}$$

pokud $d_i = 1$ zbytečná podmínka

protože $d_n = 1$ ok

$$= \sum_{i}^{n} d_i - n = 2n-2-n = \underline{\underline{n-2}}$$

$$\boxed{= \frac{(n-2)!}{\prod_{k=1}^{n-1}(d_k-1)! \cdot (1-1)!}}$$ OK Lemma

n-tý člen pro $d_n = 1$

~~pokrač. důkazu~~

~~multinom. věta~~ ~~$d_i \in \mathbb{N}$~~

$$(x_1 + x_2, \; + x_k)^m = \sum_{\substack{d_i \geq 0 \\ \sum_1^k d_i = m}} \frac{m!}{\prod_{j=1}^{k} d_j!} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_k^{d_k}$$

~~$d_i = d_i - 1$~~

~~sčítal přes všechny graf. posloupnosti~~

$$T_m = \sum_{\substack{\forall i \in \hat{m}\ (d_i \geq 1) \\ \sum_1^m d_i = 2m-2}} N_{(d_1, d_2, \dots d_m)} = \sum_{\substack{d_i \geq 1 \\ \sum d_i = 2m-2}} \frac{(m-2)!}{\prod_{j=1}^{m} (d_j - 1)!} = \sum_{\substack{d_i \geq 0 \\ \sum d_i = m-2}} \frac{(m-2)!}{\prod_{j=1}^{m} d_j} 1^{d_1} \dots 1^{d_m} \overset{\text{mult. věta}}{=} (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-krát}})^{m-2} = \underline{\underline{m^{m-2}}}$$

~~nevím zda všechny takové odpovídají stromu, ale to nevadí => pak $N_{(d_1, \dots d_m)} = 0$ pů~~

Dk! (Cayley verze 2.0)

dvojím počítáním tzv. PoVyKoSů - postupně vytvářený kořenový strom ... $= (T, r, \varphi)$ .. • $T = (V, E)$ je strom
- $r \in V$ kořen
- $\varphi : (E) \mapsto \{1, 2, \dots \#E\}$ bijekce „očíslování hran"

m-1 hran

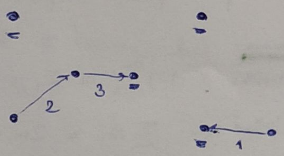
1) $T_m \cdot m \cdot (m-1)!$

počet stromů na m vrchol. — výběr kořen — očíslování m-1 hran

2) „postupné vytváření"

m izol. vrcholů, postupně přidávám šipky (cesta ke kořeni), kořen = jediný vrchol ze kterého nevede šipka

k-tý krok:
(přidáváme k-tou hranu
tedy máme $m - k + 1$
komponent)



přidáváme šipku ~~s~~ počátkem ~~v~~ kořeni některé komponenty a konec v libovolné vrcholu jiné komponenty (abych nevytvořil kružnici)

\# možností v k-tém kroku:
- konec šipky ~~m~~ m možností
- začátek m-k možností (ostatní komponenty ~~+~~ kořeny) kde není konec

celkem $\prod_{k=1}^{m-1} m(m-k) = m^{m-1} \prod_{k=1}^{m-1} (m-k) = m^{m-1} (m-1)!$

m-1 hran

1) = 2) $T_m \cdot m \cdot \cancel{(m-1)!} = m^{m-1} \cancel{(m-1)!}$

$$\underline{\underline{T_m = m^{m-2}}}$$ ok

$T_1 \sim T_2$ jako pro grafy obecně

Def: kořenový strom (T, r) $T = (V, E)$ strom
$r \in V$.. kořen

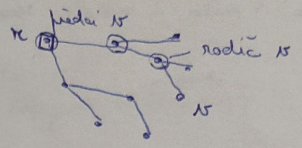
$(T_1, r_1) \sim_k (T_2, r_2)$ pokud • $T_1 \sim T_2$ pomocí bijekce φ
• $\varphi(r_1) = r_2$

„nedůležitější izomorfie"

Def: (T, r, ν) .. pěstovaný strom

- $T = (V, E)$ strom
- $r \in V$ .. kořen
- ν .. částečné uspořádání vrcholů ——

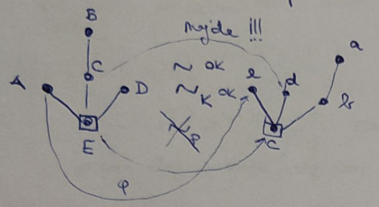
- ∀ vrcholy na cestě z r do $v \in V$ jsou <u>předci</u> v
- předek v, který je nejblíž v ve stromu je <u>rodič</u> v
- vrchol je potomkem svého rodiče



izomorfie pěst. stromů

$$(T_1, r_1, \nu_1) \sim_P (T_2, r_2, \nu_2)$$

pokud
- $(T_1, r_1) \sim_K (T_2, r_2)$ pomocí φ
- φ zachovává pořadí potomků

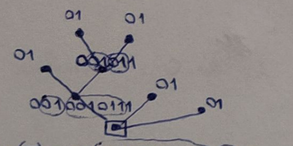


pořadí potomků zleva doprava

Kódování pěst. stromu pro rozhodnutí izomorfismu:

- každý list dostane kód 01
- mají-li potomci $v_1 \le v_2 .. \le v_k$ vrcholu v kódy $c_1 .. c_k$, pak v dostane kód $0c_1 .. c_k1$
- kód kořene je kódem stromu

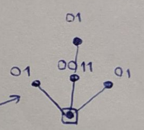
Izomorfní (pěst.) stromy ve smyslu $\sim_P$ mají stejný kód.



$C(T) = 0001001011101011$

dekódování

0|01|0011|01|1 →



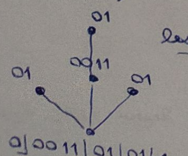
sekáme po prefixech, které mají stejný počet nul a jedniček (to budou další kódy stromů a proces opakuji)

Kódování kořenového stromu pro rozhodnutí o izomorfismu:

- každý list kód 01
- má-li vrchol v potomky $v_1, .. v_k$, t.ž. pro jejich kódy $c_1 .. c_k$ platí $c_1 \le c_2 .. \le c_k$ při nějakém (pevně zvoleném) uspořádání řetězců, pak kód v bude $0c_1c_2 .. c_k1$
- kód kořene je kódem stromu

Izomorfní stromy ve smyslu $\sim_K$ (kořen.) mají stejný kód.

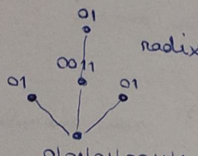
uspořádání řetězců – lexikograf. $\widehat{11} > 100$
– radixové $11 < 100$ délka
- delší je větší
- stejně dlouhé podle abecedy



lexikograf.

0|0011|01|01|1

dekódování stejné



radixové

0|01|01|0011|1

Def: $G=(V,E)$. Vzdálenost $u,v \in V$ v G: $d(u,v)$ = délka nejkratší cesty v G s konci u,v

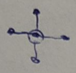
Excentricita vrcholu $u \in V$: $ex(u) = \max_{v \in V} d(u,v)$

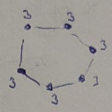
Centrum grafu je $\mathcal{C}(G) = \underset{v \in V}{\operatorname{argmin}}\, ex(v)$ … může jich být více

11.10.2021

Tvrzení

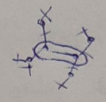
Centrum stromu má 1 nebo 2 vrcholy. Navíc, pokud $\mathcal{C}(T) = \{x,y\}$, pak $\{x,y\} \in E(T)$.

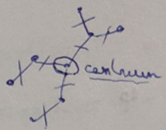




$\mathcal{C}(G) = V(G)$

Hledání centra stromu: škrtáme postupně listy





Algoritmus (izomorfismus stromů T_1 a T_2):

1) Najdeme $\mathcal{C}(T_1)$ a $\mathcal{C}(T_2)$
2) Pokud $\#\mathcal{C}(T_1) \neq \#\mathcal{C}(T_2)$, pak T_1 není izomorfní s T_2

pokud $\mathcal{C}(T_1) = \{c_1\} \wedge \mathcal{C}(T_2) = \{c_2\}$, pak $T_1 \sim T_2 \iff (T_1,c_1) \sim_K (T_2,c_2)$

považujme centrum jako kořen

pokud $\mathcal{C}(T_1) = \{c_1,d_1\} \wedge \mathcal{C}(T_2) = \{c_2,d_2\}$, pak $T_1 \sim T_2 \iff ((T_1,c_1) \sim_K (T_2,c_2) \vee (T_1,d_1) \sim_K (T_2,d_2))$

Kostra grafu (spanning tree)

Def: Kostra grafu $G=(V,E)$ je strom $T=(V,E')$, kde $E' \subseteq E$.

Kruskal

- **Algoritmus hledání kostry**
  - Nechť $e_1 \leq e_2, \ldots \leq e_m$ jsou nějak uspořádané hrany G. $\#V = n$
  - Konstruujeme $G_0 \subseteq G_1 \ldots \subset G$ s $V(G_i) = V(G)$ $\forall i$
    - $G_0 = (V, \emptyset)$
    - $E(G_i) = \begin{cases} E(G_{i-1}) + e_i & \text{pokud přidáním } e_i \text{ do } G_{i-1} \text{ nevznikne kružnice} \\ E(G_{i-1}) & \text{jinak} \end{cases}$

procházím $e_i \in E$ a rozhoduji

KONEC: pokud jsem přidal už $n-1$ hran

pokud dojdu nakonec a přidal jsem $n-1-k$ hran ⇒ graf nebyl souvislý a má $k+1$ komponent

Úloha minimální kostry

- ohodnocený graf $G=(V,E,W)$

kde $G=(V,E)$ – jednoduchý graf

$W: E \longrightarrow (0,+\infty)$

Minimální kostra ohodnoceného grafu $G=(V,E,W)$ je souvislý graf $(V,E')=T$, takový, že:

1) $E' \subseteq E$
2) $W(T) = \sum_{e \in E'} w(e)$ je minimální možná

Pozn: minimální kostra je kostra (strom) – plyne z požadavku 2) suma minimální ⇒ určitě nepřidám hranu navíc zbytečně

Kruskalův algoritmus pro min. kostru

input: ohodnocený graf $G = (V, E, W)$

- seřadíme hrany tak, aby $w(e_1) \le w(e_2) \ldots \le w(e_m)$
- pro takto setříděné hrany provedeme algoritmus pro hledání kostry

Věta: Kruskalův algoritmus řeší úlohu minimální kostry. (když dostanu souvislý graf)

Dk: • $G = (V, E, W)$ .. ohodnocený, souvislý graf, $\# V = n$

$T_{KR} \subseteq E$ množina $n-1$ hran nalezených Kruskal. algoritmem

$$\mathcal{T} := \left\{ E' \subseteq E \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ (V, E') \text{ je souvislý} \\ \cdot\ w(E') \text{ je min. možná} \end{array} \right\} \Rightarrow \# E' = n-1$$

min. kostra může být víc

$$w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$$

předpoklad pro spor: $T_{KR} \notin \mathcal{T} \Rightarrow$ můžeme def. $g : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$, pro $T \in \mathcal{T}$, $g(T) = \min \{ i \mid e_i \notin T \wedge e_i \in T_{KR} \}$

$\tilde{T} := \underset{T \in \mathcal{T}}{\operatorname{argmax}}\, g(T)$ $\qquad k := g(\tilde{T})$

víme $e_k \notin \tilde{T}$, $(V, \tilde{T} \cup e_k)$ .. souvislý graf, n vrcholů, n hran } $\Rightarrow$ obsahuje kružnici C.

- $\exists e \in C : e \notin T_{KR}$ (T_{KR} nemůže kružnici z podstaty vytvořit)

hrana v kružnici

$\tilde{\tilde{T}} := \tilde{T} \cup e_k \setminus e$ ... tvrdím $(V, \tilde{\tilde{T}})$ je strom : n vrcholů ok, n−1 hran ok, souvislost ok

$\tilde{T} \cup e_k$ je souvislý smazáním hrany e z kružnice neporuším souvislost

$\Rightarrow (V, \tilde{\tilde{T}})$ je strom tedy kostra (V, E)

$w(\tilde{\tilde{T}}) = w(\tilde{T}) + w(e_k) - w(e)$

$\underline{w(e_k) \le w(e)}$? ok

Kr. algoritmus se v nějakém kroku rozhodl pro e_k a ne pro e.

- $w(e_k) \le w(e)$ tak je pravda
- $w(e) < w(e_k)$ + nelze

Kruskal hranu nemohl přeskočit z důvodu, že tvořila kružnici s některými dříve zařazenými protože $(e_1, \ldots e_{k-1}, e) \subset \tilde{T}$

algoritmus tedy e_k upřednostnil protože $w(e_k) \le w(e)$

$w(\tilde{\tilde{T}}) \le w(\tilde{T})$ ... minimální možná

$\Rightarrow w(\tilde{\tilde{T}}) = w(\tilde{T})$

a tedy $\tilde{\tilde{T}} \in \mathcal{T} \wedge e_k \in \tilde{\tilde{T}}$

tedy $g(\tilde{\tilde{T}}) > k$ SPOR s volbou $\tilde{T}$ (jako argmax) orient. graf $G=(V,E)$, $E \subseteq (V \times V)$

Incidenční matice orientovaného grafu s $V=\{v_1, \dots v_n\}$ a $E=\{e_1, \dots e_m\}$

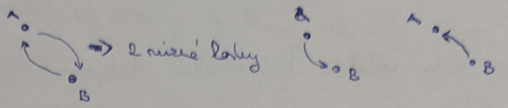
je $\mathbb{B} \in \{-1,0,1\}^{n,m}$

$$[B]_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{pokud } e_j \text{ začíná ve } v_i \\ 1 & \text{pokud } e_j \text{ končí ve } v_i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

pro neorientovaný graf
pouze 0 a 1 (pokud hrana
obsah. vrchol)

Upřesnění

Kostra orient. grafu $G=(V,E)$ je



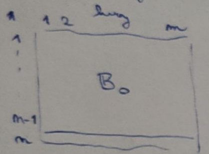
- podgraf (V,E')
- je souvislý a bez kružnic nehledíme-li na orientaci hran („slabá souvislost")

Věta: Nechť B je incidenční matice orientovaného grafu G, B_0 vznikla z B odstraněním (lib.) řádku.

Pak počet koster $G = \det(B_0 B_0^T)$.

BÚNO

Dk: odstranili jsme n-tý řádek $\mathbb{C} \dots (n-1)\times(n-1)$ podmatice B_0



pozn: $n-1 \leq m$ (jinak hran)

Lemma $|\det \mathbb{C}| = 1 \iff$ odpovídajících $(n-1)$ hran (matice $\mathbb{C}$) tvoří kostru G, ozn G' vybraných do $\mathbb{C}$

a jinak je $(\det \mathbb{C}) = 0$

Dk lemma

indukcí na n: ~~[illegible]~~ $n=2$

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{2 hrany}}$$

určitě $(\det \mathbb{C}) = \pm 1$ $=\pm 1$

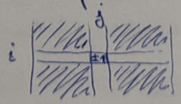
$n-1 \to n$

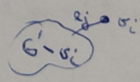
a) v G' existuje vrchol v_i ~~[illegible]~~, $i \leq n-1$, stupně 1

b) v G' není vrchol stupně 1, nebo jediný vrchol stupně 1 je v_n

a) → i-tý řádek $\mathbb{C}$ obsahuje právě jeden nenulový (rovný ±1) prvek

det $\mathbb{C}$ rozvineme podle i-tého řádku





G' je kostra $G \iff G'-v_i$ je kostra $G-v_i$

$n-1$ vrcholů
+ IP na $G-v_i$

b) víme že každý strom má alespoň 2 listy (= vrcholy stupně 1)

$\Rightarrow G'$ není strom $\Rightarrow$ není to kostra $G \xRightarrow{②} \det \mathbb{C} = 0$

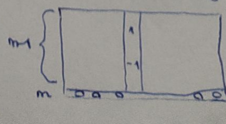
$\underbrace{\#V(G') = n, \ \#E(G') = n-1}_{\text{1 vrch. st. 1.}}$ $\quad \underbrace{2\#E(G') = \sum_{j=1}^{n} d_{G'}(v_j)}$ $= 2n-2$

jeden vrchol 1, aby suma byla stejná, pak musíme dát 3 ⇒ už nějaký jiný musel být 0

$\Rightarrow \exists$ vrchol stupně 0

i) $\exists k \in \widehat{n-1}$, $d_{G'}(v_k) = 0 \Rightarrow$ k-tý řádek $\mathbb{C}$ je nulový $\Rightarrow \det \mathbb{C} = 0$

ii) $d_{G'}(v_n) = 0$, $\forall k \in \widehat{n-1}$ $d_{G'}(v_k) \geq 1$



$\Rightarrow$ každá hrana začíná a končí v některém z vrcholů $v_1, \dots v_{n-1}$

$\Rightarrow$ každý sloupec $\mathbb{C}$ má právě jednu 1 a −1

$\Leftarrow$ součet řádek $\mathbb{C}$ je nulový vektor

řádky $\mathbb{C}$ jsou [illegible] LZ $\Leftarrow$

$\Downarrow$

$\det \mathbb{C} = 0$ □

koster G =

TG

pokrač. dk. věty $\det B_0 B_0^T = \sum (\det C)^2$ • , kde sčítáme přes všechny čtvercové podmatice B_0 ($n-1 \times m$) řádu $n-1$.
(Binet-Cauchy)

Tvrzení věty pak plyne z lemmatu (det C je ±1 pokud je to kostra, tedy přispěje 1 do sumy •)

□

Pozn: Co když je málo hran? (tj $\#V = n$, $\#E < n-1$) určitě nemá kostru, musí to vyjít 0 aby věta byla správně)
(není souvislý)

