

Teorie Grafu

Značení: V — konečná množina, $r \in \mathbb{N}$ $\binom{V}{r}$ = množina všech r -tic prvků na V

$$\# \binom{V}{r} = \binom{\#V}{r}$$

Def (Obvyklý/jednoduchý neorientovaný neohodnocený graf)

Graf je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je konečná množina (vrcholy) a $E \subseteq \binom{V}{2}$ (hrany)

pozn • $E \subset V \times V$ dává orientovaný graf

Operace pro $G = (V, E)$ a $H = (U, F)$

$$\bullet G \cup H = (V \cup U, E \cup F)$$

$$\bullet \text{pro } D \subseteq E: G \setminus D = (V, E \setminus D)$$

$$\bullet \text{pro } W \subset V: G \setminus W = (V \setminus W, E \cap \binom{V \setminus W}{2})$$

$$\bullet \text{pro } v \in V, e \in E \text{ značíme } G \setminus \{v\} \text{ resp. } G \setminus \{e\} \text{ jako } G \setminus v \text{ resp. } G \setminus e$$

Značení G graf pak

$V(G)$ — množina vrcholů G

$E(G)$ — množina hran G

pozn počet různých grafů nad n vrcholy = $2^{\binom{n}{2}}$

Def (Isomorfismus grafů)

Grafy $G = (V, E)$ a $H = (U, F)$ jsou isomorfní pokud existuje bijekce $\varphi: V \rightarrow U$ taková, že

$$\forall u, v \in V \left(\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in F \right)$$

Def (Doplňkový graf)

Doplňkový grafu $G = (V, E)$ je graf $G^c = (V, E^c)$. Graf G nazveme samosuplementární, pokud $G \sim G^c$

Def (Stupeň vrcholu)

Bud' $G = (V, E)$ graf. Stupeň vrcholu $v \in V$ je

$$d_G(v) = \# \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}$$

pozn v orientovaném grafu: výstupní stupeň vrcholu (outdegree) $d_G^-(v) = \# \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$ — výstup
vstupní stupeň vrcholu (indegree) $d_G^+(v) = \# \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$ — vstup

$$\bullet \text{maximální stupeň } \Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

$$\bullet \text{minimální stupeň } \delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Věta (Handshaking lemma / Princip sudosti)

Dleť' $G = (V, E)$ je graf. Pak $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \#E$

Důkaz Hrana má dva konce $\square$

Def Porovnatelnost $(d_i)_{i=1}^n$ nezáporných čísel nazveme grafovou, pokud existuje graf $G = (V, E)$ takový, že $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a $\forall i \in \hat{n}: d_G(v_i) = d_i$

Věta Posloupnost $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ je grafová právě tehdy když
 posloupnost $d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ je grafová
Důkaz ($\Leftarrow$): ke grafu přidáme nový uzel (odpovídající d_1) a spojíme ho s uzly, které odpovídají $d_2-1, \dots, d_{d_1+1}-1$

($\Rightarrow$): a) "naše stěh" -

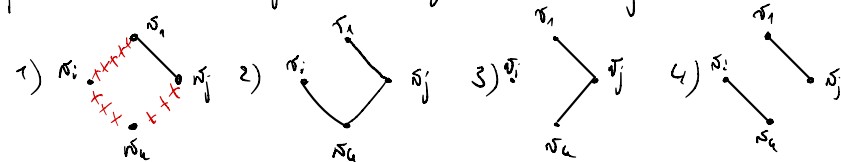
uzel odpovídající d_1 on s_1 je nespojený právě na uzly odpovídající $d_2-1, \dots, d_{d_1+1}-1$
 $\rightarrow$ odebereme s_1 a všechny hrany z něj vycházející a dostaneme partitionou posloupnost

b) "menší se JC"

Uzel s_i takový, že $i \in \{2, \dots, d_1+1\}$ a $\{s_i, s_1\} \notin E$

$\Rightarrow \exists j \geq d_1+2$ a $\{s_i, s_j\} \in E$

pro každé $k \in \hat{n} \setminus \{1, i, j\}$ nastane jedna z následujících situací

