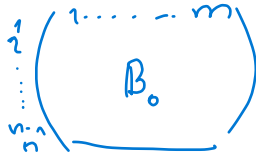


Počet koster grafu



$n-1 > m \rightarrow \text{jinak} \rightarrow \text{po komponentách}$

Věta 1.7.4. Necht' $G = (V, E)$ je jednoduchý orientovaný graf a necht' B je jeho incidenční matice. Označme B_0 matici, která z B vznikne odstraněním nějakého (libovolného) řádku. Pak počet různých koster grafu G je roven $\det B_0 B_0^T$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsme vynechali poslední (n -tý) řádek matice B . Označme C čtvercovou podmatici B_0 řádu $n - 1$. Pak platí

Lemma:

$$|\det C| = \begin{cases} 1 & \text{podgraf } G' \subseteq G \text{ indukovaný vrcholy,} \\ & \text{které odpovídají sloupcům matice } C, \text{ je kostra } G \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Platnost vztahu (1.2) dokážeme indukcí na n . Příklad $n = 1$ je triviální. Pro $n > 1$ nastávají dvě možnosti.

$$\deg_G(v_i) = 1$$

- a) Existuje vrchol v_i ($i \neq n$) stupně 1 v G' . Potom i -tý řádek matice C obsahuje právě jeden nenulový prvek (1 nebo -1). Rozvineme determinant podle tohoto řádku a použijeme indukční předpoklad. Zjevně G' je kostra G právě tehdy, když $G' \setminus \{v_i\}$ je kostra $G \setminus \{v_i\}$.
- b) Graf G' nemá žádný vrchol stupně 1 (resp. G' má nejvýše jeden vrchol stupně 1 a to vrchol v_n odpovídající umazanému řádku). Potom ovšem G' není strom (neboť v takovém případě by měl alespoň dva vrcholy stupně 1) a tedy ani kostra G . Navíc má-li G' $n - 1$ hran a není stromem, pak v něm musí existovat vrchol s nulovým stupněm.
 - i) Vrchol s nulovým stupněm není v_n . Pak matice C má nulový řádek a $\det C = 0$.
 - ii) Vrchol s nulovým stupněm je v_n . Pak každý sloupec matice C obsahuje jednu 1 a jednu -1 . Suma řádek je tedy nula, řádky jsou lineárně závislé a $\det C = 0$.

Tvrzení věty plyne z Binet-Cauchyova vzorce

$$\det B_0 B_0^T = \sum (\det C)^2,$$

kde sčítáme, přes všechny čtvercové podmatice B_0 řádu $n - 1$ a ze vzorce (1.2). $\square$

Věta 1.7.5 (Kirchhoff's Matrix-Tree Theorem). Necht' $G = (V, E)$ je jednoduchý, neorientovaný graf s $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Definujeme matici L_0 rozměru $(n - 1) \times (n - 1)$ následujícím způsobem

$$(L_0)_{i,j} = \begin{cases} d_G(v_i) & i = j, \\ -1 & i \neq j \text{ a } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak G má právě $\det L_0$ koster.

Důkaz. Na základě grafu G sestojíme orientovaný graf H : použijeme stejnou množinu vrcholů a každou hranu grafu G nahradíme dvojicí hran opačné orientace: $\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow ((u, v) \in E(H) \wedge (v, u) \in E(H))$. Necht' A_0 vznikla z  incidenční matice grafu H umazáním posledního řádku. Tvrdíme, že

$$A_0 A_0^T = 2L_0.$$

Prvek matice $A_0 A_0^T$ na pozici (i, j) je skalárním součinem i -tého a j -tého řádku matice A_0 .

- Je-li $i = j$, pak každá hrana která ve v_i začíná, nebo končí přispěje jedničkou. Takže $(A_0 A_0^T)_{i,i} = d_H(v_i) = 2d_G(v_i)$.
- Je-li $i \neq j$, pak každá hrana, která začíná ve v_i a končí ve v_j , nebo naopak začíná ve v_j a končí ve v_i přispěje -1 . Protože je G jednoduchý, je mezi každou dvojicí vrcholů maximálně jedna hrana (které odpovídá dvojice hran v H). Takže $(A_0 A_0^T)_{i,j} = -2$ je-li $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ a $(A_0 A_0^T)_{i,j} = 0$ jinak.

Celkem máme požadovanou rovnost $A_0 A_0^T = 2L_0$ a tedy

$$\det A_0 A_0^T = 2^{n-1} \det L_0.$$

Protože z každé kostry grafu G může vzniknout 2^{n-1} různých koster grafu H – přiřazením orientace $n - 1$ hranám – plyne tvrzení z Věty 1.7.4. $\square$

3.1 Vrcholová a hranová souvislost

Definice 3.1.1. Necht' $k \in \mathbb{N}$. Graf $G = (V, E)$ se nazývá k -souvislý (přesněji k -vrcholově souvislý), pokud $|V| > k$ a graf $G \setminus U$ je souvislý pro každou $U \subseteq V$ takovou, že $\#U < k$. Maximální $k \in \mathbb{N}$ takové, že graf G je k -souvislý, nazýváme (vrcholovou) souvislostí G , značíme $\chi(G)$.

Poznámka. • každý neprázdný graf je 0-souvislý

- 1-souvislé jsou grafy ($\#V \geq 2$), které jsou souvislé (viz Definice ??)
- $\chi(G) = 0$ právě tehdy, když $G = K_1$ nebo G není souvislý
- $\chi(K_n) = n - 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

Definice 3.1.2. Necht' $l \in \mathbb{N}$. Graf $G = (V, E)$ se nazývá l -hranově souvislý, pokud $\#V \geq 2$ a graf $G \setminus F$ je souvislý pro každou $F \subseteq E$ takovou, že $\#F < l$. Maximální $l \in \mathbb{N}$ takové, že graf G je l -hranově souvislý, nazýváme hranovou souvislostí G , značíme $\chi'(G)$.