G má alespoň 2 komponenty => mohu očíslovat vrcholy a hrany tak, aby

$$B = \begin{array}{c|cc|l} & \text{hrany 1. komp} & \text{zbytek} & \\ & B_1 & 0 & \text{1. komp.} \\ & 0 & B_2 & \text{zbytek} \end{array}$$

nejsou čtverc. bloky

$$0 \overset{?}{=} \det B_0 B_0^T = \underbrace{\det B_1 B_1^T}_{?} \cdot \det B_2'(B_2')^T$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2' \end{pmatrix}$$

škrtnu řádek

$$B_0 B_0^T = \begin{pmatrix} B_1 B_1^T & 0 \\ 0 & B_2'(B_2')^T \end{pmatrix}$$

doplněk

$[B_1 B_1^T]_{ij}$ = skal. součin i-tého a j-tého řádku B_1

- $i=j$ $[B_1 B_1^T]_{ij} = d_G(v_i)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ok
  vstupení + výstupení
- $i \neq j$ – jediné co se počítá je hrana spojující v_i a v_j

$$[B_1 B_1^T]_{ij} = \begin{cases} -1 & (v_i, v_j) \in E \text{ xor } (v_j, v_i) \in E \\ -2 & (v_i, v_j) \in E \wedge (v_j, v_i) \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

=> každý řádek $B_1 B_1^T$ se vysčítá na 0 (na diag stupeň a jinde tolik −1 kolik jde z vrcholu nebo do něj hran)

=> sloupce $B_1 B_1^T$ jsou LZ

=> $\det B_1^T B_1^T = 0$ => $\det B_0 B_0^T = 0$ ano věta funguje

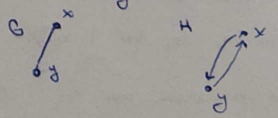
Věta: (Kirchhoff-ova Matrix tree teorem)

$G=(V,E)$ jednoduchý neorientovaný graf, $V = \{v_1, \dots v_n\}$. Def L_0 řádu $n-1 \times n-1$

$$[L_0]_{ij} = \begin{cases} d_G(v_i) & \text{pro } i=j \\ -1 & i \neq j,\ \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak # koster G = $\det L_0$

důkaz: podle G sestrojíme orient. graf H:
- $V(G) = V(H)$
- každou hranu G nahradíme dvojicí hran opačné orientace



B_0 .. vznikla z incidenční matice H umazáním posledního řádku

Pak $\boxed{2 L_0 = B_0 B_0^T}$
chci dokázat

$[B_0 B_0^T]_{ii}$ = s.s. součin i-tého řádku B_0 se sebou samým
$= d_H(v_i)$ $(-1)^2/(1)^2$ za každou hranu co ve v_i končí/začíná
$= 2 d_G(v_i)$

$[B_0 B_0^T]_{ij} = -2$ pokud $\{v_i, v_j\} \in E(G)$
0 jinak

i [0 ±1 0 ±1]
j [0 0 ±1 ∓1]

tedy $2 L_0 = B_0 B_0^T$ ok
dle definice L_0

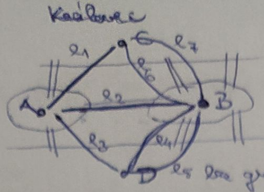
z každé kostry G vznikne 2^{n-1} koster H
(přiřazením orientace každé z n-1 hran kostry)

=> # koster H = $\det B_0 B_0^T = \det 2 L_0 = 2^{n-1} \det L_0$

tedy # koster G = $\det L_0$

□

Jednotažky



sled A, B, C, B nejasný s násob. hranami

sled A, e_2, B, e_7, C, e_6, B ok

Lze graf nakreslit jedním tahem a skončit i začít ve stejném vrcholu ?

Def: Graf $G=(V,E)$ (i násobné hrany), $\#E = m$.

- Sled $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_m, v_m$ nazveme Eulerovský pokud $\forall i,j \in \hat{m}$ $(i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j)$
- cyklus $v_0, e_1, \dots e_m, v_0$ nazveme eulerovský, pokud $\forall i,j \in \hat{m}$ $(i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j)$
- Graf nazveme eulerovský, pokud v něm existuje eulerovský cyklus.

Věta: Buď souvislý graf $G=(V,E)$. Pak G je Eulerovský $\Leftrightarrow$ stupně všech vrcholů v G jsou sudé.

důkaz:

∀ hrana grafu právě jednou

$\boxed{\Rightarrow}$: procházíme se po hranách eul. cyklu, postupně napočítáváme stupně vrcholů.

- Každý průchod vrcholu = +2 k jeho stupni.
- Start = +1 ke stupni poč. vrcholu
- Cíl = +1 — " — konec = poč. vrcholu. ok

$\}$ $\forall d_G(v)$ je sudé

$\boxed{\Leftarrow}$ $i := 1$, $s_i :=$ lib. vrchol

A1) zvolím i-tou barvu b_i (různou od barev $b_1, \dots b_{i-1}$)

A2) vyrazím z s_i po neobarvené hraně a chodím náhodně dokud mohu po neobarvených hranách G, po každé, když nej. hranu použiji tak ji obarvím barvou b_i

A3) pokud nemohu pokračovat: jen. že jsem se vrátil do s_i a navíc všechny hrany incidentní z s_i jsou již obarvené

Nyní: ↗ ∀ hrany G jsou obarvené → jdi na B1)

↘ v G zbývají neobarvené hrany → jdi na A4)

A4) $i := i+1$

$s_i :=$ lib. vrchol, který má některé hrany obarvené a některé ne

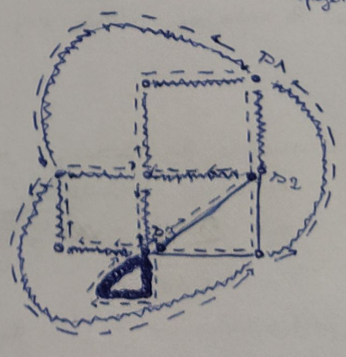
→ A1)

B1) spojení cyklů do jednoho (eulerov. cyklu)

- vyrážím z s_1 po 1. cyklu
- kdykoliv narazím na s_i .. startovní vrchol zatím nepřipojeného cyklu, tak na tento i-tý cyklus „přestoupíme" a obkroužíme ho celý, pak se vrátíme na původní (lze vnořit, tj. se dá do dalšího cyklu a pak se vracet k předchozím)

Př:

spojení - - -



3 obarvené cykly třeba spojil do euler. cyklu

Věta: $G=(V,E)$ souvislý graf. G obsahuje eulerovský sled ⟺ počet vrcholů lichého stupně v G je 0 nebo 2.

Dk: " 0 jasné, cyklus je i sled

2 .. 

x, y. 2 s lichým stupněm

$G + w = G'$ – G' je eulerovský ⟺ G je eulerovský sled = cyklus bez části xwy

ok

Hamiltonovské cesty a kružnice

(návrat k jednoduchým grafům, nejsou vícenásobné hrany)

Def: Buď $G=(V,E)$, $\#V=n$.

- Cesta v G se nazývá Hamiltonovská, má-li délku $n-1$.
- Kružnice v G ——— " ———, má-li délku n.
- Graf je Hamiltonovský, obsahuje-li Hamiltonovskou kružnici.

(tedy se neopakují vrcholy, skryto v def. cesty a kružnice)

⇒ Ham. cesta / kružnice pokrývá ∀ vrcholy

Věta: (Dirac)

Graf na n vrcholech $G=(V,E)$, $\#V=n$. Pokud $\overset{\text{min. stupeň}}{\delta(G)} \geq \frac{n}{2}$, pak G je Hamiltonovský.

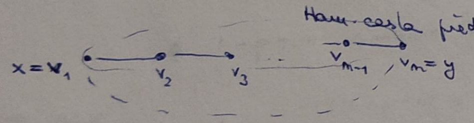
Dk: sporem $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ ∧ G není Ham.

$G^* \supseteq G$, $V(G)=V(G^*)$, G^* max. možný nehamiltonovský, tzn: $G^* + e$ je Hamiltonovský $\forall e \in \binom{V}{2} \setminus E^*$ $= E(G^*)$

$\exists x,y : \{x,y\} \notin E^*$

$G^* + \{x,y\}$ obsahuje Ham. kružnici

v G^*:



Ham. cesta před přidáním hrany $\{x,y\}$

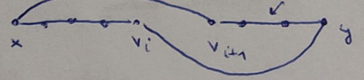
$S = \{i \mid \{x, v_{i+1}\} \in E(G^*)\}$

$T = \{i \mid \{y, v_i\} \in E(G^*)\}$

1) $n \notin S$ (v_{n+1} nemáme) $0 \notin S$

2) $n \notin T$ ($y = v_n$, smyčky nemáme na jednoduchých grafech)

3) $T \cap S = \emptyset$ jinak by G^* měl Ham. kružnici



$$n \overset{1),2)}{>} \#(S \cup T) \overset{3)}{=} \#S + \#T$$

$$= d_{G^*}(x) + d_{G^*}(y)$$

$$\overset{G^* \text{ vznikl z } G \text{ přidáváním hran}}{\geq} d_G(x) + d_G(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

spor □

Věta: (Ore?)

Buď $G=(V,E)$, $\#V=n$. a ~~∃~~ $x,y \in V$:
- $\{x,y\} \notin E$
- $d(x) + d(y) \geq n$

G je Hamiltonovský ⟺ $G + \overset{\text{hrana}}{\{x,y\}}$ je Hamiltonovský

Dk: ⇒ nic nového!

⇐ stejné jako minulá věta + předpoklad $d(x) + d(y) \geq n$

Def: $G=(V,E)$, $\#V=m$. konstruuji posloupnost $G=G_0 \subseteq G_1 \dots \subset G_\ell$

- $V(G_i)=V(G)$ $\forall i$
- $E(G_{i+1})=E(G)+\{x_i,y_i\}$, kde · $\{x_i,y_i\}\notin E(G_i)$
  · $d_{G_i}(x_i)+d_{G_i}(y_i)\geq m$

a pro G_ℓ platí $(\forall x,y\in V)(\{x,y\}\notin E(G_\ell) \Rightarrow d_{G_\ell}(x)+d_{G_\ell}(y)<m)$

Pak G_ℓ nazveme uzávěr grafu G. značíme $\overline{G}$.

Důsledek: G je Hamiltonovský $\Longleftrightarrow$ $\overline{G}$ je Hamiltonovský. (dle Oreho přidáváme hrany)

Věta (Chvátal)

$G=(V,E)$, $d_1\leq d_2\leq \dots \leq d_m$ .. stupně vrcholů v G.

Pokud $(\forall k<\frac{m}{2})(d_k\leq k \Rightarrow d_{m-k}\geq m-k)$ (*), pak G je Hamiltonovský.

Dk: ukážeme, že uzávěr grafu splňující (*) je úplný graf $\left(E=\binom{\#V}{2}\right)$ (a ten je jistě Ham.)

sporem: $\exists x,y\in V\,(\{x,y\}\notin E(\overline{G})) \overset{\text{z def. uzávěru}}{\Longrightarrow} d_{\overline{G}}(x)+d_{\overline{G}}(y)<m$ (může jich být více)

volíme takovou dvojici x, y, pro kterou je $d_{\overline{G}}(x)+d_{\overline{G}}(y)$ maximální možná

ozn: $q=d_{\overline{G}}(x) \overset{\text{BÚNO}}{\leq} d_{\overline{G}}(y) < m-q$ tedy $\boxed{q<\frac{m}{2}}$ 1)

$d_{\overline{G}}(y)\leq m-q-1$

$S=\{~~m~~\,w \mid \{x,w\}\notin E(\overline{G})\}$ $\#S=m-1-q$ $(\forall w\in S)(d_{\overline{G}}(w)\leq d_{\overline{G}}(y)\leq m-q-1)$

$V \setminus x$

jinak bych za y volil jiný abych maximaliza $q+d_{\overline{G}}(y)$

v $\overline{G}$ máme $m-q$ vrcholů stupně maximálně $m-q-1$ ▲

$S'=S\cup\{x\}$ $\#S'=m-q$ $(\forall w\in S')(d_{\overline{G}}(w)\leq d_{\overline{G}}(y)\leq m-q-1)$

$T=\{w\in V-y \mid \{y,w\}\notin E(\overline{G})\}$ $\#T=m-1-d_{\overline{G}}(y)\geq q$ $(\forall w\in T)(d_{\overline{G}}(w)\leq q)$

$d_{\overline{G}}(x)$ opět důvod maximální sumy

⇒ v $\overline{G}$ máme alespoň q vrcholů stupně maximálně q

v G: $d_1\leq d_2 \dots \leq d_m$

$\overline{G}$: d_1' d_2' d_m'

přidáváme hrany

⇐ a tedy v $(d_i)_1^m$ je alespoň q prvků $\leq q$ $\Rightarrow \boxed{d_q\leq q}$ 2)

uspořádání

▲ ⇒ v $(d_i)_1^m$ je alespoň $m-q$ prvků $\leq m-q-1 \Rightarrow \boxed{d_{m-q}\leq m-q-1}$ 3)

uspořádání

1) + 2) + 3) spor s (*) ok

Věta: (Pósa)

$G=(V,E)$, $d_1\leq d_2 \dots \leq d_m$ stupně vrcholů v G.

Pokud $(\forall k<\frac{m}{2})(d_k>k)$ pak G je Hamiltonovský.

plyne z Chvátala, kde nikdy není naplněn předpoklad implikace

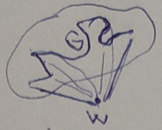
TG

㉑

Lemma:

$G = (V, E)$

$G^* = (V \cup \{w\}, E \cup \{\{w, x\} \mid \forall x \in V\})$



analogie Eulera, jen nevím, kde cesta končí a musím w spojit se vším

G^* je Hamiltonovský $\iff$ G obsahuje Ham. cestu.

Věta: Každý samokomplementární graf obsahuje Ham. cestu.

izomorfní se svým doplňkem

Dk:

Nechť $G = (V, E)$ je samokompl. graf s vrcholy uspořádanými, že jejich stupně splňují $d_1 \leq d_2 \ldots \leq d_m$. Potom jeho doplněk má skóre

$$\underbrace{m-1-d_1}_{d_m} \geq \underbrace{m-1-d_2}_{d_{m-1}} \ldots \geq \underbrace{m-1-d_m}_{d_1}$$

G je samokompl., tj. $G \sim G^c$ neboli oba grafy jsou až na značení vrcholů stejné

$$(\forall i \in \hat{m})(d_i = m-1-d_{m+1-i})$$

Z G utvoříme $G' = (V \cup \{x\}, E \cup \{\{x, v\} \mid v \in V\}$ kde $x \notin V$ a o něm ukážeme, že je Hamiltonovský. Potom z předchozího lemmatu plyne tvrzení věty.

d_i' ozn. stupně vrcholů G'. Pak $\forall i \in \hat{m}$, $d_i' = d_i + 1$ a $d_{m+1}' = m$

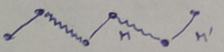
Zvolme nyní $k < \frac{m+1}{2}$ a ověřme podmínku Chvátalovy věty

platí $d_k' \leq k \iff d_k + 1 \leq k \iff (m-1-d_{m+1-k}) + 1 \leq k$

$\iff m-k \leq d_{m+1-k} \iff (m+1)-k \leq d_{m+1-k}+1$

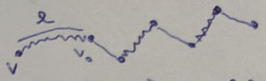
$\iff (m+1)-k \leq d_{(m+1)-k}'$ ok Chvátal $\Rightarrow$ $\underline{G' \text{ Ham.}}$ + lemma

$\#M' > \#M \Rightarrow$ nutně v H máme alespoň jednu cestu P liché délky takovou, že je na ní víc hran z M' než hran z M.