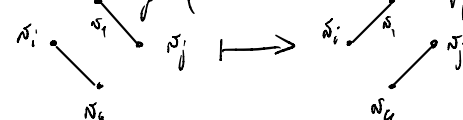


Lemma Pro alespoň jedno k nastane situace 4)

dk pokud by nastávaly pouze situace 1)-3) $\Rightarrow d(s_i) \leq d(s_j)$ a $\{s_i, s_j\} \notin E$ a $\{s_i, s_j\} \in E$

$\Rightarrow d(s_i) < d(s_j)$ spor s uspořádáním z předpokladu

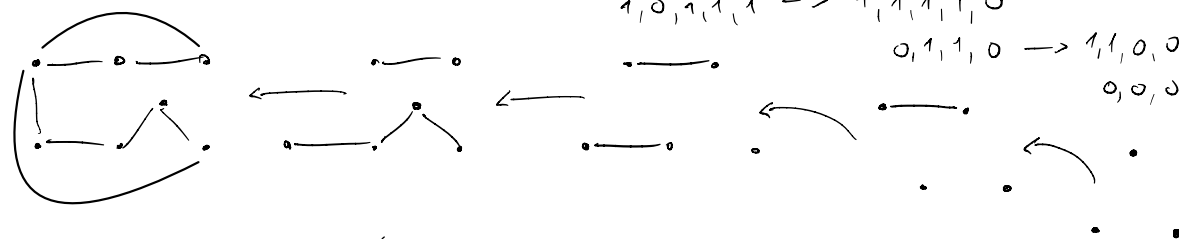
veseme graf a nalezenou konfiguraci zveřejníme



$\rightarrow$ nový graf má stejnou posloupnost stupňů uzlů a navíc jsme odstranili nevhodnější situaci

$\rightarrow$ pokud graf vyhovuje a) tak hotovo, pokud ne, tak opakuji b)

Pr. posloupnost 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2
 $1, 1, 1, 1, 2, 2 \rightarrow 2, 2, 1, 1, 1, 1$



Brouwerova věta o pevném bodě

Věta Necht f je spojitě zobrazení uzavřené koule $B \subseteq \mathbb{R}^d$ do B . Potom f má pevný bod.

• $d=1$: zkus $f: [0,1] \rightarrow [0,1] \quad \exists x \in [0,1] \quad f(x) = x$

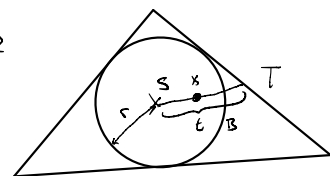
$g(x) := f(x) - x$

• zjevně spojitě

• $g(0) = f(0) \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

$\Rightarrow \exists x \in [0,1] \quad g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$

• $d=2$



$f: B \rightarrow B$ spojitě

$\varphi: B \rightarrow T$: obraz x bod na polopřímce $\overrightarrow{Sx}$ ve vzdálenosti $\frac{1}{r} |Sx|$ od S

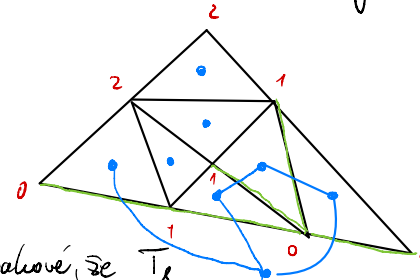
uvádíme $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}: T \rightarrow T$ spojitě, najde-li pevný bod x , pak $\varphi(x)$ je pevný bod pro f

Def: Trojúhelníky $T_1, T_2, \dots, T_k$ nazýváme triangulací T , pokud

- $\bigcup_{i=1}^k T_i = T$
- $T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{společný vrchol} \\ \text{společná hrana} \end{cases}$, $i \neq j$

Pokud máme očíslování vrcholů triangulace $\bigcup_{i=1}^k T_i$ trojúhelníkem $T = [t_0, t_1, t_2]_x$ čísly $0, 1, 2$ nazýváme vlastní, pokud