Definice 3.1.3. Necht' $G = (V, E)$ je graf a $A, B \subseteq V$. Cestu $P = x_0 \cdots x_k$ v grafu G nazveme $A-B$ cestou pokud $V(P) \cap A = \{x_0\}$ a $V(P) \cap B = \{x_k\}$. Necht' $X \subseteq V \cup E$ je taková, že každá $A-B$ cesta obsahuje vrchol nebo hranu z X . Pak řekneme, že X v G odděluje A od B .

Poznámka. • Z definice 3.1.3 plyne, že $A \cap B \subseteq X$

- Graf G je k -vrcholově souvislý, pokud žádné dva jeho vrcholy nejsou odděleny méně než k vrcholy.
- Speciální případ je $X = A$. Takovéto X odděluje A od B , neboť každá cesta, která začíná v nějakém vrcholu A obsahuje alespoň tento vrchol z A (a tedy z X).

Definice 3.1.4. Množinu sousedů vrcholu $v \in V$ v grafu značíme $N(v)$,

$$N(v) = \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}.$$

Věta 3.1.5 (Whitney, 1932). Pro každý graf G s $|V(G)| \geq 2$ platí $\chi(G) \leq \chi'(G) \leq \delta(G)$.

Důkaz. Nerovnost $\chi'(G) \leq \delta(G)$ plyne z faktu, že množina hran, které vychází z pevně zvoleného vrcholu v odděluje v G vrchol v od $N(v)$.

Necht' $F \subseteq E$ je minimální množina hran taková, že $G \setminus F$ je nesouvislý. Ukážeme, že $\chi(G) \leq |F|$. Předpokládejme, že v G existuje vrchol v , který není incidentní s žádnou hranou v F . Necht' C_v je komponenta grafu $G \setminus F$, která obsahuje v . Potom vrcholy v C_v , které jsou koncovými vrcholy hran z F (v grafu G) oddělují v od $G \setminus C_v$. Protože žádná hrana z F nemá oba konce v C_v (díky minimalitě F) je těchto oddělujících vrcholů maximálně $|F|$ a tedy $\chi(G) \leq |F|$.

Nyní naopak předpokládejme, že každý vrchol v G je koncem nějaké hrany z F . Zvolme pevně libovolný vrchol v a označme C_v komponentu grafu $G \setminus F$, která obsahuje v . Potom

každý soused w vrcholu v takový, že $\{v, w\} \notin F$, leží v C_v a navíc jsou tyto sousedé konce různých hran z F (opět z minimality F). To znamená, že $d_G(v) \leq |F|$. Protože $N(v)$ odděluje v od zbylých vrcholů v grafu, dostáváme $\chi(G) \leq |F|$; s výjimkou případů, kdy tyto zbylé vrcholy neexistují. V takovém případě $v \cup N(v) = V(G)$. Protože v byl volen libovolně musí tato rovnost platit pro všechny vrcholy v $V(G)$, G je tedy úplný graf. Pro úplný graf ovšem platí $\chi(K_n) = \chi'(K_n) = n - 1$. $\square$

3.2 Mengerova věta

Definice 3.2.1. Necht' $G = (V, E)$ je graf a $A, B \subseteq V$. Definujeme $k(G, A, B)$ jako minimální počet vrcholů, které v G oddělují A od B .

Důsledek 3.2.2. (1) Protože jak A tak B oddělují A od B máme $k(G, A, B) \leq \min(\#A, \#B)$.

(2) Pokud v grafu G neexistují žádné $A-B$ cesty, pak libovolná množina vrcholů a hran X odděluje A od B . V takovém případě $k(G, A, B) = 0$.

(3) Pokud $A \subseteq B$, pak triviální cesty (tj. nulové délky), které začínají a končí v A neobsahují žádné vrcholy, které nejsou v A . Proto žádná množina, která neobsahuje A nemůže oddělovat A od B ; to znamená

$$A \subseteq B \Rightarrow k(G, A, B) = \#A. \quad (3.1)$$

(4) Necht' A je pevné a B_1, B_2 jsou takové, že $B_1 \subseteq B_2$. Pak každá množina, která odděluje A od B_2 nutně odděluje i A od B_1 ; to znamená

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow k(G, A, B_1) \leq k(G, A, B_2). \quad (3.2)$$

Věta 3.2.3 (Menger, 1927). Necht' $G = (V, E)$ je graf, $A, B \subseteq V$. Pak minimální počet vrcholů oddělujících v G množinu A od B je roven maximálnímu počtu disjunktních $A-B$ cest v G .

Necht' $k = k(G, A, B)$. Zjevně G nemůže obsahovat víc, než k disjunktních $A-B$ cest. Ukážeme, že takových k cest existuje. Podle Důsledku 3.2.2, bod (2) můžeme předpokládat, že existuje alespoň jedna $A-B$ cesta (jinak je tvrzení triviální). Za tohoto předpokladu hledaných k cest najít opakovaným použitím následujícího Lemma.

Lemma 3.2.4. Necht' $G = (V, E)$ je graf, $A, B \subseteq V$, $k = k(G, A, B)$ a $n \in \mathbb{N}$, $n < k$. Existuje-li v G n disjunktních $A-B$ cest

$$P_1, P_2, \dots, P_n,$$

pak v G existuje i $n + 1$ disjunktních $A-B$ cest

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}$$

takových, že je-li $b \in B$ koncem nějaké cesty P_i , pak je b také koncem nějaké cesty Q_j .

Důkaz. Indukcí na $\beta := \#(V \setminus B)$, tj. počet vrcholů grafu G , které nejsou v množině B .

Necht' $\beta = 0$, takže všechny vrcholy grafu G patří do množiny B . Nutně $A \subseteq B$ a podle vztahu (3.1) máme $k = \#A$. V takovém případě je $A-B$ cesta libovolná cesta nulové délky, která začíná (a končí) v nějakém vrcholu A . Máme-li n ($n < \#A$) $A-B$ cest, můžeme přidat

další $A-B$ cestu nulové délky začínající v některém zatím nepoužitém vrcholu množiny A . Tím získáme $n + 1$ cest požadovaných vlastností.