P je M-zlepšující cesta v H

P je M-zlepšující i v G: pokud ne tak:
- buď není ~~(v G)~~ může M-střídající
- nebo alespoň 1 koncový vrchol ~~jest~~ M-saturován



pokud by nějaký v_0 byl v G M-saturovaný, pak hrana e z M, která jej saturuje v G, ale ne v H, musí být i $e \in M'$

$\Rightarrow$ v G máme na v_0 2 hrany z M'

spor s def. párování

spor předpoklad že maximální

Maximální párování

Def: $G=(V,E)$. Množinu $S \subseteq V$ nazveme vrcholové pokrytí G, pokud $(\forall e \in E)(\exists v \in S)(v \in e)$

Pozn: G. S vrchol. pokrytí, M párování

každá hrana má alespoň jeden konec v S, tedy i $(\forall e \in M)$ má alespoň jeden konec v S

různé hrany z M mají různé konce

$\#M \leq \#S$ $\forall M$ v G $\forall S$ v G

Def: $N(v) = \{u \mid \{u,v\} \in E\}$ .. sousedé vrcholu v

$\nu(G) =$ velikost max. párování v G

$\tau(G) :=$ velikost min. vrcholového pokrytí G

$S \subseteq V$ $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$

Důsledek: $\nu(G) \leq \tau(G)$

Věta: (König–Egerváry)

Nechť $G=(V,E)=(V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf, pak $\nu(G) = \tau(G)$

Zjevně pokud pro nějaké párování M a něj. vrchol. pokrytí S v G platí $\#S = \#M$, pak M je max. párování a S je min. vrchol. pokrytí

Důkaz:

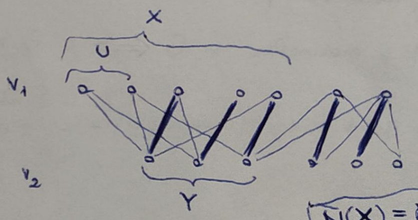
M maximální, pokud je i perfektní, je tvrzení triviální. (spíše $S = V_1$)

BÚNO $U \subseteq V_1$ jsou nesaturované vrcholy ve V_1 (všechny)

$X := \{v \in V_1 \mid$ z u do v vede v G M-střídající cesta$\}$

$Y = \{v \in V_2 \mid$ z u do v vede v G M-střídající cesta$\}$

nějaké $u \in U$



$\boxed{N(X) = Y}$

sporem
- $\nexists$ hrana s jedním koncem v X a druhým mimo Y
- do každého vrcholu Y vede hrana z X

Každá M-střídající cesta z $u \in U$ (max. délky) nutně končí v X (ve smyslu nebo by mi přidal hranu)

pokud by končila v Y a nešla prodloužit, byla by M-zlepšující

$\Rightarrow$ spor s maximalitou M.

pokrač. důkazu König

25.10.2021

- každý vrchol $y \in \overset{Y}{\cancel{X}}$ je hranou z M spojen s nějakým $x \in X$

$\forall x \in X, \forall z \in V_2 \quad \{x,z\} \in E \Rightarrow z \in Y$

$\rightarrow \exists P_x$ M-stř. cesta z $\overset{\in U}{u}$ do x (její poslední hrana je nutně z párování)

a) $\{x,z\} \in P_x$, potom $P_x \setminus \{x,z\}$ je M-stř. z u do z $\Rightarrow z \in Y$

b) $\{x,z\} \notin P_x$ $\quad$ def

potom $P_x + \{x,z\}$ je M-střídající cesta z u do z $\Rightarrow z \in Y$

$$\boxed{N(X) = Y}$$

$K := (V_1 \setminus X) \cup Y$

Tvrdíme: 1) K je vrcholové pokrytí

2) $\#K = \#M$ $\Rightarrow$ tvrzení věty

ad 1) pokud není vrch. pokrytí, pak $\exists e \in E(G)$, která nemá ani jeden konec v K

$e = \{u,v\} \Rightarrow \underbrace{u \in X \wedge v \in V_2 - Y}$

spor s $N(X)=Y$ ok

ad 2) víme že $\#K \geq \#M$

sporem: pokud $\#K \neq \#M \Rightarrow \#K > \#M$

tedy $\exists e \in M$ s oběma konci v K

nechť $e = \{x,y\}$, $x \in V_1 \setminus X$, $y \in Y$

$y \in Y \Rightarrow \exists P_y$ M-střídající cesta z $u \in U$ do y

nutně poslední hrana P_y není z M $\quad$ spor

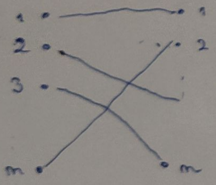
potom $P_y + e$ je M-stř. cesta z u do x $\Rightarrow x \in X$

ok

Pozn:

$G = (V_1 \cup V_2, E)$ bipartitní graf $\#V_1 = \#V_2 = m$

$V_1 = V_2 = \{1, \dots m\}$



perfektní párování odpovídá permutaci $\hat{m}$

$\pi \in S_m$ dává perf. párování na G pokud "tam ty hrany jsou" $\Leftrightarrow \forall i \in \hat{m}, (B_{i\pi(i)} = 1)$

$\Leftrightarrow B_{1\pi(1)} \cdot B_{2\pi(2)} \dots B_{m\pi(m)} = 1$

adjacenční matice
$$A_G = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & B \\ B^T & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m \\ \}m \end{matrix}$$
$\underbrace{\quad}_{m} \underbrace{\quad}_{m}$

$$\#\text{perf. pár. na } G = \underbrace{\sum_{\pi \in S_m} B_{1\pi(1)} \dots B_{m\pi(m)}}_{\text{per } B}$$

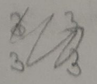
permanent matice B (nelze to jednoduše spočítat)

? platí

$\underbrace{\text{G má perfektní párování} \Leftrightarrow \text{per } B > 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0}$

pozorování ✓

$|\det B| < \text{per } B$



19.10.2021

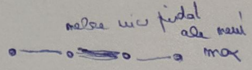
Párování

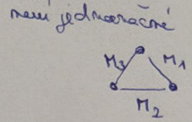
Def: $G=(V,E)$. Množinu $M \subseteq E$ nazveme <u>párování na G</u> pokud

$$\forall e,f \in M \; (e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset)$$

tj. dvě hrany párování nesdílí vrchol

Def: Párování M v grafu $G=(V,E)$ nazveme <u>maximální</u>, pokud pro každé párování M' na G platí $\#M \geq \#M'$





M_1, M_2, M_3 jsou maximální

- <u>perfektní</u>, pokud je každý $v \in V$ tzv. M-saturovaný, tj. $(\exists e \in M)(v \in e)$

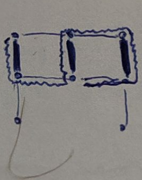
(nutná podm. – sudý počet vrcholů)

Pozn:
- V každém grafu existuje maximální párování.
- Pokud v G existuje perfektní párování $\Rightarrow \#V(G)$ je sudý
- Perfektní párování je maximální.

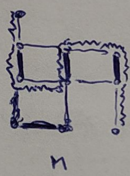
Def: Graf $G=(V,E)$, M.. párování v G.
Cestu $p=(v_i)_{i=0}^{k}$ v G nazveme:
- <u>M-střídající</u> pokud $\forall i \in \{1,\dots k-1\} \; (\{v_{i-1},v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i,v_{i+1}\} \notin M)$
- <u>M-zlepšující</u>, pokud je M-střídající a navíc v_0 a v_k nejsou M-saturované

Př:

▮ M



je M-střídající, není M zlepšující



M-zlepšující

$\#M=4$

$\xrightarrow{\text{nové pár.}}$

mimo cestu nechám a prohodím hrany po cestě

$\#M'=5$

$$\boxed{M' = M \,\Delta\, P = (M \cup P) \setminus (M \cap P)}$$

cesta, E(P)

zjevně $\#M' = \#M + 1$

$M \Delta M'$ sym. diference

<u>Věta</u>: (Berge)

$G=(V,E)$, M.. párování v G

M je maximální v G $\Leftrightarrow$ v G neexistuje M-zlepšující cesta

Dk: $\Rightarrow$ pokud existuje M-zlepšující cesta $\Rightarrow \#M' = \#M+1$

M nebylo maximální <u>spor</u>

$\Leftarrow$ sporem: v G neexistuje M-zlepšující cesta $\wedge$ M není maximální

$\Rightarrow \exists M' : \#M' > \#M$

$H := (V, M \Delta M')$ všechny hrany z obou párování mimo ty společné

Snadno: $(\forall v \in V)(d_H(v) \in \{0,1,2\})$ 3 a víc není možné neboť by do <u>v</u> v G vedly alespoň 2 hrany z M nebo M' (nebylo by párování)

H je tvořen:
- izolovanými vrcholy
- cesty
- sudé kružnice (sudá délka)

Věta (Hall)

$G=(V_1 \cup V_2, E)$ bipartitní graf. V G existuje párování saturující celé V_1

$\iff \forall T \subseteq V_1 \ (\#T \le \#N(T))$

Dk: $\boxed{\Rightarrow}$: $\forall$ vrcholy V_1 odchází hrana z M, ty mají ve V_2 různé konce (protože párování)

$$\#V_1 \le \#N(V_1)$$

platí i pro každou podmnožinu V_1

$\boxed{\Leftarrow}$: G splňuje Hall. podmínku a neobsahuje párování saturující V_1 $\Rightarrow$ max. párování má méně hran než je $\#V_1$

sporem

S .. min. vrcholové pokrytí $\Rightarrow \#S < \#V_1$

$= \#$ max párování // věta König

nechť $S = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2$ kde $\tilde{V}_1 \subseteq V_1, \tilde{V}_2 \subseteq V_2$

$\#V_1 > \#S = \#\tilde{V}_1 + \#\tilde{V}_2$

$\#\tilde{V}_2 < \#V_1 - \#\tilde{V}_1 = \#(V_1 - \tilde{V}_1)$

a G nemůže existovat hrana s jedním koncem ve $V_1 - \tilde{V}_1$ a 2. koncem ve $V_2 - \tilde{V}_2$

tedy $N(V_1 - \tilde{V}_1) \subseteq \tilde{V}_2$

a tedy $\#N(\underbrace{V_1 - \tilde{V}_1}_{T}) \le \#\tilde{V}_2 < \#(\underbrace{V_1 - \tilde{V}_1}_{T})$

$\Rightarrow$ spor s Hall. podmínkou ok

Def: Graf $G=(V,E)$ je regulární (k-regulární)
pokud $\delta(G) = \Delta(G) = k \in \mathbb{N}$.

Důsledek: Regulární bipartitní graf má perfektní párování.

Dk:
BÚNO $\Delta(G) = k = \delta(G)$

$\#V_1 \cdot k \overset{\text{počet hran}}{=} \#V_2 \cdot k \Rightarrow \#V_1 = \#V_2$ nutná podmínka pro p.p. v bipartitním grafu

pišme $T \subseteq V_1$, E_1 .. hrany s jedním koncem v T

zřejmě E_2 .. hrany s jedním koncem v $N(T)$

$$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \#E_1 \le \#E_2$$

$$k \cdot \#T = \#E_1 \le \#E_2 = k \cdot \#N(T) \Rightarrow \forall T \subseteq V_1 \ (\#T \le \#N(T))$$

platí Hall. věta

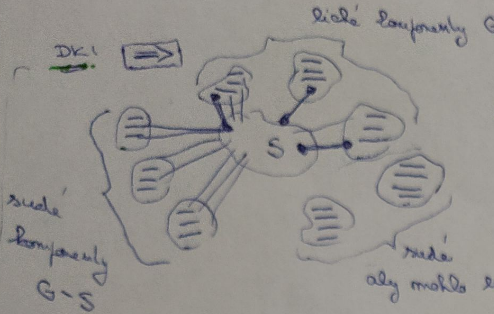
párování saturující celé V_1 + $(\#V_1 = \#V_2)$ je perfektní ok

Věta (Tutte) (nutná a postač. podm.)

$G=(V,E)$. G má perfektní párování $\iff \forall S \subseteq V\ (C_L(G-S) \leq \# S)$,

kde $C_L(G)$ je počet [illegible] lichých komponent (= komponenta s lichým počtem vrcholů) v G

Dk: $\boxed{\Rightarrow}$



ideální plán — sudé komponenty samy v sobě

každá lichá komponenta musí jeden přebývající vrchol napárovat na S $\Rightarrow \# S \geq C_L(G-S)$

OK

$\boxed{\Leftarrow}$ sporem $\forall S \subseteq V\ (\# S \geq C_L(G-S))$ a v G není perfektní párování. $\# V(G) = n$

pro $S=\emptyset$ $C_L(G) \leq 0 \Rightarrow$ každá komponenta G je sudá (nutná podmínka)

- $G^* \supseteq G$, $V(G^*) = V(G)$ .. maximální graf že nemá perfektní párování

není úplný (ten má perf. párování) →

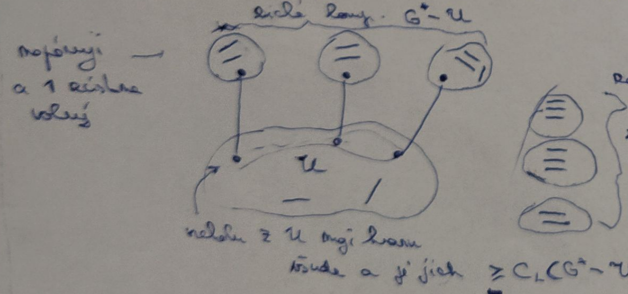
$U := \{ v \in V \mid d_{G^*}(v) = n-1 \}$ nutně $U \subsetneq V$

$C_L(G^*-U) \leq C_L(G-U) \overset{\text{podmínka}}{\leq} \# U$ ■

přidáváním hran které z G udělají G* do G−U se počet lichých komponent: nezmění (− hrana v komp., − hrana 2 sudé komp. − hrana sudá a lichá komp.)

sníží o 2 (− hrana 2 liché komp. spojí do 1 sudé)

- **Zbývá**: každá komponenta G^*-U je úplný graf



kde v komp. napárují po dvojicích když komp. úplné

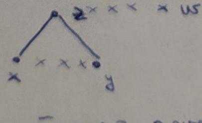
$\Rightarrow$ pak bude dokázáno a hotovo

tj. vytvořím perf. párování v G^* (spor)

1.11.2021

- **dk**: sporem: nechť komponenta C_1 není úplná, tzn. $\exists$ dvojice vrcholů nespojených hranou

$\Rightarrow \exists$ vrcholy x, y, z tž.



$z \in V(C_1) \Rightarrow z \notin U$

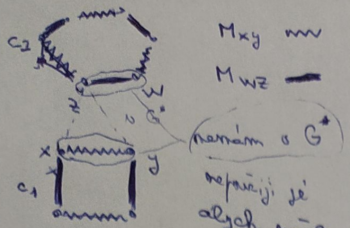
$\Rightarrow \exists w$ že w, z nejsou v hraně

G^* max. graf bez perfektního párování

- $G^* + \{x,y\}$ .. má perf. párování, ozn. M_{xy} pozn. $\{x,y\} \in M_{x,y}$
- $G^* + \{w,z\}$.. má perf. párování, ozn M_{wz} pozn. $\{w,z\} \in M_{wz}$

$H := (V, M_{xy} \triangle M_{wz})$ $d_H(v) \in \{0,2\}$ do každého vrcholu vede hrana v M_{xy} i M_{wz} buď ta samá (0) nebo různé (2)

$\Rightarrow$ H tvoří izolované body a sudé kružnice případy a) $\{x,y\}$ a $\{w,z\}$ na jiných kružnicích v H



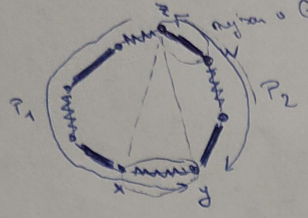
M_{xy} ~~~

M_{wz} —

hranám v G^* nepoužiji je abych našel p.p.

$\tilde{M} := (M_{wz} \setminus C_2) \cup (M_{xy} \cap C_2)$ ... je perfektní párování na G^*, tedy spor

b) $\{x,y\}$ a $\{w,z\}$ na stejné kružnici sudé v H



$\tilde{M} := (M_{wz} \setminus P_2) \cup (M_{xy} \cap P_2) \cup \{z,y\}$ ... je perf. párování v G^*

tedy spor OK

□

Věta: Nechť $T = (V,E)$ je strom. Potom T má perfektní párování $\iff \forall v \in V \ (c_L(T-v) = 1)$

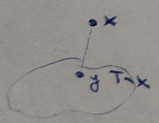
Dk: $\boxed{\Rightarrow}$ Tutte: $\forall v \in V \ (c_L(T-v)) \leq 1$

proč nemůže $c_L(T-v) = 0$? Pak by $T-v$ měl sudý počet vrcholů, tedy T lichý $\Rightarrow$ neex. perf. párování v T

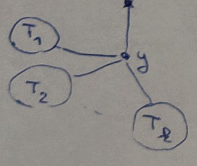
$\boxed{\Leftarrow}$ indukcí na $n = \# V$

- $n = 1$
  - $c_L(T-v) = 0 = c_L(\emptyset)$
    tzn. není splněn předpoklad implikace a ta je splněna
- $n = 2$
  - ex. p.p. $c_L(T-v) = 1 \ \forall v$ OK
- $\{1, \dots n-1\}$ platí $\longrightarrow n$

T strom $\Rightarrow \exists x \in V(T), \ d_T(x) = 1$. strom má 2 listy



$c_L(T-y) \overset{!}{=} 1$ .. lichá musí být izolovaný vrchol x
předpoklad



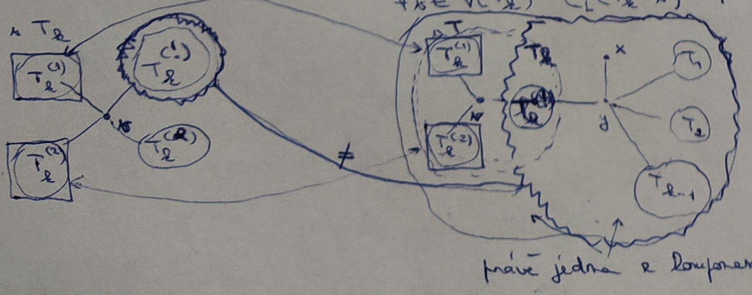
$T_1 \dots T_k$ .. sudé komponenty $T-y$

Chci: $\forall i \in \hat{k} \ \forall v \in V(T_i) \ (c_L(T_i - v) = 1)$

→ v T_i je perf. párování (z IP) potom ano pak perfektní párování v T bude $\{x,y\}$ sjednoceno s perf. pár. v T_i $\forall i$

BÚNO $i = k$

$\forall v \in V(T_k) \ \ c_L(T_k - v) = 1$?



dle předpokladu

$T-v$

právě jedna z komponent ~~[illegible]~~ má lichý počet vrcholů tj $c_L(T_k - v) = 1$ OK

□ komponenty jsou stejné v obou obrázcích i v levé části

 komponenty se liší, ale pravá má o sudý počet vrcholů více než levá $\Rightarrow$ v obrázku je právě 1 lichá komponenta OK

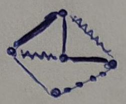
Hranová barevnost grafu

Def: $G=(V,E)$. <u>k-hranové obarvení</u> G je zobrazení $\varphi: E \to \hat{k}$.

k-hran. obarvení G je <u>vlastní</u> pokud $\forall e,f \in E,\ e \neq f\ (e \cap f \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(f))$

<u>Hranová barevnost</u> G (chromatic index), ozn. $\chi'(G)$, je nejmenší $k \in \mathbb{N}$, t.ž. G má vlastní k-hranové obarvení.