- t_0, t_1, t_2 mají číslo $0, 1, 2$
- vrchol ležící na hraně $\overline{t_i t_j}$ dostane číslo i nebo j



Lemma (Sperner)

Při libovolném vlastním očíslování vrcholů triangulace $\bigcup_{i=1}^k T_i$ trojúhelníkem T existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že T_k má na svých vrcholech všechny tři čísla

dk: Konstruujeme graf $G = (V, E)$

$$V = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$$

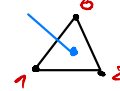
$E: \{T_i, T_j\} \in E$ pokud mají T_i a T_j společnou hranu očíslovanou $0, 1$

$\{T_i, T\} \in E$ pokud T_i má hranu očíslovanou $0, 1$ takovou, že leží v $\overline{t_0 t_1}$

$0 \leq d(T_i) \leq 2$ neboť T_i nemůže mít všechny hrany očíslované dvojicí $0, 1$

$d(T)$ odpovídá počtu změn $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$ v posloupnosti čísel na hraně $\overline{t_0 t_1} \rightarrow$ je jich lichý počet

Princip sčítání: $d(T) + \sum_{i=1}^k d(T_i) = 2 \cdot \#E \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tak, že $d(T_k) = 1$



Důkaz (Brouwer pro trojúhelník)

$$f: T \rightarrow T \text{ spojitě } T = [t_0, t_1, t_2]_x \quad T \ni x = \alpha_0(x)t_0 + \alpha_1(x)t_1 + \alpha_2(x)t_2, \quad \sum \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0$$

$$T \ni f(x) = \alpha'_0(x)t_0 + \alpha'_1(x)t_1 + \alpha'_2(x)t_2, \quad \sum \alpha'_i = 1, \quad \alpha'_i \geq 0$$

pokud x je první bod f , pak $\forall i \quad \alpha_i(x) = \alpha'_i(x)$

sporem: f nemá první bod $\Rightarrow$ můžeme definovat $\forall x \in T \quad \delta(x) := \min \{i \in \{0, 1, 2\} \mid \alpha_i(x) > \alpha'_i(x)\}$

$\rightarrow \delta$ vrcholy očísluje $0, 1, 2$

$\rightarrow$ body uvnitř T mají $\delta(x) \in \{0, 1\}$ a stejně pro ostatní hrany

konstruujeme na T posloupnost triangulací $T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \dots, T_{k_n}^{(n)}$ takové, že maximum z obvodů trojúhelníků jde k 0

δ přiřadí vlastní očíslování $\rightarrow$ existuje trojúhelník s čísly $0, 1, 2$

$(x_n) \dots$ vrcholy s číslem 0

$(y_n) \dots$ vrcholy s číslem 1

$(z_n) \dots$ vrcholy s číslem 2

$\exists (x_n)$ vybrat konvergentní podposloupnost (x_{n_k})

$\exists (y_{n_k})$ vybrat konvergentní podposloupnost (y_{n_k})

$\exists (z_{n_k})$ vybrat konvergentní podposloupnost (z_{n_k})

$\rightarrow$ pracujeme s konvergentními posloupnostmi $(x_{n_k}), (y_{n_k}), (z_{n_k})$
 $(f_n), (g_n), (h_n)$

$(f_n), (g_n), (h_n)$ mají společnou limitu w

$\delta(f_n) = 0 \Rightarrow \alpha_0(f_n) > \alpha'_0(f_n)$

$\delta(g_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1(g_n) > \alpha'_1(g_n)$

$\delta(h_n) = 0 \Rightarrow \alpha_2(h_n) > \alpha'_2(h_n)$

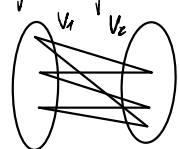
$$\sum \alpha_i = 1 = \sum \alpha'_i$$

$\hookrightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_i(w) \geq \alpha'_i(w) \Rightarrow \alpha_i(w) = \alpha'_i(w)$$

Věta: Graf je bipartitní $\Leftrightarrow$ hranice neobsahuje lichý počet hran

Důkaz $\Rightarrow$)