Předpokládejme, že lemma platí pro všechna $\beta < \beta_0$ pro nějaké pevné $\beta_0 \geq 1$. Ukážeme platnost pro $\beta = \beta_0$. Mějme tedy $G = (V, E)$ a množiny $A, B \subseteq V$ takové, že $k = k(G, A, B)$ a $\beta_0 = \$(V \setminus B)$. Necht' $P_1, \dots, P_n$ je n disjunktních $A-B$ cest. Označme konce cest P_j takto: a_j konec v množině A , b_j konec v množině B . Protože podle předpokladů $n < k$, neodděluje množina $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ A od B , tj. v G existuje $A-B$ cesta, která není incidentní z žádným z vrcholů z $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, označme ji R .

Pokud je cesta R disjunktní se všemi cestami $P_1, \dots, P_n$ pak

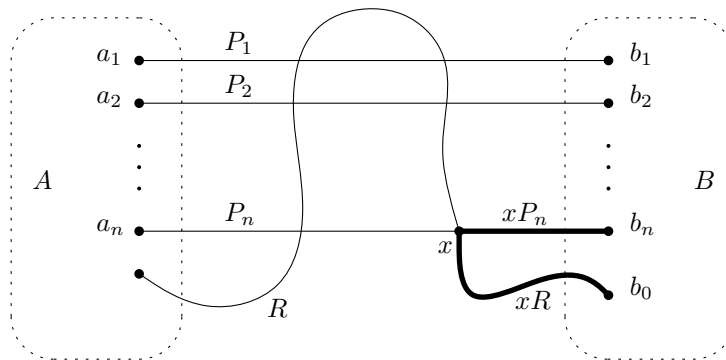
$$Q_1 = P_1, \dots, Q_n = P_n, Q_{n+1} = R$$

je $n + 1$ cest hledaných vlastností.

V opačném případě označme x poslední vrchol, ve kterém R protíná nějakou cestu P_i . Bez újmy na obecnosti $i = n$. Definujeme

$$B' := B \cup V(xP_n \cup xR),$$

tzn. B' původní množina B spolu s vrcholy na cestách, které jsou na následujícím obrázku vyznačeny tučně.



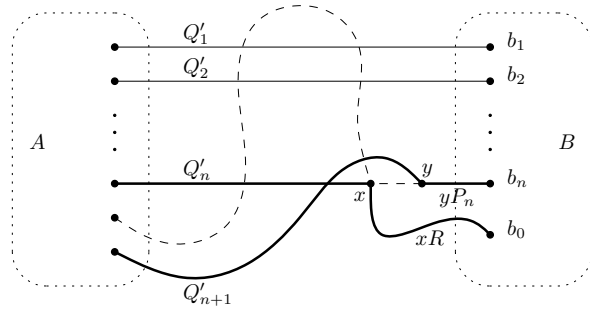
Obrázek 3.4: Výchozí situace pro důkaz Lemma 3.2.4.

Z definice plyne $B \subseteq B'$, takže podle vztahu (3.2) dostáváme $n < k = k(G, A, B) \leq k(G, A, B')$. Podle indukčního předpokladu pro množinu B' ($\#B' > \#B$) a n disjunktních $A-B'$ cest $P_1, \dots, P_{n-1}, P_n x$ existuje v grafu $n + 1$ disjunktních $A-B'$ cest $Q'_1, \dots, Q'_{n+1}$, jejichž koncové body jsou $b_1, \dots, b_{n-1}, x, y$. Pro vrchol y platí, že $y \in B'$ a $y \notin \{b_1, \dots, b_{n-1}, x\}$. Bez újmy na obecnosti můžeme zpermutovat indexy cest tak, aby v množině B' byly: b_i koncem Q'_i pro $i = 1, \dots, n - 1$, x koncem Q'_n a y koncem Q'_{n+1} . Rozlišíme tři případy v závislosti na y .

a) $y \in xP_n$.

Definujeme

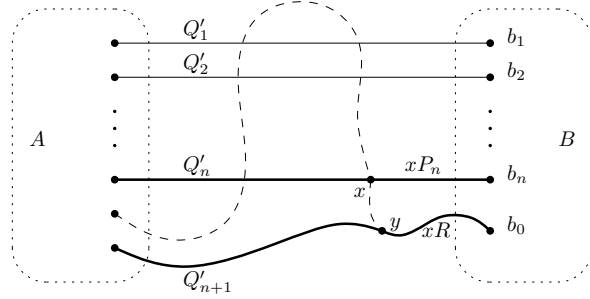
$$\begin{aligned} Q_i &:= Q'_i & 1 \leq i \leq n-1 \\ Q_n &:= Q'_n xR \\ Q_{n+1} &:= Q'_{n+1} yP_n \end{aligned}$$



b) $y \in xR$.

Definujeme

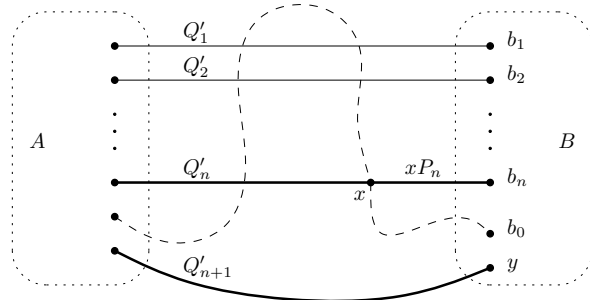
$$\begin{aligned} Q_i &:= Q'_i & 1 \leq i \leq n-1 \\ Q_n &:= Q'_n xP_n \\ Q_{n+1} &:= Q'_{n+1} yR \end{aligned}$$



c) $y \notin xP_n \cup xR$.

Protože y je konec $A-B'$ cesty, nutně $y \in B$. Navíc $y \neq b_n$ a z indukčního předpokladu také $y \neq b_j$ pro $1 \leq j \leq n-1$. Definujeme

$$\begin{aligned} Q_i &:= Q'_i & 1 \leq i \leq n-1, \\ Q_n &:= Q'_n xP_n \\ Q_{n+1} &:= Q'_{n+1}. \end{aligned}$$



Ve všech třech případech $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ je $n+1$ $A-B$ cest požadovaných vlastností. $\square$

Definice 3.2.5. Cesty v grafu nazveme *nezávislé*, pokud žádná z nich neobsahuje vnitřní (tj. nekoncev) vrchol nějaké jiné.