Př:



vlastní 4-hran. obarvení

$\chi'(G) \leq 4$

ale $=$

Pozn: • $\Delta(G) \leq \chi'(G)$ zjevně

• φ.. vlastní k-hran. obarvení, pro $i \in \hat{k}$, $\varphi^{-1}(i)$ je párování na G

Důsledek:

Hranová barevnost G = min. počet disjunktních párování, která pokrývají $E(G)$.

Věta: $G=(V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf. Pak $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Dk: 1) G je k-regulární, (každý vrchol stejně hran) $\Rightarrow$ v G $\exists$ perf. párování M_1

Sř věta

• hrany M_1 dostanou barvu 1, uvažujme graf $G - M_1 =: G_2$

G_2 je také bipartitní a $k-1$-regulární $\Rightarrow$ v G_2 ex. perf. párování M_2 .. <u>atd</u>.

tedy <u>barev tolik kolik je stupeň vrcholů</u> $k = \Delta(G) \geq \chi'(G)$

po k krocích obarvíme vše $\Delta(G) \leq \chi'(G)$ ale obecně

tedy $=$

ok

2) G není regulární, do V_1 nebo V_2 přidáme vrcholy tak, aby

$\# V_1 = \# V_2 = \max\{\# V_1, \# V_2\}$

potom přidáme hrany tak, aby vznikl $\Delta(G)$-regulární graf H:

$\Delta(G) \leq \chi'(G) < \chi'(H) = \Delta(H) = \Delta(G)$

konstrukce reg. bipartitní konstrukce

Věta: (Vizing)

$G=(V,E)$. Pak $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$. [illegible]

Def: $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$: k-hranové obarvení φ grafu G je <u>optimální</u>, pokud $\sum_{v \in V} b_\varphi(v)$ je max. možná. → přes $\forall$ k-hran. obarvení G.

$b_\varphi(v)$ je počet barev použitých na hranách incidentních s v.

Pozn: 1) $\forall v \in V\ (1 \leq b_\varphi(v) \leq d(v))$

2) Pokud $\forall v \in V\ (b_\varphi(v) = d(v))$, pak φ je vlastní

Lemma 1

$G=(V,E)$, souvislý, který není lichá kružnice.

Pak ∃ 2-hranové obarvení G, takové, že na každém vrcholu stupně alespoň 2 jsou obě barvy. (tj. s ním incidentní hrany mají obě barvy)

Dk: a) G je eulerovský

i) ∃ vrchol stupně ≥ 4, začnu s ním a jdu po euler. cyklu a obarvuji hrany na střídačku
určitě všude budou obě u vrcholu, začátkem projdu, tím. není problém

ii) není vrchol st. 4 $\Rightarrow$ ∀ vrcholy mají ~~vrchol~~ stupně 2 $\Rightarrow$ je to kružnice $\Rightarrow$ sudá kružnice
opět na střídačku obarvím, díky sudosti není problém u začátku

b) G není eulerovský

$\tilde{G}=(V\cup\{w\}, E\cup\{\{w,x\} \mid d_G(x) \text{ je liché}\})$

$\tilde{G}$ je eulerovský
$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x \text{ sudý st. v } G \\ x \text{ lichý v } G \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sudý v } \tilde{G} \\ d_{\tilde{G}}(w) = \# \text{ vrcholů lichého stupně v } G \text{, těch je nutně sudý počet protože} \end{array}\right.$$

$$\sum d_G(v) = 2\#E$$

∘ $\tilde{G}$ projdeme euler. cyklus se začátkem ve w, střídavě barvíme hrany cyklu

□.

vrcholu sudého stupně OK

lichého byl stupeň 1 měl alespoň 3, tedy tudy v $\tilde{G}$ projdu alespoň dvakrát a i po sebrání hrany $\{x,w\}$ mám obě barvy

Lemma 2

Nechť $\varphi: E \to \hat{k}$ je k-hranové optimální obarvení $G=(V,E)$.

Nechť $\exists u \in V$ a barvy i,j, že i je na vrcholu u alespoň dvakrát a j na vrcholu u není.

Pak komponenta grafu $(V, \varphi^{-1}(i)\cup\varphi^{-1}(j))$ obsahující vrchol u je lichá kružnice

Dk: pokud $\underbrace{\text{tato komponenta}}_{\text{ozn. } C_u}$ není lichá kružnice: sestrojím nové k-hranové obarvení G

$\forall e \in E - E(C_u): \tilde{\varphi}(e)=\varphi(e)$
hrany $E(C_u)$ obarvíme barvami i a j, podle lemma 1.

vrcholy mimo C_u: $k_{\tilde{\varphi}}(v)=k_\varphi(v)$

vrcholy v C_u, které mají v C_u stupeň 1: $k_{\tilde{\varphi}}(u)=k_\varphi(v)$

vrcholy v C_u (s výjimkou u), které mají $d_{C_u}(v)\geq 2$: $k_{\tilde{\varphi}}(v)\geq k_\varphi(v)$

vrchol u: původní $k_\varphi(u)=1$, teď dle lemma $k_{\tilde{\varphi}}(u)=2$

u v C_u má stupeň 2 / vzrostlo

(mohlo být $3 \to 4$)
ale jistě vzrostlo

$\Rightarrow$ tedy pro φ optimální $\underbrace{\sum_{v\in V} k_\varphi(v) < \sum_{v\in V} k_{\tilde{\varphi}}(v)}$, spor s optimalitou φ.

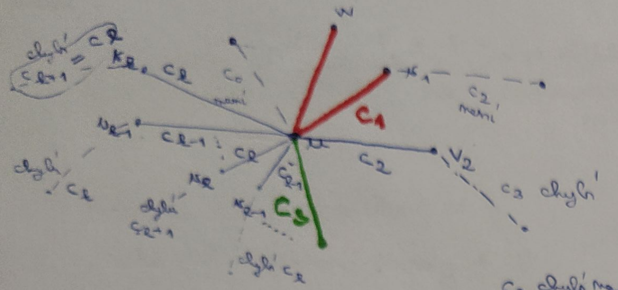
Důkaz Vizingovy věty

$G=(V,E)$. Nechť φ je optimální hranové obarvení G pomocí $\Delta(G)+1$ barev. (Ukážeme, že φ je vlastní)

Sporem: φ není vlastní: $(\exists u\in V)(k_\varphi(u) < d_G(u))$

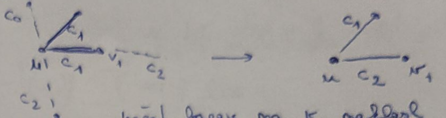
$\Rightarrow$ ∃ barva c_1, která na u ~~není~~ je alespoň 2x

$(\forall v\in V)(\exists$ barva, která na v není$)$



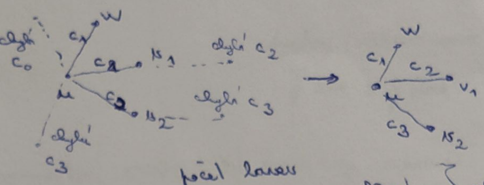
c_2 chybí na v_1, ale nutně musí být na u:

sporem: kdybych φ změnil: $\{u,v_1\}$ by dostala barvu c_2



počet barev na v_1 neklesl
počet barev na u vzrostl o 1 } spor s optimalitou φ

c_3 chybí na v_2, ale nutně je na u:



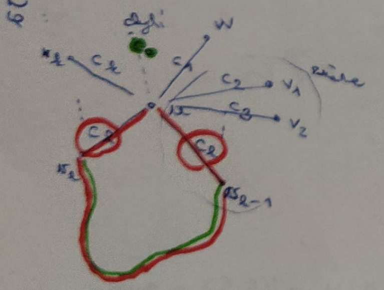
počet barev na v_1, v_2 neklesl
\# barev na u vzrostl } spor s optimalitou φ

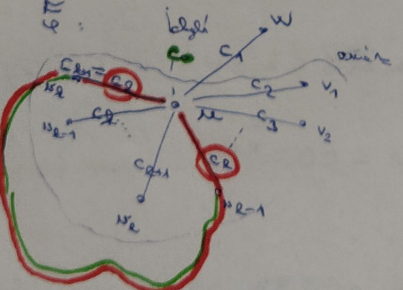
pokračuji dále dokud chybějící barva na v_k není nějaká která už na u je

uvažujme 2 přebarvení:
$$\tilde{\varphi}(e) = \begin{cases} c_{i+1} & \text{pro } e = \{u, v_i\}\ i \in \widehat{\ell-1} \\ \varphi(e) & \text{jinak} \end{cases}$$

obě jsou optimální

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(e) = \begin{cases} c_{i+1} & \text{pro } e = \{u, v_i\},\ i \in \widehat{k} \\ \varphi(e) & \text{jinak} \end{cases}$$





Lemma 2 pro u a barvy c_0 a c_ℓ jsou tam liché kružnice barev c_0, c_ℓ

přebarvením hran incidentních s u se nemůže kružnice změnit na jinou ... SPOR □

Toky v sítích

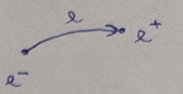
Def: Síť je $N=(G,X,Y,c)$, kde $G=(V,E)$ je orientovaný graf, $X,Y \subseteq V: X\neq\emptyset, Y\neq\emptyset, X\cap Y=\emptyset$

$c: E \to (0,+\infty)$ ... kapacita „cesty"

X.. výrobce, producenti

Y.. odběratelé / konzumenti

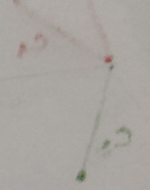
Pro hranu (u,v) .. značíme $e^- := u$, $e^+ := v$.



Def: Tok v síti $N=(G,X,Y,c)$ je $f: E \to \mathbb{R}$ taková, že platí:

T1) $\forall e \in E\ (0 \le f(e) \le c(e))$

T2) $\forall v \in \underbrace{V - X - Y}_{\text{vnitřní vrcholy}} \left(\sum_{e^-=v} f(e) = \sum_{e^+=v} f(e)\right)$ „Kirchhoffův zákon" co vteče to vyteče

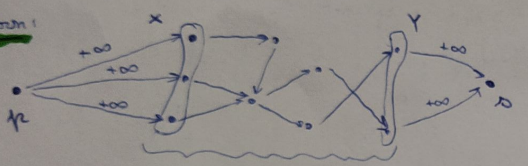


Def: Hodnota toku f v síti N je

$$\operatorname{val} f := \sum_{e^- \in X} f(e) - \sum_{e^+ \in X} f(e)$$

Def: Řekneme, že tok f v síti N je maximální, pokud pro každý tok $\tilde{f}$ v N platí $\operatorname{val} f \geq \operatorname{val} \tilde{f}$.

Pozn:



odtud síť s jedním „virtuálním" výrobcem $\underline{z}$ a jedním spotřebitelem $\underline{s}$

Def: $N=(G,z,s,c)$ síť, $S \subseteq V(G)$, taková, že $z \in S$, $s \notin S$

8.11.2021

$\overline{S} := V(G) - S$

Řez v síti N je $(S,\overline{S})$.

Kapacita řezu $(S,\overline{S})$ je $c((S,\overline{S})) = \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \overline{S}}} c(e)$

Tvrzení: Nechť f je tok a $(S,\overline{S})$ je řez v síti $N=(G,z,s,c)$.

Potom

$$\underline{\operatorname{val} f} = \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \overline{S}}} f(e) - \sum_{\substack{e^+ \in S \\ e^- \in \overline{S}}} f(e) \le \underline{c((S,\overline{S}))}$$

Pozn. Pokud v síti máme f a $(S,\overline{S})$, t.ž. $\operatorname{val} f = c((S,\overline{S}))$. Pak f je max. tok v N a $(S,\overline{S})$ je min. řez v N.

Dk: tvrzení

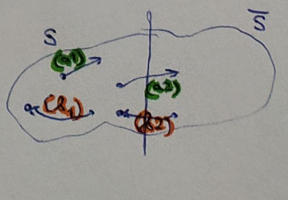
$$\operatorname{val} f = \sum_{e^-=z} f(e) - \sum_{e^+=z} f(e) = \sum_{v \in S}\Big(\overbrace{\sum_{e^-=v} f(e)}^{a)} - \overbrace{\sum_{e^+=v} f(e)}^{b)}\Big) = \overset{(a1)}{\cancel{\sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in S}} f(e)}} + \overset{(a2)}{\sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \overline{S}}} f(e)} - \overset{(b1)}{\cancel{\sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in S}} f(e)}} - \overset{(b2)}{\sum_{\substack{e^+ \in S \\ e^- \in \overline{S}}} f(e)}$$

pro vnitřní vrcholy z def. 0, $s \notin S$ tam 0 nemusí být

T1) $\forall e\ (0 \le f(e) \le c(e))$

$$\Rightarrow \quad = \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \overline{S}}} f(e) - \sum_{\substack{e^+ \in S \\ e^- \in \overline{S}}} f(e) \overset{(T1)}{\le} \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \overline{S}}} c(e) - \sum 0 = \underline{\underline{c((S,\overline{S}))}}$$

ok



Def:
Polocesta v orient. grafu je posl. vrcholů a hran $v_1, e_1, v_2, e_2 \ldots e_{k-1}, v_k$, že platí:
- $\forall i,j \in \hat{k}\ (i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j)$
- $\forall i \in \widehat{k-1}\ ((v_i, v_{i+1}) = e_i \vee (v_{i+1}, v_i) = e_i))$

tzn. hrany mohou být i opačně orientované

Def: Rezervní polocesta v $N=(G,z,s,c)$ s tokem f je polocesta P, že:
- začátek P je z
- $r(P) > 0$, kde $r(P) = \min_{e \in P} r(e)$

Polocesta P s počátkem v z:
$\forall e \in P$ rezerva hrany e je $r(e) := \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{pokud } e \text{ je na } P \text{ orientovaná } \underline{\text{od } z} \\ f(e) & \text{pokud } e \text{ je na } P \text{ orientovaná } \underline{k\ z} \end{cases}$

Věta (Ford, Fulkerson)

Tok f v síti $N=(G,z,s,c)$ je maximální $\Longleftrightarrow$ v N neexistuje rezervní polocesta s koncem v s. $\Rightarrow$

1\. půlka

Dk: $\boxed{\Rightarrow}$ P rezervní polocesta s koncem v s (~~[illegible]~~) obměna implikace!

upravíme tok f:

$$\tilde{f}(e) := \begin{cases} f(e) + r(P) & \text{pokud } e \text{ je na } P \text{ orient. } \underline{\text{od } z} \\ f(e) - r(P) & \text{pokud } e \text{ je na } P \quad \underline{k\ z} \\ f(e) & e \notin P \end{cases}$$

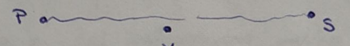
$\tilde{f}$ je tok? pozn $r(P) > 0$

T1) $0 \leq f(e) \leq c(e)$ ok

$0 \leq \underbrace{f(e) + r(P)}_{\tilde{f}(e)} \leq f(e) + c(e) - f(e) \leq c(e)$ ok

$c(e) \geq \overbrace{f(e) - r(P)}^{\tilde{f}(e)} \geq f(e) - f(e) \geq 0$ ok

T2) $\sum_{e^- \in v} \tilde{f}(e) = \sum_{e^+ \in v} \tilde{f}(e) \quad \forall v \in V - \{z, s\}$

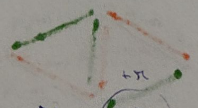


$+r+r \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$
$-r-r \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$ 4 možnosti
$+r-r \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow$
$-r+r \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow$

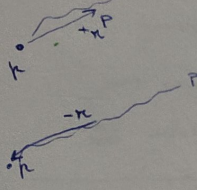
∴ ve v zůstane stejné $\pm r$ ven a dovnitř
anebo dovnitř/ven $+r$ a $-r$

$\tilde{f}$ je tok

val $\tilde{f}$



1\) $\text{val}\,\tilde{f} = \sum_{e^- = z} \tilde{f}(e) - \sum_{e^+ = z} \tilde{f}(e) = \text{val}\,f + r(P) > \text{val}\,f$

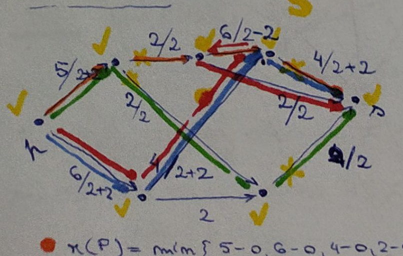


2\) $\text{val}\,\tilde{f} = \sum_{e^- = z} f(e) - \sum_{e^+ = z} \overset{(-r)}{\tilde{f}(e)} = \text{val}\,f - (-r(P)) > \underline{\text{val}\,f}$

ok

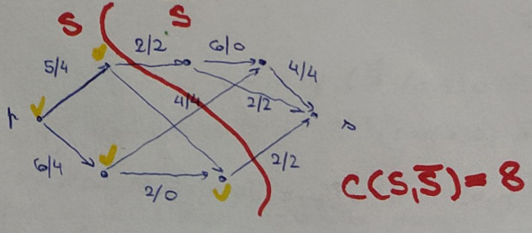
f není max

Příklad 1. část



- $r(P) = \min\{5-0, 6-0, 4-0, 2-0\} = 2$
- $r(P) = \min\{5-2, 2-0, 2-0\} = 2$
- $r(P) = \min\{4-0, 6-0, 4-2\} = 2$
- $r(P) = \min\{6-2, 4-2, 2+2, 2-0\} = 2$

val $f = 8$



$C(S, \overline{S}) = 8$

ANO je tok max

Dk. 2. části

$\boxed{\Leftarrow}$ v N neex. nenasycená polocesta s koncem v s $\longrightarrow$ najdeme řez s kapacitou $c(S,\overline{S}) = \text{val } f$?