$V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1$ vždy sudý počet hran

$\Leftarrow$) a) $G = (V, E)$ souvislý

$u \in V$ libovolný pevně zvolený vrchol

$V_1 = \{v \in V \mid \text{nejkratší cesta z } u \text{ do } v \text{ má lichou délku}\}$

$V_2 = \{v \in V \mid \text{nejkratší cesta z } u \text{ do } v \text{ má sudou délku}\}$

• $u \in V_2 \Rightarrow V_2 \neq \emptyset$

• G je souvislý $\Rightarrow \exists \{u, v\} \in E(G) \Rightarrow v \in V_1 \Rightarrow V_1 \neq \emptyset$

• $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

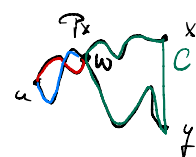
• $V_1 \cup V_2 = V$ protože G je souvislý (z u se lze dostat do každého vrcholu)

• neexistuje hrana mezi dvěma vrcholy ve V_1

- sporum: máme $x, y \in V_1, \{x, y\} \in E$

- $|u P_x v| = |u P_y v|$: když se takhle třeba

$u P_y v P_x x$ by byla kratší než P_x



P_x - cesta nejkratší délkou do x

P_y - cesta nejkratší délkou do y

w - průsečík P_x a P_y nejblíže x

• C je hraniční v G

$|C| = |P_x| - |u P_x v| + |P_y| - |u P_y v| + 1 = |P_x| + |P_y| - 2|u P_x v| + 1$ - liché číslo $\rightarrow$ SPOR

b) G má komponenty $G^{(1)}, \dots, G^{(r)}, r \geq 2$

• pro každou komponentu $G^{(i)}$ najdeme $V_1^{(i)}$ a $V_2^{(i)}$ podle a)

• $V_1 = \bigcup_{i=1}^r V_1^{(i)}, V_2 = \bigcup_{i=1}^r V_2^{(i)}$

Def: Graf, který neobsahuje hraniční, se nazývá les.

• Souvislý les nazýváme strom.

Věta: Následující 4 tvrzení o $G = (V, E)$ jsou ekvivalentní

1) G je strom

2) $\forall u, v \in V$ v G existuje právě jedna cesta s konci u, v

3) G je minimální souvislý (a) G je souvislý b) $G \setminus e$ není souvislý pro lib. $e \in E$

4) G je maximální acyklický (a) G neobsahuje hraniční b) $\forall x, y \in V, \{x, y\} \in E \Rightarrow G + \{x, y\}$ obsahuje hraniční

Důkaz 1) $\Rightarrow$ 2) první $u, v \in V$

• G je strom $\Rightarrow G$ je souvislý $\Rightarrow$ existuje cesta z u do v

• když cesty byly dvě různé tak tam vznikne hraniční

2) $\Rightarrow$ 3) • G je zjevně souvislý

• Pokud bychom odebrali jednu hranu, pak tato hrana bude chybět na cestě mezi nějakými dvěma vrcholy

Věta: (Eulerův vzorec)

Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Pak G je strom $\Leftrightarrow \#E = \#V - 1$

Důkaz $\Rightarrow$) úplnou indukcí na počet vrcholů $n = \#V$

$n = 1$ • $0 = 1 - 1$ ✓

- platí pro $1, \dots, n-1 \rightarrow n$: G strom na n vrcholech, máme první hranu $e \in E(G)$

$G \setminus e$ má dvě komponenty s k a $n-k$ vrcholy G_1 a G_2

$\#E(G_1) = \#V(G_1) - 1, \#E(G_2) = \#V(G_2) - 1, \#E(G) = \#E(G_1) + \#E(G_2) + 1 = \#V(G_1) + \#V(G_2) - 1$

$\Leftrightarrow G$ je souvislý $\rightarrow \forall v \in V(G) d(v) \geq 1$
 $\#E = \#V - 1 \rightarrow \sum d(v) = 2\#E = 2\#V - 2 \Rightarrow \exists v \in V(G) : d(v) = 1$