Důsledek 3.2.6. Necht' $G = (V, E)$ je graf a necht' $a, b \in V$, $a \neq b$. Pokud $\{a, b\} \notin E$ pak minimální počet vrcholů (různých od a, b), které oddělují v G a od b je rovný maximálnímu počtu nezávislých $a-b$ cest v G .

Důkaz. Aplikací Mengerovy věty pro $A := N(a)$ a $B := N(b)$. $\square$

Věta 3.2.7 (Globální verze Mengerovy věty). Graf $G = (V, E)$ je k -vrcholově souvislý právě tehdy, když obsahuje k nezávislých cest mezi libovolnou dvojicí vrcholů.

Důkaz. $\Leftarrow$: Protože G obsahuje k nezávislých cest mezi libovolnou dvojicí vrcholů, pak nutně $\#V > k$ (protože G je jednoduchý) a navíc žádné dva jeho vrcholy nemohou být odděleny méně než k vrcholy. Podle definice je G k -souvislý.

$\Rightarrow$: Sporem; předpokládáme, že G je k -souvislý a zároveň v něm existuje dvojice vrcholů $a, b \in V$ takých, že mezi nimi je méně než k nezávislých cest. Podle Důsledku 3.2.6 to znamená, že $\{a, b\} \in E$. Uvažujeme graf $G' := G \setminus \{\{a, b\}\}$. Graf G' obsahuje maximálně $k - 2$ nezávislých a - b cest. Opět podle Důsledku 3.2.6 existuje $X \subseteq V$ taková, že X odděluje v G a od b a zároveň $\#X \leq k - 2$. Z k -souvislosti grafu G plyne $\#V > k$ a tedy existuje alespoň jeden vrchol $v \in V$, $v \notin X \cup \{a, b\}$. V grafu G' nutně množina X odděluje vrchol v buď od vrcholu a nebo od b (jinak by X neoddělovala a od b). Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že X odděluje v G' v od a . Potom ovšem je $X \cup \{b\}$ množina maximálně $k - 1$ vrcholů, které v G oddělují v od a . Spor s k -souvislostí G . $\square$

4.1 Maximální párování

Definice 4.1.1. Bud' $G = (V, E)$ graf. *Párování* v grafu G je množina $M \subseteq E$ taková, že $\forall e, f \in M (e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset)$.

Definice 4.1.2. Necht' $G = (V, E)$ je graf a $M \subseteq E$ je párování v G . Řekneme, že vrchol $v \in V$ je *M -saturovaný* pokud $\exists e \in M (v \in e)$.

Definice 4.1.3. Párování M v grafu G nazveme *maximální*, pokud pro každé párování M' v G platí $\#M \geq \#M'$. Velikost maximálního párování v grafu G značíme $\nu(G)$.

Definice 4.1.4. Necht' M je párování v grafu $G = (V, E)$. Cestu $v_0, v_1, \dots, v_k$ v G nazveme *M -střídající*, jestliže $\{v_{i-1}, v_i\} \in E \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin E$ pro všechna $i = 1, \dots, k-1$. *M -střídající* cestu nazveme *M -zlepšující*, když ani jeden z jejích koncových vrcholů není M -saturovaný.

Věta 4.1.5 (Berge). *Párování M v grafu $G = (V, E)$ je maximální právě tehdy, když v G neexistuje M -zlepšující cesta.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Necht' v G existuje M -zlepšující cesta P . Pak $M' := M \Delta P$ je párování v G takové, že $\#M' = \#M + 1$. To je spor s maximalitou M .

$\Leftarrow$: Necht' v G neexistuje M -zlepšující cesta a zároveň M není maximální párování. Pak v G existuje párování M' takové, že $\#M' > \#M$. Uvažujeme graf $H := (V, M \Delta M')$. H je tvořen izolovanými body, cestami a kružnicemi sudé délky. Protože $\#M' > \#M$, musí H obsahovat alespoň jednu cestu liché délky, ozn. P , jejíž první i poslední hrana jsou z M' . Ani jeden koncový vrchol cesty P nemohl být v G M -saturovaný, takže P je M -zlepšující cesta v G . $\square$

4.2 Velikost maximálního párování

Definice 4.2.1. Množina $S \subseteq V(G)$ se nazývá *vrcholové pokrytí* grafu G , pokud $\forall e \in E(G) \exists v \in S (v \in e)$. Vrcholové pokrytí S grafu G nazveme *minimální*, pokud pro každé vrcholové pokrytí S' grafu G platí $\#S \leq \#S'$. Velikost minimálního vrcholového pokrytí grafu G značíme $\tau(G)$.

Pozorování 4.2.2. *Pro libovolné párování M v grafu G a libovolné vrcholové pokrytí S grafu G platí $|M| \leq |S|$. Speciálně $\nu(G) \leq \tau(G)$.*

Věta 4.2.3 (Königova-Egerváryova věta). *Necht' G je bipartitní graf. Pak $\nu(G) = \tau(G)$.*

Důkaz. Necht' $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf a necht' M je maximální párování v G . Označme $U \subseteq V_1$ množinu vrcholů, které nejsou M -saturované. Definujeme

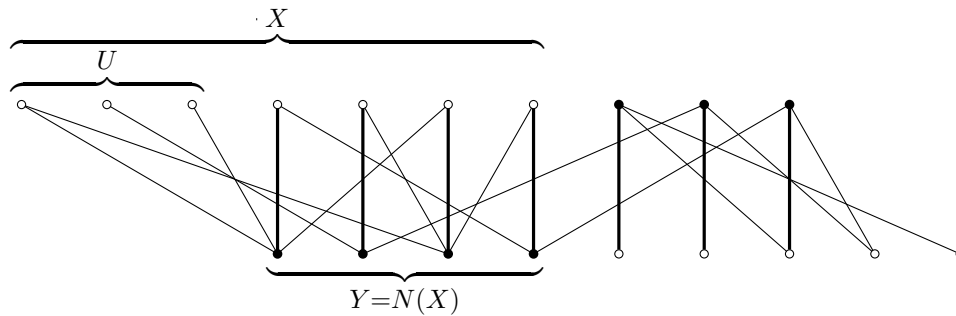
$$X := \{v \in V_1 \mid \text{z } U \text{ vede do } v \text{ } M\text{-střídající cesta}\},$$

$$Y := \{v \in V_2 \mid \text{z } U \text{ vede do } v \text{ } M\text{-střídající cesta}\}.$$