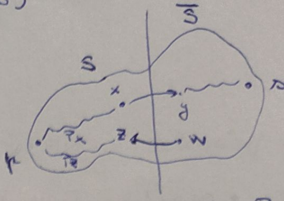
dk.

$S := \{ v \in V(G) \mid$ v N $\exists$ nenasycená polocesta s koncem ve $v \}$

$\overline{S} := V(G) - S$ $\quad$ $p \in S$ .. z p do p cesta nul. délky

$s \notin S$ .. plyne z •

řez $(S, \overline{S})$



$z \in S$ .. $\exists$ nen. polocesta P_z do z

$r(P_z) \geq 0$

$w \in \overline{S}$ .. neex. polocesta z p do w s kladnou rezervou

tedy $r(P_z + (w,z)) = 0$

$\Rightarrow r((w,z)) = 0$

2) $\boxed{f((w,z)) = 0}$

$x \in S$ .. $\exists$ nenasycená polocesta P_x do x

$y \in \overline{S}$ .. každá polocesta z p do y má rezervu 0, tedy i

$r(\underset{\sim}{P_x} + (x,y)) = 0$

$r(\cdot) \geq 0$

$\Rightarrow r((x,y)) = 0$

1) $\boxed{f((x,y)) = c((x,y))}$ $\Leftarrow$ rezerva 0, musí b. zaplněna tokem

(značení)

$$\underline{\text{val } f} = \underbrace{\sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \overline{S}}} f(e)}_{1)} - \underbrace{\sum_{\substack{e^- \in \overline{S} \\ e^+ \in S}} f(e)}_{2)} = \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \overline{S}}} c(e) - 0 = \underline{c((S,\overline{S}))} \ \text{ok} \quad \square$$

$\Rightarrow$ tok je maximální

ok

Věta (max-flow min cut)

V libovolné síti je hodnota max. toku rovná kapacitě min. řezu

= řez s min. kapacitou

bez dk.

Věta (o celočíselném toku)

Nechť N je síť s celočíselnými kapacitami (tzn. $c : E \to \mathbb{N}$), pak v N existuje maximální tok s celočíselnými hodnotami.

bez dk.

Def: Tok f v síti N nazveme booleovský pokud $\forall e \in E \, (f(e) \in \{0,1\})$

„praktické aplikace max-flow min cut teorému" alter. důkaz

Věta (Hall)

V bipartitním grafu $G = (V_1 \cup V_2, E)$ existuje párování saturující celé V_1

$\iff \forall S \subseteq V_1 \, (\# S \leq \# N(S))$

dk: $\boxed{\Rightarrow}$ snadná

$\boxed{\Leftarrow}$ pomocí toků

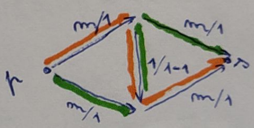
1) $G \longrightarrow N = ((V(G) \cup \{p,s\}, \tilde{E}), p, s, c)$

- $\forall e \in \tilde{E} \, (c(e) = 1)$
- $\tilde{E} = \{(p,v) \mid v \in V_1\} \cup \{(u,v) \mid \{u,v\} \in E(G), u \in V_1, v \in V_2\} \cup \{(v,s) \mid v \in V_2\}$

Tvrzení: V síti N $\exists$ tok s hodnotou $\text{val } f = \# V_1 \iff$ v G ex. párování saturující celé V_1.

„Hlavolam"

$m \in \mathbb{N}$

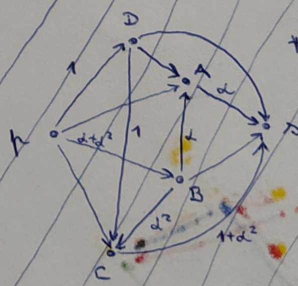


● $r(P) = \min\{m-0, 1-0, m-0\} = 1$

● $r(P) = 1$

potřeba 2m × to stejné než dojdeme k max. toku $\underline{\underline{2m}}$

Př:



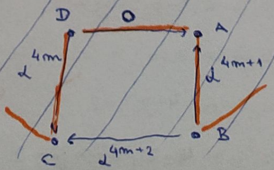
$\forall e \, (c(e) = +\infty)$

$f_0 : \text{val}(f_0) = 1 + \alpha + \alpha^2$

$\alpha \in \mathbb{R}$ kořen $x^3 + x - 1$

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$

m=0



$r(p) = \min\{\alpha^{4m}, \alpha^{4m+1}\}$

$= \underline{\alpha^{4m+1}}$

dk. tvrzení

$\boxed{\Leftarrow}$ M.. pár. saturující celé V_1

- $f((z,v)) = 1$
- $f((u,v)) = \begin{cases} 1 & \{u,v\} \in M \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ je to tok, ok! díky tomu, že M je párování
- $f((v,s)) = \begin{cases} 1 & \text{~~je~~ v je M saturován} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ ~~val~~ $\text{val} f = \#V_1$ ok

$\boxed{\Rightarrow}$ f tok v N s $\text{val} f = \#V_1$

podle věty o celočíselném toku: BÚNO f je celočíselný a tedy booleovský

M.. pár. saturující celé V_1

$e = \{u,v\} \in M \iff f((u,v)) = 1$

M je párování, jinak f porušuje podmínku (T2)

$\text{val} f = \#V_1 \Rightarrow$ z z odtéká $\#V_1 \Rightarrow$ do každého $v \in V_1$ přitéká 1 $\Rightarrow$ z každého $v \in V_1$ odtéká 1

$\Rightarrow$ každý $v \in V_1$ je M saturovaný. □

zpět k důkazu Halla:

$\boxed{\Leftarrow}$ chceme $(\forall T \subseteq V_1)(\#T \leq \#N(T)) \overset{?}{\Rightarrow}$ v G $\exists$ pár. saturující celé V_1

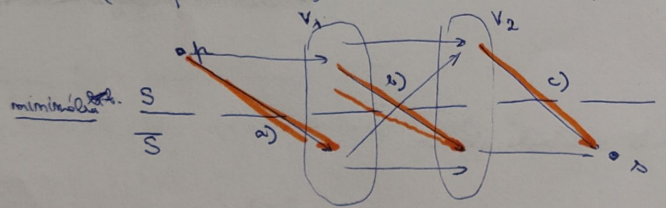
$\Rightarrow$ v N existuje tok f s $\text{val} f = \#V_1$

ověříme

obrácená implikace

Předp: max. tok v N má $\text{val} f < \#V_1$

$\Rightarrow$(max-flow min-cut) řez S v N s min. kapacitou má $C((S,\overline{S})) < \#V_1$



$$C((S,\overline{S})) \geq \overset{a)}{\#(V_1 \cap \overline{S})} + \overset{c)}{\#(V_2 \cap S)} + \overset{b)}{\#(\overline{S} \cap N(V_1 \cap S))}$$

mohl být vícenásob. počítám jen 1 proto nerovnost

množina podkem. $T \subseteq V_1$

$T := S \cap V_1$ ~~měla by platit~~

$$\#N(V_1 \cap S) \leq \#(\overline{S} \cap N(V_1 \cap S)) + \#(V_2 \cap S)$$

$$\#N(S \cap V_1) \leq \underbrace{\#(V_2 \cap S) + \#(\overline{S} \cap N(V_1 \cap S)) + \#(V_1 \cap \overline{S})}_{\leq C((S,\overline{S})) < \#V_1} - \#(V_1 \cap \overline{S})$$

$$< \#V_1 - \#(V_1 \cap \overline{S}) = \#(V_1 \cap S)$$ ok

Vrcholová barevnost

Def: $G = (V,E)$, $k \in \mathbb{N}$.

- k-vrcholové obarvení G je $\varphi : V \to \hat{k}$
- k-vrcholové obarvení je vlastní, pokud $(\forall u,v \in V)(\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow \{u,v\} \notin E)$
- (vrcholová) barevnost G $[\chi(G)]$ je minimální $k \in \mathbb{N}$, taková, že $\exists$ vlastní k-vrcholové obarvení G.

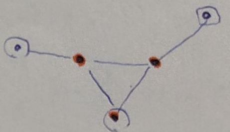
Pozn: $\chi(K_n) = n$ K_n.. úplný graf na N vrcholech

$\chi(V, \emptyset) = 1$

G bipartitní, $\#E(G) \geq 1$, $\chi(G) = 2$

Def: $G=(V,E)$, $S \subseteq V$, $\#S = k \in \mathbb{N}$

- S je klika velikosti k v G, pokud $\binom{S}{2} \subseteq E$
- S je nezávislá množina velikosti k v G, pokud $\binom{S}{2} \cap E = \emptyset$.
- $\omega(G)$ .. velikost max. kliky v G (clique number)
- $\alpha(G)$ ... velikost max. nez. množiny v G (stability number)



$\omega(G)=3$

$\alpha(G)=3$

Pozn: φ vrcholové vlastní obarvení v G, $\overset{\forall i}{\varphi^{-1}(i)}$ = nezávislá množina v G

Tvrzení $G=(V,E)$. Pak

1) $\chi(G) \geq \omega(G)$

2) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq \#V$

Dk: 1) už na obarvení kliky je třeba $\omega(G)$ barev, max. klika $= K_{\omega(G)}$

2) φ.. vlastní vrchol. obarvení G pomocí $\chi(G)$ barev

$\varphi^{-1}(i)$ je nezávislá množina $\forall i \in \widehat{\chi(G)}$

$$\Rightarrow \#\varphi^{-1}(i) \leq \alpha(G)$$

$$V = \varphi^{-1}(1) \cup \varphi^{-1}(2) \dots \cup \varphi^{-1}(\chi(G))$$

$$\#V = \sum_{1}^{\chi(G)} \#\varphi^{-1}(i) \leq \sum_{1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \alpha(G)\,\chi(G)$$

15.11.2021

Věta $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

Dk: hladový algoritmus pro hledání vlastního vrcholového obarvení φ

- nechť $V = \{v_1, v_2 .. v_n\}$
- v i-tém kroku v_i dostane první volnou barvu

$$\varphi(v_i) = \min_{j\in} \{ j \in \mathbb{N} \mid \forall v \in N(v_i) \cap \{v_1, \dots v_{i-1}\}, (\varphi(v_i) \neq j) \}$$

ok $\Delta(G)+1$ barva bude vždy volná

každý vrchol má max. $\Delta(G)$ obarvených sousedů

$$\underbrace{\chi(G) \leq \Delta(G)+1}$$

v i-tém kroku:

$$d_{\underset{\text{podgraf}}{G[\{v_1, \dots v_i\}]}}(v_i)+1$$

Lepších výsledků dosáhneme: v_n .. $d_G(v_n) = \delta(G)$

v_{n-1} .. ten který má nejmenší stupeň v $G - v_n$

atd.

Důsledek: $\chi(G) \leq \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\}+1$

místo $H \subseteq G$ bychom měli brát pouze indukované podgrafy G

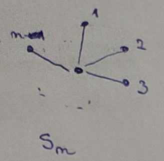
Pozn: $H_1 \subseteq G$ s $V(H_1) = W$

$G[W]$

$\Rightarrow \delta(H_1) \leq \delta(G[W])$

v pohodě

Př:



$\Delta(S_m) = m$

$\chi(S_m) = 2$

velmi špatný odhad pro některé grafy

× K_m

$\chi(K_m) = m$

$\Delta(K_m) = m-1$

C_{2m+1} liché kružnice

$\chi(C_{2m+1}) = 3$

$\Delta(C_{2m+1}) = 2$

k-kritické grafy

Def: $G=(V,E)$, G nazveme k-kritický pokud platí $(\chi(G)=k)$ a $(\forall H \subsetneq G)(\chi(H) \leq k-1)$.

Tvrzení k-kritický graf je souvislý

„dk." G komponenty $G_1, \dots G_r$
$\chi(G) = \max_{i \in \hat{r}} \chi(G_i)$ } odebráním celé komponenty nemusí χ klesnout

Tvrzení $G=(V,E)$, k-kritický. Pak $\delta(G) \geq k-1$.

Důk: sporem $\exists u \in V\ (d_G(u) \leq k-2)$

$G - u \subsetneq G \Rightarrow \chi(G-u) \leq k-1 \Rightarrow \exists$ vlastní (k−1) vrcholové obarvení $G-u$

vrátíme u: u má v G max. k−2 sousedů, na nich max. k−2 různých barev

$\Rightarrow$ minim. 1 barva je volná pro obarvení u $\Rightarrow$ máme vlastní (k−1) vrcholové obarvení G SPOR s k-kritičností

Př: k-kritické grafy

k=1

$= K_1$

k=2

K_2

k=3

liché kružnice

k=4 např.

je jich více

Def: $G=(V,E)$. Množinu $S \subseteq V$ nazveme **řezem** v G, pokud $c(G-S) > c(G)$, kde $c(G)$ = # komponent grafu G.

Tvrzení Řez k-kritického grafu G není klika v G.

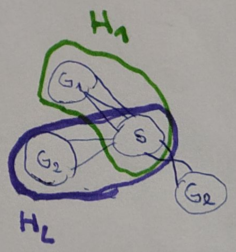
Dk: sporem / $S \subseteq V$, $S = \{v_1, v_2, \dots v_r\}$ je klika v G a je řez v G

$c(G) = 1 \Rightarrow c(G-S) = \ell \geq 2$

Komponenty $G-S$: $G_1, \dots G_\ell$

pro spor: najdeme vlastní obarvení G pomocí k−1 barev: $i = 1, 2, \dots \ell$ $H_i := G[V(G_i) \cup S]$

$H_i \subsetneq G \Rightarrow \chi(H_i) \leq k-1$



$\Rightarrow \varphi_i$ – vlastní (k−1)-obarvení H_i

… S je klika $\Rightarrow$ vrcholy $v_1 \dots v_r$ spojené každý s každým i v H_i $\Rightarrow$ mají různé barvy

BÚNO $\forall i \in \hat{\ell}, \forall j \in \hat{r}\ (\varphi_i(v_j) = j)$

Nyní jednotlivá φ_i sjednotíme:

$\varphi(v_i) = i \quad \forall v_i \in S$
$\forall w \in V(G_j) \quad \varphi(w) = \varphi_j(w)$ } vlastní k−1 ~~ba~~ vrcholové obarvení G $\Rightarrow$ SPOR

(Brooks)

Věta: Nechť G je souvislý graf, který není úplný ani lichá kružnice.

Pak $\chi(G) \le \Delta(G)$.

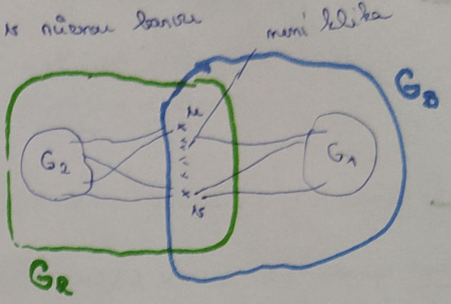
Tvrzení Nechť G je k-kritický graf s řezem $\{u,v\}$. Pak $d_G(u) + d_G(v) \ge 3k-5$.

Pro tvrzení

odebrání vrcholů i s hranami

Lemma 1 $G - \{u,v\}$ má právě 2 komponenty: G_1, G_2

- každé vlastní (k−1)-obarvení $G_S = G[V(G_1) \cup \{u,v\}]$ dá u, v stejnou barvu
- každé vlastní (k−1)-obarvení $G_R = G[V(G_2) \cup \{u,v\}]$ dá u, v různou barvu



Dk: • máme alespoň 1 komponentu „s vlastností G_S"
pokud ne, všechny části $G[V(G_i) \cup \{u,v\}]$
obarvíme vlastním k−1 obarvením tak, že
BÚNO u má barvu 1 a v barvu 2,
sjednocením dostaneme vlastní k−1 obarvení G (spor)

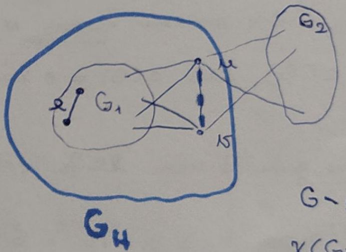
- máme alespoň 1 komponentu „s G_R" (analogicky)
- už přítomnost jedné komponenty s vl. G_S a jedné G_R vynutí ~~k~~ $\chi(G) = k$, proto pokud je v G „něco navíc", vyhozením se barevnost nezmění. ⇒ SPOR ~~s k~~ ⇒ pouze a právě 2 komponenty s k-kritičností

Lemma 2 $G_H := G_S + \overset{hrana}{\{u,v\}}$ je (k-kritický graf.

Dk:

1) $\chi(G_H) = k$. nelze obarvit pomocí k−1 barev protože každé vl. (k−1) obarvení G_H je vlastním obarvením G_S
$\Rightarrow$ u, v stejná barva a já je spojují hranou. ok

2) $\forall e \in E(G_H) (\chi(G_H - e) \le k-1)$
   0) $e = \{u,v\}$ .. zjevné
   1) $e \ne \{u,v\}$ tedy $e \in E(G_S)$



$G - e \subsetneq G$ (k-kritický)

$\chi(G-e) \le k-1$. ∃ vlastní φ (k−1) obarvení G − e

! v $G - e \supseteq G_R$

φ je zároveň
vlastním obarvením na G_R
$\Rightarrow \varphi(u) = \varphi(v)$

$\varphi|_{V(G_H)}$ je vlastním (k−1) obarvením $G_H - e$. ok

Lemma 3 $G_V := G_R - \{u,v\} + \{\{w,x\} \mid x \in N_{G_R}(u) \cup N_{G_R}(v)\}$

.. tzn. jsme v G_R vrcholy u a v sloučili do jednoho nového vrcholu.