• indukce na počet vrcholů: $n = 1$ • je strom

$n-1 \rightarrow n$: uvažujeme $G \setminus v$, pro který také platí $\#E(G \setminus v) = \#V(G \setminus v) - 1$ a je stále souvislý
 $\Rightarrow G \setminus v$ je strom $\Rightarrow G$ je strom



Def 1 (Cayley)

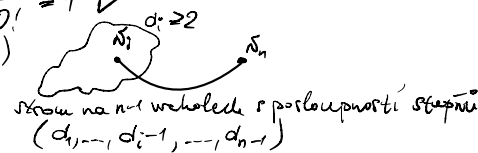
Označme T_n počet stromů na n vrcholech. Pak $T_n = n^{n-2}$

Důkaz 1 lemma Necht $(d_i)_{i=1}^n$, $n \geq 2$ je posloupnost přirozených čísel taková, že $\sum_{i=1}^n d_i = 2n-2$.

Pak existuje $N_{(d_1, \dots, d_n)} = \frac{n!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\dots(d_n-1)!}$ stromů na vrcholech $\{s_1, \dots, s_n\}$ tak, že $d(s_i) = d_i$.

de indukci na n

- $n=2$, $d_1 \geq 1$, $d_2 \geq 1$, $d_1 + d_2 = 2 \Rightarrow d_1 = d_2 = 1$, $N_{(1,1)} = \frac{2!}{1!1!} = 1$ ✓
- $n-1 \rightarrow n$: ze vztahu pro součet $2n-2$, $d_n = 1$, $(d_1, \dots, d_{n-1}, 1)$



$$N_{(d_1, \dots, d_{n-1}, 1)} = \sum_{\substack{i=1 \\ d_i \geq 2}}^{n-1} N_{(d_1, \dots, d_{i-1}, d_i-1, \dots, d_{n-1})}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ d_i \geq 2}}^{n-1} \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!\dots(d_{i-1}-1)!(d_i-2)!\dots(d_{n-1}-1)!} = \sum_{\substack{i=1 \\ d_i \geq 2}}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_i-1)}{\prod_{j=1}^{n-1} (d_j-1)!} = \frac{(n-3)!}{\prod_{j=1}^{n-1} (d_j-1)!} \sum_{i=1}^{n-1} (d_i-1) = \frac{(n-2)!}{\prod_{j=1}^{n-1} (d_j-1)!}$$

je zřejmé, protože $d_i-1=0$ pro $d_i=1$

$2n-2-n = n-2$ ■

• Multinomialní věta

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{\alpha_1 \geq 0 \\ \sum_{j=1}^k \alpha_j = n}} \frac{n!}{\prod_{j=1}^k \alpha_j!} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}$$

$$T_n = \sum_{\substack{\text{všechny } (d_1, \dots, d_n) \\ \sum d_i = 2n-2}} N_{(d_1, \dots, d_n)} = \sum_{\substack{d_i \geq 1 \\ \sum d_i = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{\prod_{j=1}^n (d_j-1)!} = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = n-2}} \frac{(n-2)!}{\prod_{j=1}^n \alpha_j!} 1^{\alpha_1} \dots 1^{\alpha_n} = n^{n-2}$$

■

Důkaz 2 dvojím spočítáním tzv. Polya-KoSi (postupně vytvořený kořenový strom)

(T, r, φ) – $T=(V, E)$ je strom

– $r \in V$ je kořen

– $\varphi: E \rightarrow \{1, 2, \dots, \#E\}$ bijekce

1) $T_n \cdot n \cdot (\#E)! = T_n \cdot n \cdot (n-1)!$, T_n počet stromů

2)

řipy směřují ke kořeni

- kořen je jediný vrchol, ze kterého řipa nevychází
- z každého vrcholu vychází právě jedna řipa kromě kořene

k -tý krok: přidávání k -tou hranu a máme $n-k+1$ komponent

– ta má počátek v kořeni některé komponenty a konec v libovolném vrcholu jiné komponenty