Pak na M -střídajících cestách začínajících v U vždy 1. hrana není z M , 2. hrana je z M , 3. hrana není z M , atd. Každá M -střídající cesta začínající v U nutně končí ve V_1 . V opačném případě by byla zároveň M -zlepšující což je ve sporu s maximalitou párování M . Každý vrchol z Y je tedy spojen hranou z M s vrcholem z $X \setminus U$. Navíc každý soused libovolného vrcholu x z X musí ležet v Y : necht' y je soused $x \in X$. Pak M -střídající cesta z U do x prodloužená o hranu $\{x, y\}$ tvoří M -střídající cestu z U do y . Tedy

$$N(X) = Y. \quad (4.1)$$

Definujeme $K := (V_1 \setminus X) \cup Y$. Pak K je vrcholové pokrytí G . V opačném případě v G existuje hrana s jedním koncem v X a s druhým koncem v $V_2 \setminus Y$. To je spor s (4.1).



Obrázek 4.1: Množiny U , X a Y v důkazu Věty 4.2.3. Hrany z párování M jsou tučné, vrcholy z množiny K plné.

Navíc platí $\#M = \#K$. Jinak by musela existovat hrana $e \in M$, $e = \{x, y\}$ taková, že $x, y \in K$ a tedy $x \in V_1 \setminus X$ a $y \in Y$. V grafu nutně existuje M -střídající cesta z U do y , ozn. P , jejíž poslední hrana není z M . Potom $P + e$ je M -střídající hrana z U do x a tedy $x \in X$. Spor s $x \in V_1 \setminus X$. $\square$

Věta 4.2.4 (Königova-Oreova formule). *Necht' $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf. Pak*

$$\nu(G) = \min_{S \subseteq V_1} \{\#(V_1 \setminus S) + \#N(S)\}.$$

Důkaz. Necht' $S \subseteq V_1$ je libovolná. Pak každá hrana grafu (a tedy i hrana z nějakého párování M) má konec buď ve $V_1 \setminus S$, nebo v $N(S)$. Maximální počet hran v libovolném párování je

tedy menší nebo roven $\#(V_1 \setminus S) + \#N(S)$ pro každou $S \subseteq V_1$. Proto

$$\nu(G) \leq \min_{S \subseteq V_1} \{\#(V_1 \setminus S) + \#N(S)\}.$$

Naopak necht' M je maximální párování. Označme $S \subseteq V_1$ množinu vrcholů, do kterých vede M -střídající cesta z nějakého $v \in V_1$, který není M -saturovaný. Snadno ověříme, že

- každý vrchol v $N(S)$ je M -saturovaný,
- každý vrchol v $V_1 \setminus S$ je M -saturovaný,
- žádná hrana z M nespojuje vrchol z $V_1 \setminus S$ s vrcholem z $N(S)$.

Z toho plyne, že

$$\nu(G) \geq \min_{S \subseteq V_1} \{\#(V_1 \setminus S) + \#N(S)\}.$$

□

Kapitola 6

Toky v sítích

8. ~ 9. 11.

6.1 Základní pojmy

Definice 6.1.1. Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf. Mějme $X, Y \subset V$ množiny vrcholů takové, že $X, Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ a funkci $c : E \rightarrow \mathbb{N}$. Uspořádanou čtveřici $N = (G, X, Y, c)$ nazveme **sítí**.

V případě toků v sítích slouží (orientované) grafy jako modely dopravní sítě, kterou prochází nějaký tok — elektřiny, zboží, nebo třeba dat. Z této situace vychází i názvosloví: vrcholy množiny X se označují jako výrobci, vrcholy množiny Y jako spotřebitelé a hodnota funkce c představuje kapacitu daného spojení.

V celé kapitole budeme používat následující značení: nechť e je hrana orientovaného grafu; symbolem e^+ označujeme vrchol, do kterého hrana e vede, zatímco symbolem e^- vrchol, ze kterého e vychází.

Definice 6.1.2. Tok v síti $N = (G, X, Y, c)$ je funkce $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje následující dvě podmínky

(T1) $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro všechny hrany $e \in E$.

(T2) $\sum_{e^+=v} f(e) = \sum_{e^-=v} f(e)$ pro všechny tak zvané vnitřní vrcholy sítě $v \in V \setminus X \setminus Y$.

Poznámka. V každé síti existuje alespoň jeden tok, neboť funkce $\forall e \in E (f(e) = 0)$ splňuje obě podmínky v Definici 6.1.2. Tento tok se nazývá **nulový**.

Definice 6.1.3. Hodnota toku f v síti $N = (G, X, Y, c)$, označujeme $\text{val}(f)$, je definována jako

$$\text{val}(f) := \sum_{e^- \in X} f(e) - \sum_{e^+ \in X} f(e).$$

Zbytek kapitoly (především úvahy o maximálním toku v následující části) si zjednodušíme tím, že budeme uvažovat pouze speciální tvar sítě — síť s jedním výrobcem a s jedním spotřebitelem. Poznamenejme, že to není moc velké omezení, neboť každou síť můžeme lehce transformovat do požadovaného tvaru:

- přidáme nové vrcholy x_0 (výrobce) a y_0 (spotřebitel)
- spojíme všechny vrcholy v X s vrcholem x_0 hranami s kapacitou $+\infty$
- spojíme všechny vrcholy v Y s vrcholem y_0 hranami s kapacitou $+\infty$

6.2 Maximální tok

Definice 6.2.1. Řekneme, že tok f v síti N je **maximální**, pokud pro všechny toky f' v N platí $\text{val}(f) \geq \text{val}(f')$.