Pak G_V je k-kritický graf.

Dk: analogie lemma 2

Důkaz lemmi

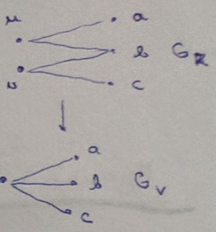
$$d_G(u) + d_G(v) = \underbrace{d_{G_S}(u)} + \underbrace{d_{G_R}(u)} + \underbrace{d_{G_S}(v)} + \underbrace{d_{G_R}(v)} \geq \underbrace{d_{G_H}(u) - 1 + d_{G_H}(v) - 1} + \underbrace{d_{G_V}(w)}$$

$$\geq k-1-1+k-1-1+k-1 = 3k-5$$

□

k-kritický graf

~~stupeň~~ $\delta(G) \geq k-1$



Důkaz Brooksovy věty

1) Brooksе stačí dokázat pro k-kritické grafy

$\chi(G) = k$, G souvislý, není k-kritický, jistě najdeme H: k-kritický podgraf G

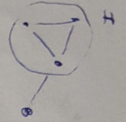
a) H není ani klika ani lichá kružnice

$$\chi(G) = \chi(H) \leq \Delta(H) \leq \Delta G \text{, ok}$$

Brooks pro k-kritické

b) H je úplný • nutně $H \subsetneq G$ • G je souvislý => smazáním jsem dostal úplný graf

$$\chi(G) = \chi(H) = \Delta(H) + 1 \leq \Delta G \text{, ok}$$



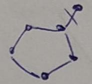
$\Delta(G) \geq \Delta(H) + 1$

c) H je lichá kružnice

$$\chi(G) = \chi(H) = \Delta(H) + 1 = 3 \leq \Delta(G)$$

lichá kr. vznikla smazáním části souvislého grafu G

$\Delta(G) \geq 3$



ok

2) Brooks pro k-kritický graf s řezem $\{u, v\}$

$$2\Delta(G) \geq d_G(u) + d_G(v) \geq 3k-5 = 2k-4 + \overset{\geq 0}{(k-4)} \geq 2k-1$$

G je k-kritický, není úplný, není lichá kružnice => $\underline{k \geq 4}$

~~[illegible]~~ 1-kritický K_1, 2-kritický K_2, 3-kritický liché kružnice

$$\underbrace{2\Delta(G)}_{\text{sudé}} \geq \underbrace{2k-1}_{\text{liché}}$$

k-krit. graf

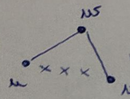
$$\cancel{2}\Delta(G) \geq \cancel{2}k = \chi(G)$$

3) Brooks pro k-kritický graf bez 2-prvkového řezu

↓ G souvislý

$\Downarrow$ $\underbrace{G \setminus \{x, y\}}_{\text{2 vrcholy}}$ souvislý $\forall x, y \in V(G)$ *

G není úplný => ∃



, třešinka

uspořádáme vrcholy G: $v_1 = u$, $v_2 = v$, ... $v_m = w$, ostatní uspořádáme podle vzdálenosti od w v $G \setminus \{u, v\}$

tak, že v_3 je nejdále

* => v posloupnosti $v_1, \ldots v_{m-1}$, vede z každého vrcholu alespoň 1 hrana do vrcholu s vyšším indexem

např. vrchol se vzdáleností 5 od w musí být v hraně s vrcholem s vzdáleností 4 od w

Na takto usp. vrcholy aplikujeme hladový algoritmus. $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = 1$

když barvíme $\varphi(v_i)$ pro $i = 3, \ldots m-1$: v_i má min 1 neobarveného souseda => max $\Delta(G) - 1$ obarv. sousedů

=> jedna z $\Delta(G)$ barev je volná

$w = v_n$ sice může mít $\Delta(G)$ obarvených sousedů ale 2 z nich (u, v) mají stejnou barvu ⟹ na sousedech je max. $\Delta(G)-1$ různých barev ⟹ alespoň 1 barva je volná.

$\chi(G) \leq \Delta(G)$ ☐

(Mycielski) konstrukce (k+1) kritického grafu z k-kritického

za každý vrchol G přidám 2

$G=(V,E)$

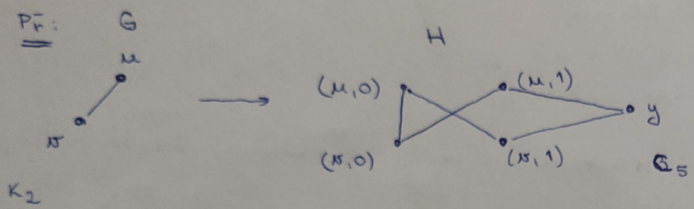
↓

$H=(U,F)$

$U = \{(u,i) \mid u \in V,\ i \in \{0,1\}\} \cup \{y\}$

$F = \Big\{ \{(u,0),(v,i)\} \mid \{u,v\} \in E,\ i \in \{0,1\} \Big\} \cup \Big\{ \{y,(v,1)\} \mid v \in V \Big\}$

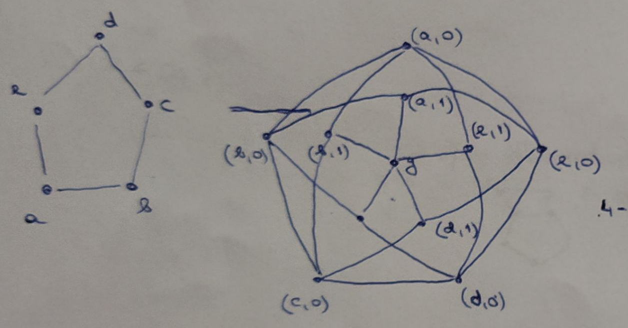
Př:



ok = „lichá kružnice"

Tvrzení: Je-li G k-kritický, pak H je (k+1)-kritický.

DK: přeskakujeme, technické

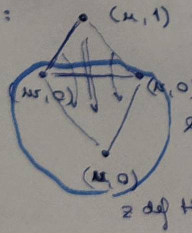


4-kritický graf

Tvrzení Neobsahuje-li G kliku velikosti 3, pak ji neobsahuje ani H.

DK: sporem, nechť v H máme velikosti 3.

jediná možnost :

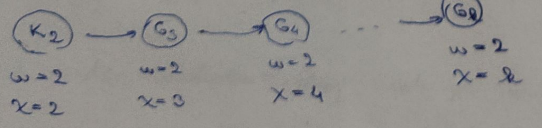


1 vrchol 1, 2 vrcholy 0

by byla klika vel. 3 na úrovni 0, tedy v G SPOR

z def H

Důsledek: Pro $k \in \mathbb{N}$, ∃ graf G s $\chi(G) = k$ a $\omega(G) = 2$.



Věta: (Erdős) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje graf G, takový, že $\chi(G) > k$ a $g(G) > k$.

g = girth = délka nejkratší kružnice v G.

Souvislost

Def: $k \in \mathbb{N}$, $G=(V,E)$ je k-vrcholově souvislý, pokud
- $\#V > k$
- $G-U$ je souvislý pro každou $U \subseteq V$, $\#U < k$

Maximální $k \in \mathbb{N}$, takové, že ~~G~~ je ~~k~~vrcholově souvislý, nazýváme vrcholová souvislost G, ozn. $\varkappa(G)$.

Pozn:
- 1-souvislé (s $\#V \geq 2$) jsou právě souvislé (ve smyslu původní definice).
- $\varkappa(K_n) = n-1$
- $\varkappa(G) = 0 \iff G$ není souvislý nebo $G = K_1$

22. 11. 2021

Def: $\ell \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $G=(V,E)$ je ℓ-hranově souvislý, pokud
- $\#V \geq 2$
- $G-F$ je souvislý po každou $F \subseteq E$, $\#F < \ell$

Maximální $\ell \in \mathbb{N}$, že G je ℓ-hranově souvislý, nazveme hranovou souvislostí G, ozn. $\varkappa'(G)$.

Def: $G=(V,E)$, $A, B \subseteq V$
- Cestu $p = x_0, x_1, \dots x_\ell$ nazveme A-B cestou, pokud $p \cap A = \{x_0\}$ a $p \cap B = \{x_\ell\}$
- Pokud $X \subseteq V \cup E$ je taková, že libovolná A-B cesta v G obsahuje hranu nebo vrchol z ~~X~~ pak, řekneme, že X v G odděluje A ~~od~~ B.

Pozn:
- $A \cap B \subseteq X$

  npř. $v \in A \cap B$

  v.. A-B cesta (nul. délky) $\Rightarrow v \in X$
- G k vrcholově souvislý $\Rightarrow$ žádné 2 vrcholy nejsou odděleny méně než k vrcholy (tzn. uvažujeme $X \subseteq V$)

- X = A.. odděluje A ~~od~~ libovolné $B \subseteq V$

Věta: $G=(V,E)$ s $\#V \geq 2$. Pak $\varkappa(G) \leq \varkappa'(G) \leq \delta(G)$.

Dk:
1) $\varkappa'(G) \leq \delta(G)$

.. množina hran incidentních s vrcholem v odděluje v G $\{v\}$ od ost. vrcholů

tj. oddělením $\delta(G)$ hran od vrcholu s min. stupněm bychom vrchol oddělili a porušili souvislost

2) $\varkappa(G) \leq \varkappa'(G)$

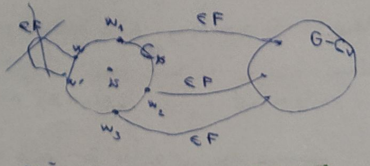
$F \subseteq E$ je min. tak, že $G-F$ není souvislý

chceme $\varkappa(G) \leq \#F$

Pro $v \in V$ C_v := komponenta $G-F$ obsahující v.

a) $\exists v \in V$, který není koncem žádné hrany v F

to nejde, nevíme, zda je to méně a odděluje v od G−C_v vrcholy w_i těch je #F



$\underline{\varkappa(G) \leq \#F}$
- sousedi v C_v, kteří zároveň jsou konce hran z F odděluji v G $\{v\}$ od $G-C_v$
- nějaké w_i jsou konce nějakých hran z F (jinak spor s minimalitou F)

k) každý vrchol G je koncem něj. hrany z F

potom fixni $v \in V$.

- každý w ~~●~~ soused v, takový, že $\{w,v\} \notin F$ je vrcholem C_v
- plyne z minimality F: tyto vrcholy jsou konce různých hran z F. $\Rightarrow d_G(v) \leq \# F$

$N(v)$ odděluje v G $\{v\}$ od „zbytku grafu" ▲

$\Rightarrow \underline{\kappa(G) \leq \# F}$

výjimka

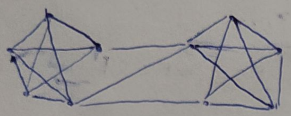
Jediná situace, kdy úvaha ▲ nefunguje: tzn. „zbytek grafu" je prázdný

a navíc platí $\forall v \in V$

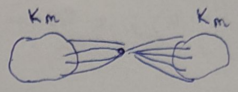
to je ale jen pro $G = K_n$ $n \in \mathbb{N}$.

a $\kappa(K_n) = n-1 = \kappa'(K_n) = n-1$ ok □

Př:

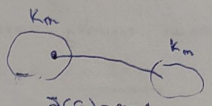


$\kappa(G)=2,\ \kappa'(G)=3,\ \delta(G)=4$



$\delta(G) = n,\ \kappa(G)=1$

$\kappa'(G)=n$



$\delta(G)=n-1$

$\kappa'(G)=1$

$\kappa(G)=1$

Věta (Menger)

$G=(V,E)$, $A,B \subseteq V$. Minimální počet vrcholů (tzn. $X \subseteq V$), které v G oddělují A od B je roven max. počtu disjunktních A−B cest v G.

Ozn: $k(G,A,B) :=$ min. počet vrcholů v G oddělujících A od B.

Vlastnosti $k(G,A,B)$

1) $k(G,A,B) \leq \min\{\#A, \#B\}$ protože jak A, tak B odděluje v G ~~od~~ A od B

2) Pokud v G neexistují žádné A−B cesty, i $\emptyset$ odděluje A od B $\Rightarrow k(G,A,B)=0$

3) Pokud $A \subseteq B$
   - A odděluje A od B
   - každá X, která odděluje ~~A~~ A od B musí obsahovat A (jinak máme nějakou A−B cestu nul. délky na vrcholu $v \in A-X$)

$\#A = k(G,A,B)$

4) A a B_1, B_2 tak, že $B_1 \subseteq B_2$

pak $k(G,A,B_1) \leq k(G,A,B_2)$

– každá X, která oddělí v G A od B_2 nutně oddělí i A od B_1

Dk: Menger Pokud v G neexistuje A−B cesta, pak je tvrzení triviální (viz 2))

BÚNO máme alespoň 1 A−B cestu

v G máme nejvýše $k(G,A,B)$ A−B cest, Mengera ukážeme tak, že je najdeme

Lemma Máme-li v G $n < k(G,A,B)$ disjunktních A−B cest $P_1, \dots, P_n$, pak v G máme $n+1$ disj. A−B cest $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ tak, že ~~$b \in B$~~ je-li $b \in B$ koncem nějaké P_i, tak je koncem také Q_j.

Dk. lemmatu: indukcí na $\beta := \#(V \setminus B)$.

- $\beta = 0 \Rightarrow V = B$ .. a tedy $A \subseteq B$, dle 3) $\Rightarrow k(G,A,B) = \#A$

  máme $\underbrace{P_1, \dots P_m}_{\text{cesty nul. délky na m vrcholech z A}}$ disj. A–B cest, kde $m < \#A$ (další by měla 2 vrcholy v B=V, spor)

  hledaná m+1 cesta = některý z nepoužitých vrcholů z A

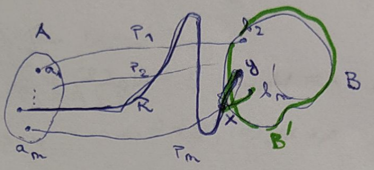
- platnost pro $\#\beta < \beta_0$ pro pevné $\beta_0 \geq 1$ ⇒ ukážeme platnost pro β_0

A, B, $k(G,A,B)$ máme $P_1, \dots P_m$ disj. A–B cest, konce cest: P_i má v **B** konec b_i a v A konec a_i

$m < k(G,A,B)$ def.

např. ↓ $\{b_1, b_2, \dots b_m\}$ neodděluje v G A od B

⇒ máme v G A–B cestu R, tak, že $R \cap \{b_1, \dots b_m\} = \emptyset$.



a) pokud R je disjunktní s $P_1, \dots P_m$, máme hotovo

b) R není disj. s $P_1, \dots P_m$

ozn. x .. poslední průsečík (směrem k B) R s nějakou P_i (BÚNO přeznačím, aby to byla P_m)

uvažujeme množinu $B' := B \cup \underbrace{V(xRy)}_{\text{vrcholy na R mezi x a y včetně}} \cup (xP_m b_m)$

protože $\#B' > \#B$ tak z IP máme pro $\underbrace{P_1, \dots P_{m-1}, a_m P_m x}_{\bullet}$ disjunktní A–B' cesty

$Q'_1, \dots Q'_{m+1}$ disjunktní A–B' cesty tak, že $\{\underbrace{b_1, b_2, \dots b_{m-1}, \overset{\text{konec } Q_m}{x}}_{\text{konce } \bullet}, \overset{\text{konec } Q'_{m+1}}{\boxed{w}}\}$ jsou konce těchto cest v B'.

hledáme m+1 disjunktních A–B cest s konci v B $\{b_1, \dots b_m, z\}$

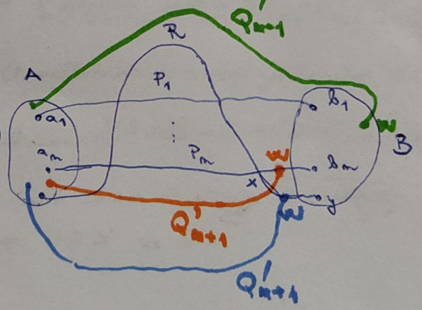
3 varianty podle w:

a) $w \in V(xP_m b_m)$ (pozn. $w \neq x$)

$Q_i = Q'_i \quad \forall i \in \widehat{m-1}$ (konce b_1, b_{m-1})

$Q_m = Q'_m x R y$

↑ (Q'_m až do x, potom část R mezi x a y) $\underline{\underline{z = y}}$



$Q_{m+1} = Q'_{m+1} w P_m b_m$

b) $w \in V(xRy)$ (pozn. nutně $w \neq x$)

$Q_i = Q'_i \quad \forall i \in \widehat{m-1}$

$Q_m = Q'_m x P_m b_m$

$Q_{m+1} = Q'_{m+1} w R y \quad \underline{\underline{z = y}}$

c) $w \in B' \setminus V(xP_m b_m) \setminus V(xRy)$

$Q_i = Q'_i \quad \forall i \in \widehat{m-1}$

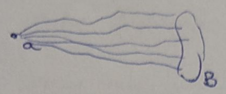
$Q_m = Q'_m x P_m b_m$

$Q_{m+1} = Q'_{m+1}$. $\underline{\underline{z = w}}$

OK

Def: $G=(V,E)$. Cesty v G nazveme <u>nezávislé</u>, pokud žádná z nich neobsahuje vnitřní (tedy nekoncový) vrchol jiné.

Def: $G=(V,E)$, $a \in V$, $B \subseteq V$
Množinu $\{a\}$-B cest (a-B cest) nazveme vějířem v G (fan) pokud každé 2 z nich mají společný právě vrchol a.



Důsledek:

1) $G=(V,E)$, $a,b \in V$, $a \neq b$. Pokud $\{a,b\} \notin E$, pak
Minimální počet vrcholů, různých od a, b, které v G oddělují a od b je roven max. počtu nezávislých a-b cest v G.