#možnosti v k -tém kroku

• konec řipy – kdekoliv – n možností

• počátek řipy – $n-k$ možností (počet komponent minus jedna)

$$\rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} n(n-k) = n^{n-1} (n-1)!$$

$$\Rightarrow T_n \cdot n \cdot (n-1)! = n^{n-1} (n-1)! \Rightarrow T_n = n^{n-2}$$

■

Def 1 (T, r) je kořenový strom: $T=(V, E)$ strom
 $r \in V$ kořen

Dva kořenové stromy jsou izomorfní $(T_1, r_1) \sim_k (T_2, r_2)$ pokud $T_1 \sim T_2$ pomocí bijekce φ a $\varphi(r_1) = r_2$

Def 1 (T, r, ν) je pěstovaný strom: $T=(V, E)$ strom
 $r \in V$ kořen

ν – číselné uspořádání vrcholů (uspořádání potomků jednoho vrcholu)

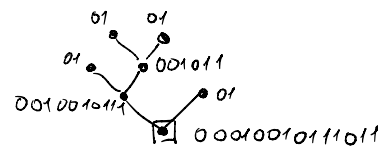
Def 1 T – kořenový strom, r – kořen:

- všechny vrcholy na cestě z r do w se nazývají předci w
- předek w , který je nejvíce blíže je rodič w
- vrchol je potomkem svého rodiče

Def Dva přetvořené stromy $(T_1, r_1, p_1) \sim_P (T_2, r_2, p_2)$ pokud: $(T_1, r_1) \sim_k (T_2, r_2)$ pomocí φ
 $\cdot \varphi$ zachovává pořadí potomků

Kódování přetvořeného stromu

- každý list dostane kód 01
- mají-li potomci $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_k$ vrcholů v kódy $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$, pak v dostane kód $0c_1c_2 \dots c_k1$.
- kód kořene je kód stromu



01010011011 seřadíme kód po prefixech, které mají stejný počet 0 a 1

Kódování kořenového stromu

- každý list dostane kód 01
- má-li vrchol v potomky $v_1, \dots, v_k$ takové, že pro jejich kódy platí $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k$ při nějakém pevně zvoleném uspořádaní řetězců, pak kód v bude $0c_1c_2 \dots c_k1$
- kód kořene je kód stromu

Def $G = (V, E)$:

- Vzdálenost $u, v \in V$ v G : $d(u, v)$ = délka nejkratší cesty v G s konci u, v
- Excentricita $u \in V$: $ek(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$
- Centrum grafu $Z(G) = \arg \min_{v \in V} ek(v)$

Věta Centrum stromu má jeden nebo dva vrcholy. Navíc pokud $Z(T) = \{x, y\}$, pak $\{x, y\} \in E(T)$

Izomorfismus stromů T_1 a T_2

- 1) najdi $Z(T_1)$ a $Z(T_2)$
- 2) pokud $\#Z(T_1) \neq \#Z(T_2)$ pak $T_1 \not\sim T_2$
 pokud $Z(T_1) = \{c_1\}$ a $Z(T_2) = \{c_2\}$ pak $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow (T_1, c_1) \sim_k (T_2, c_2)$
 pokud $Z(T_1) = \{c_1, d_1\}$ a $Z(T_2) = \{c_2, d_2\}$ pak $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow (T_1, c_1) \sim_k (T_2, c_2) \vee (T_1, c_1) \sim_k (T_2, d_2)$

Def Kostra (spanning tree) grafu $G = (V, E)$ je strom $T = (V, E')$, kde $E' \subseteq E$.