Definice 6.2.2. Necht' $N = (G, x_0, y_0, c)$ je síť a nechť $S \subset V(G)$ je taková, že $x_0 \in S$ a $y_0 \notin S$. Označme $\bar{S} := V(G) \setminus S$. Potom dvojici $(S, \bar{S})$ nazveme **řezem v síti N** . **Kapacitu řezu $(S, \bar{S})$** definujeme jako

$$c((S, \bar{S})) = \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \bar{S}}} c(e).$$

Tvrzení 6.2.3. Pro každý tok f a řez $(S, \bar{S})$ v síti $N = (G, x_0, y_0, c)$ platí

$$\text{val}(f) = \sum_{e^- \in S, e^+ \in \bar{S}} f(e) - \sum_{e^- \in \bar{S}, e^+ \in S} f(e) \leq c((S, \bar{S})).$$

Důkaz. Z definice hodnoty toku máme

$$\text{val}(f) = \sum_{e^- = x_0} f(e) - \sum_{e^+ = x_0} f(e) = \sum_{v \in S} \left(\sum_{e^- = v} f(e) - \sum_{e^+ = v} f(e) \right),$$

kde druhá rovnost plyne z podmínky (T2) pro tok. Sumu na pravé straně můžeme rozdělit na dvě části podle toho, zda má daná hrana oba konce v S (část (a)), nebo právě jeden konec v S (část (b))

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &= \underbrace{\sum_{e^- \in S, e^+ \in S} f(e) - \sum_{e^- \in S, e^+ \in \bar{S}} f(e)}_{(a)} + \underbrace{\sum_{e^- \in \bar{S}, e^+ \in \bar{S}} f(e) - \sum_{e^- \in \bar{S}, e^+ \in S} f(e)}_{(b)} = \\ &= \sum_{e^- \in S, e^+ \in \bar{S}} f(e) - \sum_{e^- \in \bar{S}, e^+ \in S} f(e) \leq c((S, \bar{S})). \end{aligned}$$

Poslední nerovnost plyne podmínky (T1) pro tok f . □

Poznámka. Speciálně platí, že hodnota maximálního toku je menší nebo rovna kapacitě minimálního řezu. Zjevně najdeme-li tok f s řez $(S, \bar{S})$ tak, že $\text{val}(f) = c((S, \bar{S}))$, pak f je maximální tok.

Definice 6.2.4. Necht' f je tok v síti $N = (G, x_0, y_0, c)$ a nechť P je neorientovaná cesta v G (tzn. zajímá nás pouze přítomnost hrany, nikoli její orientace) s počátkem v x_0 . Pro každou $e \in P$ definujeme

$$\iota(e) := \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{je-li } e \text{ na } P \text{ orientována ve směru od } x_0, \\ f(e) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jestliže $\iota(P) := \min_{e \in P} \iota(e) > 0$, pak řekneme, že cesta P je **f -nenasycená**.

Hodnota $\iota(P)$ se někdy nazývá zbytková kapacita. Je to vlastně maximální množství, o které můžeme zvýšit tok f na cestě P , aniž bychom porušili podmínku (T1) z definice toku. Formálně je postup tohoto zvýšení a jeho důsledek shrnut v následující větě.

Věta 6.2.5 (O f -nenasycených cestách). *Tok f v síti $N = (G, x_0, y_0, c)$ je maximální právě tehdy, když v N neexistuje f -nenasycená cesta končící ve vrcholu y_0 .*

Důkaz. $\Rightarrow$: (sporem) Nechť f je maximální tok v N a nechť v N existuje f -nenasycená cesta P končící v y_0 . Definujeme $\tilde{f}$:

- $\forall e \in E, e \notin P (\tilde{f}(e) = f(e)),$
- $\forall e \in E, e \in P$ orientovaná na P ve směru z x_0 : $\tilde{f}(e) = f(e) + \iota(P),$
- $\forall e \in E, e \in P$ orientovaná na P proti směru z x_0 : $\tilde{f}(e) = f(e) - \iota(P).$

Potom zjevně $\tilde{f}$ splňuje podmínky (T1) a (T2) pro tok a navíc $\text{val}(\tilde{f}) = \text{val}(f) + \iota(P) > \text{val}(f)$.

$\Leftarrow$: Definujeme množinu $S := \{v \in V \mid \exists f\text{-nenasycená cesta z } x_0 \text{ do } v\}$. Potom $x_0 \in S$ a podle předpokladu $y_0 \notin S$. $(S, \bar{S})$ je tedy řez v síti N . Na každé hraně $e = (u, v)$, kde $u \in S$ a $v \in \bar{S}$ musí být $\iota(e) = 0$ neboli $f(e) = c(e)$, jinak by bylo $v \in S$. Ze stejného důvodu na každé hraně $e = (u, v)$ s $u \in \bar{S}$ a $v \in S$ musí být $\iota(e) = 0$, a tedy $f(e) = 0$. Proto platí

$$c((S, \bar{S})) = \sum_{e^- \in S, e^+ \in \bar{S}} c(e) = \sum_{e^- \in S, e^+ \in \bar{S}} f(e) - \sum_{e^- \in \bar{S}, e^+ \in S} f(e) = \text{val}(f).$$

Našli jsme řez s $c((S, \bar{S})) = \text{val}(f)$. Tok f je tedy maximální. $\square$

Věta 6.2.6 (Max-flow Min-cut teorém). *V libovolné síti je hodnota maximálního toku rovná kapacitě minimálního řezu.*

Důkaz. Podle Tvzení 6.2.3 je kapacita libovolného řezu horní mezí na hodnotu toku v síti. Důkaz Věty 6.2.5 ukazuje, že maximální tok v síti nabývá této hranice pro jistý řez $(S, \bar{S})$. $\square$

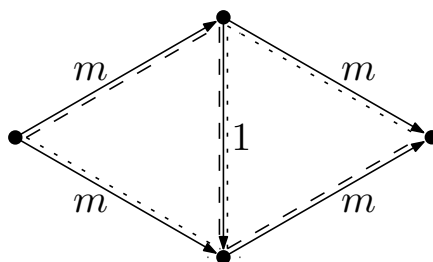
Věta 6.2.7 (O celočíselném toku). *Nechť N je síť s celočíselnými kapacitami hran. Pak v N existuje maximální tok s celočíselnými hodnotami.*