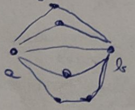
2) $G=(V,E)$, $a \in V$, $B \subseteq V - \{a\}$
Min. počet vrcholů, které v G oddělují a od B je roven max. počtu cest, které v G tvoří a-B vějíř.

Dk: 1) aplikací Menger. věty v $G - \{a,b\}$ na $A = N_G(a)$, $B := N_G(b)$ ok
2) aplikace Menger. věty v $G - \{a\}$ na $A = N_G(a)$, $B := B$ ok

Věta (globální verze Mengerovy věty)

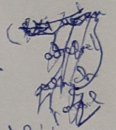
$G=(V,E)$ je k-vrcholově souvislý $\iff$ mezi libovolnou dvojicí jeho vrcholů existuje k nezávislých cest.

Dk: $\boxed{\Leftarrow}$: mezi lib. dvojicí vrcholů máme k nezávislých cest
- žádné 2 vrcholy nejsou v G odděleny méně než k vrcholy
- $a, b \in V$



k nez. a-b cest – jedna může být hrana $\{a,b\}$
– každá další má alespoň 1 vnitřní vrchol

$\#V \geq k-1+\underbrace{2}_{\{a,b\}} = k+1$ další podmínka ok



odebráním $k-1$ vrch. stále neporuším souvislost

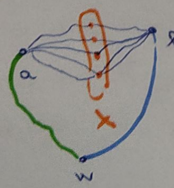
$\boxed{\Rightarrow}$ sporem: • G .. k-vrchol. souvislý
• $\exists a, b \in V$ mezi kterými je max. $k-1$ nez. cest

abychom nebyli ve sporu s důsledkem 1), musí platit $\{a,b\} \in E$.

Uvažujme $G' := G - \{\{a,b\}\}$ smažu hranu $\{a,b\}$ pouze

(Důsledek 1)) $\Rightarrow$ v G' máme max. $k-2$ nezávislých a-b cest (jedna byla $\{a,b\}$)
v G' ex. $X \subseteq V$, $\#X \leq k-2$, X v G' odděluje a od b

v G':



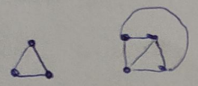
$\#V(G') = \#V(G) > k$ (z k-vrchol. souvislosti)
↑ máme a, b
X: $\#X \leq k-2$
$\Rightarrow \exists w \in V - X - \{a,b\}$

Nutně: X v G' odděluje w buď od a nebo od b.
(jinak bychom měli a-w cestu a b-w cestu, které se vyhýbají X, jejich spojení je a-b cesta vyhýbající se X – spor)

BÚNO X v G' odděluje a od w
potom ale $X \cup \{b\}$ je množina max. $k-1$ vrcholů, které v G oddělují a od w $\equiv$ spor s <u>k-souvislostí G</u>

Planární grafy

Int. def:



Pro planární graf ∃ alespoň jedno tzv. rovinné nakreslení, tzn. nakreslení do roviny tak, že se hrany kříží / potkávají pouze ve vrcholech.

Def: $G=(V,E)$ je planární (rovinný graf), pokud existují

- $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$, prosté
- $\psi : E \to C$ .. množina spojitých jednoduchých křivek v $\mathbb{R}^2$

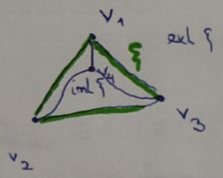
taková, že

- $\forall e=\{u,v\} \in E$ $\varphi(u)$ a $\varphi(v)$ jsou koncové body e
- $\forall e,f \in E$ $(\psi(e) \cap \psi(f) = \varphi(e \cap f))$

$$\psi(\emptyset)=\emptyset$$

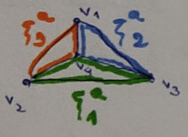
Tvrzení K_5 není planární.

Jordan. věta



a) $\varphi(v_4)$ do int ξ

b) $\varphi(v_4)$ do ext ξ



a) → i) $\varphi(v_5)$ do int ξ_1^a
ii) $\varphi(v_5)$ do int ξ_2^a
iii) $\varphi(v_5)$ do int ξ_3^a
iv) $\varphi(v_5)$ do ext ξ

a) i) $\varphi(v_5)$ je v int ξ_1^a a $\varphi(v_1)$ je v ext ξ_1^a ⇒ (Jordan) každá spojitá křivka s koncovými body $\varphi(v_5)$ a $\varphi(v_1)$ protne ξ_1^a

⇒ nelze planárně nakreslit
ok

další případy obdobně

Věta (Eulerova formule)

Nechť $G=(V,E)$ je planární graf, souvislý. Pak pro každé rovinné nakreslení $\hat{G}$ grafu G platí

$$\#V - \#E + \Phi(\hat{G}) = 2,$$ kde $\Phi(\hat{G})$ je počet oblastí, na které se rovina nakreslením $\hat{G}$ rozpadne (včetně neomezené)

Důkaz: indukcí na $\Phi(\hat{G})$

- $\Phi(\hat{G}) = 1 \Rightarrow G$ je strom $\Rightarrow$ Euler. věta $\#V = \#E+1$ dosadíme $\#V - \#E + \Phi(\hat{G}) = \#E+1-\#E+1 = \underline{\underline{2}}$ ok
- $\Phi(\hat{G})-1 \longrightarrow \Phi(\hat{G})$

nechť $e \in E$ leží na hranici nějaké oblasti, označíme $G \setminus e$: $\#V(\hat{G}-e) = \#V(\hat{G})$ ①

$\#E(\hat{G}-e) = \#E(\hat{G})-1$ ②

$\Phi(\hat{G}-e) = \Phi(\hat{G})-1$ ③

IP pro $G-e$ + 3 rovnosti ①,②,③ dokazují větu

OK

Věta: $G=(V,E)$ souvislý, planární. $\#V \geq 3$ (projde to pro stromy)

Pak $\#E \leq 3\#V - 6$

$\#E \leq \#V - 1 \overset{?}{\leq} 3\#V - 6$

↓

$\#V \geq 3$

Dk: zvolíme nakreslení G

$\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_{\Phi(G)}$ oblasti   BÚNO $\Phi(G) \geq 2$

$\ell(\Omega_i)$ = # hran G, které tvoří hranici Ω_i

$3\Phi(G) \leq \sum_{i=1}^{\Phi(G)} \ell(\Omega_i) \leq 2\#E$ oblast nejméně 3 hrany (jednoduchý graf - nejsou smyčky a nás. hrany)

hrana max na hranici 2 oblastí

4

↓ Euler

$3(\#E - \#V + 2) \leq 2\#E$

4

$\#E \leq 3\#V - 6$ ok

$2\#V - 4$

4 (nemá lichou kružnici)

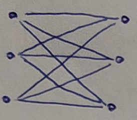
Př: K_5 $\#V = 5$ $\#E = 10$

▷ K_5 planární $\Rightarrow 10 \leq 15 - 6 = 9 \Rightarrow K_5$ není planární

Znač.

$K_{n,m}$ – úplný bipartitní graf na $n+m$ vrcholech (tj. $\#V_1 = n$, $\#V_2 = m$)

$K_{3,3}$



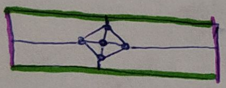
$8 \leq 18 - 6$ nutnou podmínku splňuje ale planární není

$9 \leq 12 - 4 = 8$ už není $\Rightarrow$ není planární

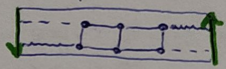
Pozn. Pro bipartitní grafy věta výše: $\#E \leq 2\#V - 4$

K_5 na torus

nalepený



Möbiova páska



$K_{3,3}$

Barevnost planárních grafů (vrcholová)

Věta: $G=(V,E)$, planární.

Pak $\delta(G) \leq 5$.

Dk: $\#E \leq 3\#V - 6$

$\#V \cdot \delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2\#E \leq 6\#V - 12$ pro 1 a 2 vrcholy triviální (věta pro $\#V \geq 3$)

$\delta(G) \leq 6 - \underbrace{\frac{12}{\#V}}_{\neq 0} \Rightarrow \delta(G) \leq 5$ ok

Věta: $G=(V,E)$ planární. Pak $\chi(G) \leq 6$.

Dk: indukcí na počet vrcholů

- $\#V = 1$ ok
- $\#V - 1 \longrightarrow \#V$

nechť $v \in V$, $d(v) = \delta(G) \leq 5$.

$\#V(G - v) = \#V - 1$ z IP $\exists$ 6-vrcholové ob. obarvení $G - v$, vrátím v zpět a obarvím ho volnou barvou (má max 5 sousedů)

ok   max 5 různých bar.

Věta: Náhodný graf $G \in (\mathcal{G}_n, p)$ má skoro jistě $\alpha(G) \le \lceil 2p^{-1} \ln n \rceil$.

{max. nezávislá podmnožina grafu}

(tj. $P(\alpha(G) \le \lceil 2p^{-1} \ln n \rceil) \longrightarrow 1$ s $n \to \infty$)

Dk: $G \in (\mathcal{G}_n, p)$, $S \subseteq V(G)$, $\#S = k+1$

pravděpodobnost, že S je nezávislá v G je $(1-p)^{\binom{k+1}{2}}$

$$X_S = \begin{cases} 1 & S \text{ je nez. v } G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$EX_S = P(S \text{ je nez. mn}) = (1-p)^{\binom{k+1}{2}}$$

X := # nez. množin velikosti k+1 v G

$$X = \sum_{\substack{S \subseteq V \\ \#S = k+1}} X_S \qquad E(X) = \sum E(X_S) = (1-p)^{\binom{k+1}{2}} \cdot \binom{n}{k+1}$$

použijeme • $\binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} \le \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}$

• $1 - p \le e^{-p}$

$$E(X) \le e^{-p\binom{k+1}{2}} \cdot \frac{n^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\left(ne^{-p\frac{k}{2}}\right)^{k+1}}{(k+1)!}$$

zvolíme

$k := \lceil 2p^{-1} \ln n \rceil$

$k \ge 2p^{-1} \ln n$

$\frac{pk}{2} \ge \ln n$

$\underline{e^{\frac{pk}{2}} \ge n}$, $\underline{\underline{1 \ge ne^{-\frac{pk}{2}}}}$

pokud $n \to +\infty$ pak $k \to +\infty$

$E(X) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Důsledek Markov. nerovnosti: $P(X=0) \longrightarrow 1$ s $n \to \infty$

tj. pravděpodobnost že počet nez. množin velikosti k+1 ~~je~~ se blíží k 1

skoro jistě max. nez. množina má velikost $k = \lceil 2p^{-1} \ln n \rceil$

□ ok

Věta: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje graf $G = (V, E)$

s $\chi(G) \ge k$ a $g(G) \ge k$

délka nejkratší kružnice v G (nepočítaje hrany jako kružnice)

Dk: $G \in (\mathcal{G}_n, p)$ $t := \lceil 2p^{-1} \ln n \rceil$

skoro jistě $\alpha(G) \le t$

X := počet kružnic v G s délkou < k

vybrat i vrcholů

pořadí vrcholů

$$EX = \sum_{i=3}^{k-1} (\#\text{ kružnic délky } i \text{ v } K_n) \cdot p^i \quad \text{musí tam existovat ty hrany} \quad = \sum_{k=3}^{k-1} \frac{1}{2}\binom{n}{i}(i-1)!\, p^i = \sum_{i=3}^{k-1} p^i \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{2i}$$

kružnici a pozpátku je to samé

$$< \sum_{n=i}^{k-1} (np)^i$$

$$EX < \sum_{i=3}^{k-1} (np)^i < \sum_{i=0}^{k-1} (np)^i = \frac{(np)^k - 1}{np - 1}$$

Markov.

$$P\left(X > \frac{n}{2}\right) < \frac{EX}{n/2} = \frac{2((np)^k - 1)}{n(np - 1)}$$

volím $p := n^{-\frac{k-1}{k}}$

$$P\left(X > \frac{n}{2}\right) < \frac{2\left(n^k n^{-k+1} - 1\right)}{n\left(n\, n^{-\frac{(k-1)}{2}} - 1\right)} = \frac{2(n-1)}{n\left(n^{\frac{1}{k}} - 1\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

skoro jistě v G máme max. $\frac{n}{2}$ kružnic délky < k.

z $\boxed{G}$ vyrobíme G': z každé kružnice délky < k smažeme 1 vrchol

graf na n vrcholech s $\alpha(G) \le t$

~~#V~~ $\#V(G') \ge \frac{n}{2}$ $g(G') \ge k$

• odebírali jsme vrcholy $\Rightarrow \alpha(G') \le t$

$\chi(G') = ?$

$$\frac{n}{2t} \sim \frac{np}{4 \ln n} = \frac{n^{1/k}}{4 \ln n} \xrightarrow{L'H} \underline{\infty}$$

odtud $\chi(G') \ge \frac{\#V(G')}{\alpha(G')} \ge \frac{n}{2t}$

$\downarrow$

∞

dostatečně velké n $\Rightarrow \chi(G') \ge k$

□ ok

2. výklad   Extremální teorie

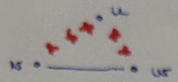
Věta (Turán)

G=(V,E), #V=n je graf, který neobsahuje kliku velikosti p, potom

$$\#E \le \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)$$

Lemma G .. na n vrcholech, bez K_p, s max. možným počtem hran.

V G neexistuje trojice vrcholů.



Dk:

$z \in V(G)$

zdvojíme $G' = (V \cup \{z'\}, E \cup \{\{z', x\} : x \in N_G(z)\})$

$\underbrace{K_p \nsubseteq G \Rightarrow K_p \nsubseteq G'}$, dokážeme

pokud je $K_p \subseteq G'$ ⇒ právě 1 z vrcholů $z, z' \in V(K_p)$, protože $N_{G'}(z) = N_{G'}(z')$ ⇒ z hlediska zařazení do kliky v G' jsou z a z' zcela zaměnitelné.

⇒ máme-li $K_p \subseteq G'$ a $K_p \nsubseteq G$ ⇒ $z' \in V(K_p)$, potom ale můžeme zaměnit z' v K_p za z ⇒ $K_p \subseteq G$ .. spor

sporem: máme v G u, v, w v dané konfiguraci.

a) $d(u) < d(v)$ nebo $d(u) < d(w)$

b) $d(u) \ge d(w) \wedge d(u) \ge d(v)$

a) BÚNO $d(u) < d(v)$

$G \xrightarrow{\text{zkopíruju}}$ kopii v (tzn. v') → smažeme u → graf $\tilde G$ • $\#V(\tilde G) = n$ • $K_p \nsubseteq \tilde G$ $\overset{\#E(\tilde G)}{\overset{\|}{\#E(G) + d_G(v) - d_G(u)}} > \#E(G)$

spor s volbou G (max počet hran bez K_p)

b) $G \xrightarrow{\text{zkopíruju}}$ 1. kopie u $\xrightarrow{\text{kopie}}$ 2. kopie u → smažeme v a w → graf $\hat G$

- $\#V(\hat G) = \#V(G)$
- $K_p \nsubseteq \hat G$

mažu 2x jednu hranu $\{v, w\}$

- $\#E(\hat G) = \#E(G) + \underbrace{2d_G(u) - (d_G(v) - d_G(w))}_{\ge 0} + 1 > \#E(G)$ spor s volbou G

ϕ relace na V(G):

$u \phi v \overset{\text{def.}}{\iff} \{u, v\} \notin E$

je to ekvivalence: symetrie OK

reflex. OK

tranzitivita (lemma OK)

Dk Turánovy věty

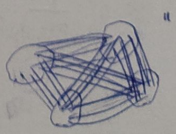
G na n vrcholech, bez K_p, s max. možným počtem hran

$V(G) = V_1 \cup V_2 \dots V_s$ .. třídy ekvivalence podle ϕ

(P1) $\forall i \in \hat s \ \forall u, v \in V_i \ (\{u, v\} \notin E)$

(P2) $\forall i,j \in \hat s, i \ne j, u \in V_i, v \in V_j \ (\{u, v\} \in E)$

„s-partitní úplný graf"



T: $\boxed{s = p-1}$

- kdyby $s = p$ .. vybereme v každé V_i 1 vrchol pak z (P2) ⇒ vybrali jsme $K_p \subseteq G$
- kdyby $s \le p-2$ ... pak můžeme přidáním hran jednu z V_i rozdělit na 2 ⇒ graf bez K_p s # hran $> \#E(G)$ spor s volbou G

$k_i = \# V_i$ mezi V_i a V_j máme $k_i k_j$ hran

$\sum_1^{p-1} k_i = n$ $\Rightarrow \# E = \sum_{1 \le i < j \le p-1} k_i k_j$

$$\# E = \max \sum_{1 \le i<j \le p-1} k_i k_j \quad \text{za podmínky} \quad \sum_{i=1}^{p-1} k_i = n.$$

přechod

min. počet nehran, tzn. hledáme, stačí nám odhad $\Rightarrow$ opustíme podmínku celočíselnosti

$$\min \sum_{1 \le i<j \le p-1} \binom{k_i}{2} \quad \text{za podm.} \quad \sum_{i=1}^{p-1} k_i = n,\ k_i \in \mathbb{N}.$$

$$\Lambda(k_1, \dots k_{p-1}) = \sum_1^{p-1} \left(\frac{1}{2}(k_i^2 - k_i)\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{p-1} k_i\right)$$

$$0 \doteq \frac{\partial \Lambda}{\partial k_i} = k_i - \frac{1}{2} - \lambda \Rightarrow k_i = \frac{1}{2} + \lambda$$

$$n = \sum_1^{p-1}\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) = (p-1)\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)$$

$$\lambda = \frac{n}{p-1} - \frac{1}{2}$$

$\forall i \in \widehat{p-1}$ $k_i = \frac{n}{p-1}$ pokud nebude celé číslo netrefím minimum přesně, někde ± 1 hrana

$$\# E \le \sum_{1 \le i<j \le p-1} k_i k_j = \binom{p-1}{2} \frac{n^2}{(p-1)^2} = \frac{(p-2)\cancel{(p-1)}}{2} \frac{n^2}{(p-1)^{\cancel{2}}} = \frac{(p-1-1)}{2} \frac{n^2}{(p-1)} = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

OK

Pro $\frac{n}{p-1} = m \in \mathbb{N}$ $\omega(G) = p-1$

$$\# E(G) = \underbrace{\binom{p-1}{2}}_{\text{počet dvojic kbelíků}} m^{2\ \text{počet hran mezi dvojicí}}$$

tj. nastává rovnost v Turán. větě (nejlepší možný odhad)

Tvrzení $G = (V, E)$, $\# V = n$.