Hledání kostry: • Dávk $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_m$ jsou hrany G

- konstruujeme $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G$ s $V(G_i) = V(G)$ $\forall i$

– $G_0(V, \emptyset)$

– $E(G_i) = \begin{cases} E(G_{i-1}) + e_i & \text{pokud přidáním } e_i \text{ do } G_{i-1} \text{ nevznikne kružnice} \\ E(G_{i-1}) & \text{jinak} \end{cases}$

- skončíme přidáním $(\#V(G) - 1)$ -ní hrany nebo když všem dojdou hrany

Úloha minimální kostry

- ohodnocený graf $G = (V, E, W)$: $G(V, E)$ – graf, $W: E \rightarrow (0, +\infty)$

Def Minimální kostra ohodnoceného grafu $G = (V, E, W)$ je souvislý graf $T(V, E')$ tak, že

1) $E' \subseteq E$

2) $w(T) = \sum_{e \in E'} w(e)$ je minimální možná

pozn Minimalita $w(T)$ znamená strom

Kruskalův algoritmus pro minimální hmotu

- 1) seřadíme hrany tak, aby $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$
- 2) pro takto seřazené hrany, provedeme algoritmus pro obecnou hmotu

Věta: Tento algoritmus dává minimální hmotu

- Důkaz:
- $G = (V, E, W)$ ohraničený souvislý graf, $n = |V|$
 - $T_{kr} \subset E$ množina $n-1$ hran nalezených Kr. algoritmem

$$\mathcal{T} = \{E' \subseteq E \mid \begin{array}{l} (V, E') \text{ je souvislý} \\ W(E') \text{ je minimální} \end{array}\}$$

- Spor: $T_{kr} \notin \mathcal{T} \Rightarrow$ můžeme odstranit $g: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ pro $T \in \mathcal{T}$ $g(T) = \min \{i \mid e_i \notin T \wedge e_i \in T_{kr}\}$
 $\tilde{T}$: vznikne $g(T)$ $k := g(\tilde{T})$

- víme $e_k \notin \tilde{T}$, $(V, \tilde{T} \cup e_k)$... souvislý graf n vrcholů a n hran $\Rightarrow$ obsahuje kružnici C
- $\exists c \in C: c \notin T_{kr}$
- $\tilde{T} := \tilde{T} \cup e_k \setminus c \rightarrow (V, \tilde{T})$ je strom, protože je to souvislý graf s n vrcholy a $n-1$ hranami
- $W(\tilde{T}) = W(\tilde{T}) + w(e_k) - w(c)$
 $w(e_k) \leq w(c)$?
 - kr. algo se rozhodl pro e_k a ne pro c
 i) $w(e_k) \leq w(c)$
 ii) $w(c) < w(e_k)$ - Kr. hranu nemohl přehodit z důvodu, že tvořila kružnici s většinou dříve zařazenými $(e_1, \dots, e_{k-1}, c) \in \tilde{T}$

$\Rightarrow W(\tilde{T}) \leq W(\tilde{T})$, protože $W(\tilde{T})$ je minimální množina $\Rightarrow \tilde{T} \in \mathcal{T} \wedge e_k \in \tilde{T} \rightarrow$ spor s volbou $\tilde{T}$ 

- Incidenční matice orientovaného grafu s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ je $B \in \{-1, 0, 1\}^{n, m}$

$$[B]_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{pokud } e_j \text{ začíná ve } v_i \\ 1 & \text{pokud } e_j \text{ končí ve } v_i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

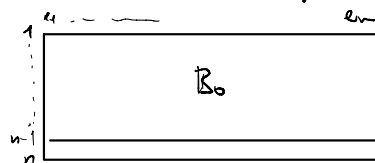
Kostka orientovaného grafu $G = (V, E)$ je

- podgraf (V, E')
- je souvislý a bez kružnic jako neorientovaný graf

Věta: Necht' B je incidenční matice orientovaného grafu G , B_0 vznikla z B odstraněním řádků.

Pak počet koster G je $\det B_0 B_0^T$

Důkaz: Bůho odstranili jsme $n-1$ řádek



$\mathbb{Q} : (n-1) \times (n-1)$ podmatice B_0

lemma $|\det \mathbb{Q}| = 1 \Leftrightarrow$ odpovídající $n-1$ hran tvoří koster G , což G

dl: indukci na $n: n=2: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$

$n-1 \rightarrow n: \forall G' \nexists$ vrchol, ozn. v_i , $i \in n-1$, stupně 1

$\cdot \forall G'$ není vrchol stupně 1, nebo jediný vrchol stupně 1 je v_n