Důkaz. Hledáme maximální tok jako v důkazu Věty 6.2.5. Vyjdeme od nulového toku a v každém kroku tok zvedneme o $\iota(P) \in \mathbb{N}$. Kapacita minimálního řezu je konečné číslo, takže po konečně mnoha krocích dostaneme maximální tok s celočíselnými hodnotami. $\square$

Poznámka. Důkaz Věty 6.2.7 dává algoritmus na nalezení maximálního toku: začneme od nulového toku a zvyšujeme jej, dokud existuje nějaká nenasyčená cesta (toto je podstata „labeling algorithm“ Forda a Fulkersona (1957)). Tento přístup ovšem naráží na dva problémy:

- pro síť s obecně reálnými kapacitami se algoritmus nemusí vůbec zastavit
- i v případě celočíselných kapacit může být časová náročnost (pokud špatně volíme nenasyčené cesty, viz následující příklad) úměrná $\sum_{e \in E} c(e)$.

Příklad. Pokud budeme v následující síti hledat maximální tok pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu a přitom budeme na střídavě používat čárkovanou a tečkovanou cestu, budeme potřebovat m kroků (namísto optimálních 2).



D. 1. 1.

6.3 Booleovské toky

Definice 6.3.1. **Booleovský tok** v síti $N = (E, X, Y, c)$ je takový tok f , pro který $f(e) \in \{0, 1\}$ pro všechny $e \in E(G)$.

Poznámka. Booleovské toky se objevují především v kombinatorických aplikacích teorie toků. S jejich pomocí je snadné demonstrovat, jak významným výsledkem je Max-flow Min-cut teorém (Věta 6.2.6). Mnoho výsledků z teorie grafů je — při vhodně zvolené síti, často s booleovským tokem — jejím přímým důsledkem.

S pomocí booleovských sítí předvedeme alternativní důkaz Hallovy věty o párování v bipartitních grafech (Věta 4.2.1) a Mengerovy věty o souvislosti grafů (Věta 3.2.3).

Hallova věta

Věta. *Nechť $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf. V G existuje párování saturující celé V_1 právě tehdy, když $\forall T \subset V_1 (|N(T)| \geq |T|)$.*

Napřed zkonstruujeme na základě bipartitního grafu G síť $N(H, x_0, y_0, c)$:

- $V(H) = V(G) \cup \{x_0, y_0\}$, kde $x_0, y_0 \notin V(G)$.
- $E(H) = \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E(G), u \in V_1, v \in V_2\} \cup \{(x_0, u) \mid u \in V_1\} \cup \{(v, y_0) \mid v \in V_2\}$.
- $c(e) = 1$ pro všechny $e \in E(H)$.

Lemma 6.3.2. *V síti N existuje tok f s $\text{val}(f) = |V_1|$ právě tehdy, když v G existuje párování saturující celé V_1 .*

Důkaz. $\Leftarrow$: Nechť M je párování v G (a zároveň v příslušné části H) saturující celé V_1 . Položme $f(e) = 1$ pro všechny $e \in M$ a navíc $f((x_0, u)) = 1$ a $f((v, y_0)) = 1$ pokud u respektive v jsou M -saturované. Pro všechny ostatní hrany $f(e) = 0$. Zřejmě f je tok v N s $\text{val}(f) = |V_1|$.

$\Rightarrow$: Tok f s $\text{val}(f) = |V_1|$ je zjevně maximální na N . Podle věty o Celočíselném toku (Věta 6.2.7) můžeme předpokládat, že f je booleovský. Takže párování saturující celé V_1 získáme tak, že do něj dáme všechny hrany $e = (u, v)$ takové, pro které $u \in V_1$, $v \in V_2$ a $f(e) = 1$. Podmínky na párování jednoduše plynou z toho, že tok je booleovský a z podmínek (T1) a (T2) na tok. $\square$

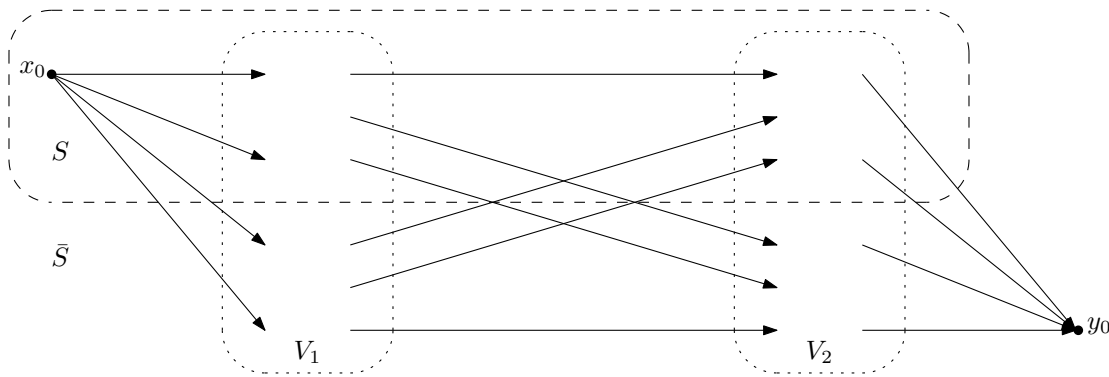
Důkaz Hallovy věty. Jak jsme předvedli již v kapitole 4, implikace zleva doprava je triviální. Dokážeme tedy pouze směr zprava doleva. Předpokládejme, že maximální tok v N má hodnotu menší než $|V_1|$ (tj. podle Lemma 6.3.2 v G není párování saturující celé V_1). Podle Max-flow Min-cut teorému existuje v N řez $(S, \bar{S})$ s $c((S, \bar{S})) < |V_1|$.