Pak $\omega(G) \ge \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_G(v)}$

dk: fix $G = (V,E)$ s $V = \{1, \dots n\}$

náhodná permutaci $\pi \in S_n$

konstrukce $C_\pi \subset V$: $\cdot\ \pi(1) \in C_\pi$

$\cdot$ pro $i = 2, \dots n$ $\pi(i) \overset{\text{dáme do}}{\notin} C_\pi$ pokud v hraně se všemi vrcholy v C_π

Tedy C_π je klika v G.

$$X_i := \begin{cases} 1 & i \in C_\pi \\ 0 & i \notin C_\pi \end{cases} \qquad \# C_\pi = \sum_{i=1}^n X_i$$

? prům. velikost kliky v G ?

$$E \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n E X_i = \sum_{i=1}^n P(i \in C_\pi)$$

$$\ge \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - d_G(i)}$$

$$= \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_G(v)}$$

OK

$\pi(1), \pi(2) \dots \pi(n)$

pokud v (π) je i v hraně se všemi vrcholy před ním, tak ho do C_π určitě zařadím

tzn. zajímá mě v $((\pi(i))_{i=1}^n)$ vzájemná pozice i a vrcholů, které s ním nejsou v hraně (podposloupnost) $\to \#$ prvků $= \underbrace{1 + n - 1 - d_G(i)}$,

i zařadím do C_π pokud je v této podposloupnosti na 1. místě

(možná i jindy)

$\Rightarrow$ odhad

$$\text{Tedy } P(i \in C_\pi) \ge \frac{\overbrace{(n - d_G(i) - 1)!}^{\#\text{usp. podposl., že } i \text{ je } 1.}}{\underbrace{(n - d_G(i))!}_{\#\text{uspořádání podposloupnosti}}}$$

Dk Turán verze 2. $V = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ kde $x_i = \frac{1}{\sqrt{m - d_G(v_i)}}$

$y_i = \sqrt{m - d_G(v_i)}$

$$m^2 \leq \underbrace{\left(\sum_1^m \frac{1}{m - d_G(v_i)}\right)}_{\leq \omega(G) \leq \underline{p-1}} \underbrace{\left(\sum_1^m m - d_G(v_i)\right)}_{m^2 - 2\#E(G)}$$

Tvrzení

$$(p-1) \cdot 2\#E(G) \leq (p-1)m^2 - m^2$$

$$\#E(G) \leq \frac{m^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \text{ ok}$$

Výšel spektrum adjacenční matice

$G = (V, E)$ $V = \{v_1, \dots v_m\}$

$$[A_G]_{ij} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{k_i}$ – char. polynom A

$\tilde{\chi}_A(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)$

Tvrzení A je diagonalizovatelná, pak $\tilde{\chi}_A(A) = \mathbb{O}$.

(tj. adjacenční matice)

Věta G souvislý. Potom jeho spektrum má víc různých vlastních čísel než je průměr G.

$\overset{\shortparallel}{\max_{u,v \in V}} d(u, v)$

Dk: sporem $\#\sigma(A) = k \leq \max_{u,v \in V} d(u, v)$

$\exists v_i, v_j \in V \; d(v_i, v_j) = k$

$\forall l = 1, \dots k-1 \quad [A^l]_{ij} = 0$ (plyne z věty o mocninách A_G)

$\tilde{\chi}_A(A) = A^k + d_{k-1}A^{k-1} \dots + d_1 A + d_0 I = \mathbb{O}$ (tvrzení)

$[\qquad '' \qquad]_{ij} = ?$

$[A^k]_{ij} + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow [A^k]_{ij} = 0$

$d(v_i, v_j) = k \Rightarrow [A^k]_{ij} > 1$ **spor**

Tvrzení A nezáporná symetrická matice, Λ .. max. vl. číslo

Pak $\Lambda = \max_{\|\vec{x}\| = 1} x^T A x$.

Dk:

Věta Λ je max. vl. číslo A_G grafu $G=(V,E)$.
Pak $\delta(G) \le \Lambda \le \Delta(G)$

Dk: a) $j = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\Lambda = \max_{\|x\|=1} x^T A x \geq j^T A j = \frac{1}{n}(1\ 1\ 1\ \dots\ 1)\begin{pmatrix}d(v_1)\\ \vdots \\ d(v_n)\end{pmatrix} = \frac{1}{n}\sum d(v_i) \geq \frac{n}{n}\delta(G) = \underline{\delta(G)} \text{ ok}$$

y – vl. vektor A k Λ tak, že jeho max. složka (BÚNO y_k) je 1

Perron-Frobenius

[A nezáporné matice, potom $\rho(A)$ je vl. číslo A a $\exists$ k němu nezáporný vl. vektor]

$$\Lambda \vec{y} = Ay \le A\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots \\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d(v_1)\\ \vdots \\ d(v_n)\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\Delta(G)\\ \vdots \\ \Delta(G)\end{pmatrix}$$

k-tá nerovnost

$$\underbrace{y_k}_{1} \cdot \Lambda \le \Delta(G) \text{ OK}$$

Věta: G bipartitní graf. Pak spektrum A_G je symetrické kolem nuly (včetně násobností)

Dk: BÚNO $\begin{pmatrix}0 & B\\ B^T & 0\end{pmatrix}$

fix. $\lambda \in \sigma(A)$, x – vl. vektor k λ

$$\begin{pmatrix}0 & B\\ B^T & 0\end{pmatrix}\overset{x}{\boxed{\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}}} = \lambda\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Bz\\ B^T y\end{pmatrix}$$

$$Bz = \lambda y$$
$$B^T y = \lambda z$$

volím $w = \begin{pmatrix}y\\ -z\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0 & B\\ B^T & 0\end{pmatrix} w = \begin{pmatrix}-Bz\\ B^T y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda \vec{y}\\ \lambda z\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix}y\\ -z\end{pmatrix}$$

$$Aw = -\lambda w \quad \Rightarrow \underline{\underline{-\lambda \in \sigma(A)}} \text{ OK}$$

Věta $G=(V,E)$, souvislý. Λ – max vl. číslo A_G.
G je bipartitní $\Leftrightarrow -\Lambda \in \sigma(A_G)$.

Věta: $G=(V,E)$
G je bipartitní $\Leftrightarrow \sigma(A_G)$ je symetrické okolo nuly.

výlety se nekonají × státnice

materiály na webu

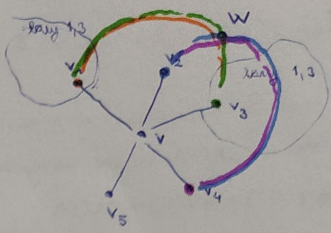
Věta: $G=(V,E)$ planární. Pak $\chi(G) \leq 5$.

Dk: sporem: nechť $G=(V,E)$ je planární s $\chi(G)=6$. $\delta(H) \geq \overset{k}{\chi(H)} - 1$, pro k kritické

$H \subseteq G$ .. 6-kritický podgraf $\rightarrow$ $\delta(H) \geq k-1 = 6-1 = 5$

H .. planární $\delta(H) \leq 5$

$\}\ \delta(H) = 5$



v má stupeň 5 v H

$H \setminus v \subsetneq H \Rightarrow \chi(~~H~~ H \setminus v) \leq 5$.

$\Rightarrow \varphi$ vlastní 5-obarvení $H \setminus v$, musí každý z vrcholů $v_1, .. v_5$ mít při φ jinou barvu (jinak bych v obarvil chybějící a ~~B~~ $\chi(H)=5$ spor s 6-kritičností) ●

BÚNO $\varphi(v_i) = i \quad \forall i \in \hat{5}$

Tvrdíme: vrcholy v_1 a v_3 jsou ve stejné komponentě $H[\varphi^{-1}(1) \cup \varphi^{-1}(3)]$ $\Rightarrow$ ex. cesta z v_1 do v_3 pouze po vrcholech ●●

jinak: jsou-li v_1 a v_3 v komponentě C_1, resp. C_3, pak můžeme např. v C_3 prohodit obarvení $1 \leftrightarrow 3$:

- obarvení zůstane vlastní
- na sousedech v pouze 4 barvy $\Rightarrow$ spor s 6-kritičností H ●

T: vrcholy v_2 a v_4 jsou ve stejné komponentě $H[\varphi^{-1}(2) \cup \varphi^{-1}(4)]$ analogicky

$\Rightarrow$ ex. cesta z v_2 do v_4 pouze po vrcholech ●●

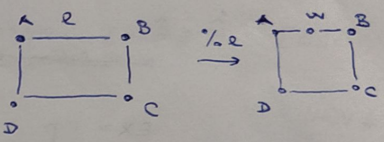
planární graf $\Rightarrow$ cesty se kříží ve w

$\varphi(w) = (1 \vee 3) \wedge (2 \vee 4)$ spor $\square$

Def: $G=(V,E)$, $e=\{u,v\} \in E$.

Dělení hrany e

$$G \% e = (V \cup \{w\},\ E \setminus \{u,v\} + \{u,w\} + \{v,w\})$$
$$w \notin V$$



H je dělení grafu G, pokud je H izomorfní grafu, který z G vznikl konečným počtem operací dělení hrany.

Pozorování 1) G planární $\Leftrightarrow$ libovolné dělení G je planární

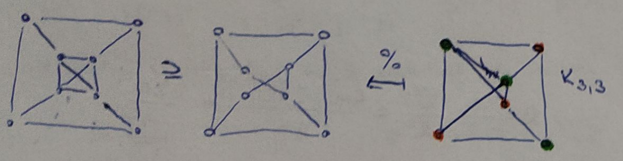
2) $H \subseteq G$, H není planární $\Rightarrow$ G není planární

Věta: (Kuratowski)

Graf G je planární $\Leftrightarrow$ jako podgraf neobsahuje dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

bez Dk, dlouhý

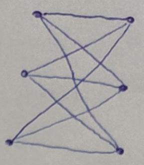
Př:



„Začátek výletu do velkých oblastí" X KONEC

Crossing lemma

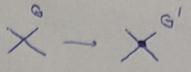
$cr(G)$ = minimální možný počet křížení dvojice hran, při nakreslení G do $\mathbb{R}^2$



Lemma

G souvislý, $\#V \geq 3$. $cr(G) \geq \#E - 3\#V$

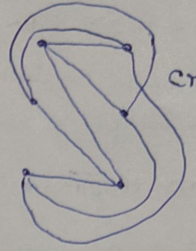
Dk: $G \longrightarrow \hat{G}$ nakreslení s min. # křížení



každé z $cr(G)$ křížení nahradíme novým vrcholem $\Rightarrow G'$

- $\#V(G') = \#V(G) + cr(G)$
- $\#E(G') = \#E(G) + 2\,cr(G)$
- G' .. planární

$\Rightarrow \#E(G') \leq \#V(G') \cdot 3 - 6$



$$\#E(G) + 2cr(G) \leq 3\#V(G) + 3cr(G) - 6$$

$cr(G) \geq \#E - 3\#V + 6$ platí i tato silnější

$\geq \underline{\underline{\#E - 3\#V}}$ ok □

Lemma (Crossing)

$G = (V, E)$, $n = \#V$, $m = \#E$, $m \geq 4n$

Pak $cr(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$

Dk: $\hat{G}$ .. nakreslení G s min. možným # křížení hran.

náhodně $S \subseteq V$ .. zvolíme tak, že každý $v \in V$ do S zařadíme s pravděpodobností $p = \frac{4n}{m}$

$H := G[S]$ $\quad \hat{H} := \hat{G}[S]$ indukovaný z nakreslení $\hat{G}$

~~min # křížení~~)

$X := \#V(H)$ $\qquad EX = np$

$Y := \#E(H)$ $\qquad EY = mp^2$

$Z :=$ # křížení v $\hat{H}$ $\qquad EZ = cr(G)\,p^4$

$$Z \geq cr(H) \geq \#E(H) - 3\#V(H)$$

$$EZ \geq EY - 3EX$$

$$cr(G)\,p^4 \geq mp^2 - 3np$$

$$cr(G) \geq \frac{mp - 3n}{p^3} = \frac{4n - 3n}{\frac{64n^3}{m^3}} = \underline{\underline{\frac{m^3}{64n^2}}} \quad \square$$

Tvrzení P.. n bodů v rovině, $l = \#$ přímek, které prochází alespoň $\underline{k+1}$ z nich, kde $1 \leq k \leq 2\sqrt{2n}$.

Pak $\underline{l < 32n^2/k^3}$

Dk: Sestrojíme $G = (V, E)$, $V(G) = P$, $E(G)$ = segmenty přímek mezi 2 body z P na přímkách, které prochází alespoň $k+1$ bodů z P.

$\#V(G) = n$

l přímek, každá alespoň k segmentů $\Rightarrow \#E(G) \geq k \cdot l$

dvě přímky − max 1 křížení

každé křížení v G ~ 2 a víc přímek

a) $m \geq 4n$ $\qquad \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2} \underset{\text{Cross. lemma}}{\leq} cr(G) \leq \binom{l}{2}$

$\underline{\underline{\text{lze použít Cross. lemma}}}$

$$l^2 \geq l(l-1) \geq \frac{1}{32}\frac{(kl)^3}{n^2}$$

$$l < 32n^2/k^3$$

b) $m \leq kl \leq 4n$ nelze Cross

$$l < \frac{4n}{k}\frac{k^2}{k^2} \leq \frac{4n(2\sqrt{2n})^2}{k^3} = \underline{\underline{\frac{32n^2}{k^3}}} \text{ ok}$$

Úloha 2 m bodů v rovině

Kolik dvojic z nich může mít vzdálenost 1.

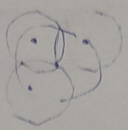
Tvrzení P.. množina m bodů. $k = \#$ párů se vzdál. 1, pak $k < 5m^{4/3}$

Pd: kolem každého bodu nakreslíme jednotkovou kružnici

$m_i := \#$ kružnic, na kterých leží právě i bodů

$$m = \sum_{i=0}^{m-1} m_i$$

$$k = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} m_i \cdot i$$

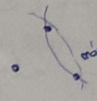


$G = (V,E)$, $V(G) = P$

$E(G) =$ oblouky mezi sousedními body z P na kružnicích, které prochází alespoň 3 body z P

- $\#E(G) = \sum_{i=3}^{m-1} i \cdot m_i = 2k - m_1 - 2m_2 \geq 2k - 2m$

H.. všechny dvojnásobné hrany nahradíme jednou hranou $\Leftarrow$



násobná hrana může v G být!

- $\#E(H) \geq k - m$ (v nejhorším půlku zahodím)

křížení v H ~ křížení kružnic, 2 kružnice .. max. 2 křížení

- $cr(H) \leq 2\binom{m}{2}$

a) $\#E(H) < 4m$

$$k \leq \#E(H) + m < 4m + m \leq 5m < 5m^{4/3} \text{ ok}$$

b) $\#E(H) \geq 4m$ ... máme Crossing lemma

$$m^2 \geq m(m-1) \geq cr(H) \overset{\downarrow}{\geq} \frac{1}{64} \frac{(\#E(H))^3}{m^2} \geq \frac{(k-m)^3}{64m^2}$$

$$64m^4 \geq (k-m)^3$$

$$4m^{4/3} \geq k - m$$

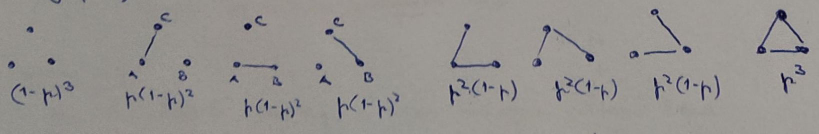
$$k \leq 4m^{4/3} + m < 5m^{4/3} \text{ ok} \quad \square$$

(g_m, P) g_m -- grafy na m vrcholech

→ fix $p \in \langle 0,1 \rangle$ každá hrana úplného grafu na m vrcholech je v $G \in g_m$ s pravděpodobností p.

Zkoumaná graf vlastnost ~ $A \subseteq g_m$, které tuto vlastnost mají

Př: (g_3, P)



→ pravděpodobnost, že náh. graf na 3 vrcholech je souvislý $3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$

—"— ——— je bipartitní $1 - p^3$

Věta: X.. nezáporná, náh. veličina, $t > 0$.

Pak $P(X \geq t) \leq \frac{EX}{t}$

Použití: - ukázat, že náh. graf $G \in (g_m, P)$ má skoro jistě zkoumanou vlastnost $P(A_m) \longrightarrow 1$ pro $m \to +\infty$

Důsledek: X nezáporná, celočíselná náh. veličina.

$$(P(X_m = 0) \longrightarrow 1 \text{ pro } m \to +\infty) \Leftarrow EX_m \to 0 \text{ pro } m \to \infty$$