Díky konstrukci sítě N (viz Obrázek 6.1) máme

$$c((S, \bar{S})) \geq |\bar{S} \cap V_1| + |\bar{S} \cap N(S \cap V_1)| + |S \cap V_2|,$$

a navíc

$$|N(S \cap V_1)| \leq |\bar{S} \cap N(S \cap V_1)| + |S \cap V_2|.$$



Obrázek 6.1: Důkaz Hallovy věty pomocí booleovské sítě

Dohromady

$$|N(S \cap V_1)| \leq \underbrace{|\bar{S} \cap N(S \cap V_1)| + |S \cap V_2| + |\bar{S} \cap V_1|}_{\leq c((S, \bar{S}))} - |\bar{S} \cap V_1| < |V_1| - |\bar{S} \cap V_1| = |S \cap V_1|.$$

Podmínka z věty není splněna pro $T := S \cap V_1$. □

Mengerova věta

Věta. *Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $u, v \in V$, $u \neq v$. Pak minimální počet hran oddělujících u od v je roven maximálnímu počtu hranově disjunktních cest jdoucích z u do v .*

Důkaz. Nechť $N = (G, u, v, c)$ je síť s $c(e) = 1$ pro všechny $e \in E(G)$. Zřejmě každá množina hranově disjunktních cest vedoucích z u do v dává tok hodnoty k z u do v .

Naopak, nechť f je maximální tok v N . Můžeme předpokládat, podle Věty 6.2.7, že je booleovský. Na základě libovolného booleovského toku f v síti N s $\text{val}(f) = k$ můžeme zkonstruovat k hranově disjunktních cest z u do v : z vrcholu u jdeme po neoznačených hranách s $f(e) = 1$ dokud nedorazíme do vrcholu v . Pokaždé, když projdeme po hraně, tak ji označíme. Když dojdeme do v , snížíme tok na označených hranách o 1 a sestrojíme z nich cestu odstraněním případných kružnic. Díky vlastnosti toku (T2) cesta musí končit ve vrcholu v . Hodnota toku se s každou takto sestrojenou cestou sníží o jedna. Maximální počet hranově disjunktních cest je tedy roven hodnotě maximálního toku a tedy i kapacitě minimálního řezu.

Zjevně každý řez $(S, \bar{S})$ v síti N dává množinu $c((S, \bar{S}))$ hran $X = \{e \in E(G) \mid e^- \in S, e^+ \in \bar{S}\}$, které oddělují u od v .

Naopak předpokládejme, že množina $X \subset E(G)$ odděluje u od v , a že velikost X je nejmenší možná. Nechť S je množina vrcholů ležících na cestách z u , které neobsahují žádnou hranu z X . Z definice množiny oddělující dva vrcholy máme $t \notin S$, $(S, \bar{S})$ je tedy řez v N . Navíc pro všechny hrany $e \in E(G)$ s $e^- \in S$, $e^+ \in \bar{S}$ platí $e \in X$, protože jinak by muselo být $e^+ \in S$, což je spor. Z minimality X plyne $|X| = c((S, \bar{S}))$. Minimální kapacita řezu v N je tedy rovna i minimálnímu počtu hran oddělujících u od v . □

Algebraická teorie grafů

9.1 Lineární algebra a teorie matic

Používané značení. $\sigma(\mathbf{A})$... spektrum matice $\mathbf{A}$

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \Lambda$... uspořádaná vl. čísla

$\varrho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A})\}$... spektrální poloměr matice $\mathbf{A}$

Definice 9.1.1. Čtvercová matice se nazývá *rozložitelná*, je-li tvaru (nebo lze-li ji simultánní permutací řádků a sloupců převést na tvar)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ jsou čtvercové matice řádu alespoň 1. Čtvercová matice se nazývá *nerozložitelná*, není-li rozložitelná.

Tvrzení 9.1.2. *Adjacenční matice $\mathbf{A}_G$ grafu $G = (V, E)$ je nerozložitelná právě tehdy, když je graf G souvislý.*

Věta 9.1.3 (Perron-Frobenius). *(1) Nechť $\mathbf{A}$ je nezáporná čtvercová matice. Potom $\varrho(\mathbf{A})$ je vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ a existuje nezáporný vlastní vektor matice $\mathbf{A}$, odpovídající tomuto vlastnímu číslu.*

(2) Nechť $\mathbf{A}$ je nezáporná nerozložitelná čtvercová matice. Pak spektrální poloměr $\varrho(\mathbf{A})$ je kladné vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ s násobností jedna a tomuto vlastnímu číslu odpovídá kladný vlastní vektor. Žádnému jinému vlastnímu číslu již neodpovídá nezáporný vlastní vektor.

Tvrzení 9.1.4. *Vlastní čísla symetrické matice jsou reálná.*

Věta 9.1.5 (Schur). *Každou komplexní čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^H$, kde $\mathbf{U}$ je unitární a $\mathbf{T}$ horní trojúhelníková matice.*

Věta 9.1.6 (Hlavní věta o symetrických maticích). *Každou (reálnou) symetrickou matici $\mathbf{A}$ lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T$, kde $\mathbf{C}$ je ortogonální a $\mathbf{D}$ je reálná diagonální matice. Přitom diagonální prvky matice $\mathbf{D}$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ (vhodnou volbou matice $\mathbf{C}$ můžeme dosáhnout libovolného uspořádání) a sloupce matice $\mathbf{C}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}$.*

Tvrzení 9.1.7. *Nechť $\mathbf{A}$ je nezáporná, symetrická matice, Λ její maximální vlastní číslo. Pak platí*

$$\varrho(\mathbf{A}) = \Lambda = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Důkaz. První rovnost je obsahem Perron-Frobeniovy věty. Nechť $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný takový, že $\|\mathbf{x}\| = 1$. Nechť $\mathbf{D}$ je matice vzniklá diagonalizací matice $\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$, taková, že Λ se vyskytuje v jejím pravém dolním rohu. Nechť $\mathbf{y} := \mathbf{C}^T \mathbf{x}$. Protože je $\mathbf{C}$ ortogonální, tvoří její sloupce ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$ a proto $\|\mathbf{y}\| = 1$. Takže

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \varrho(\mathbf{A}) \sum_{i=1}^n y_i^2 = \varrho(\mathbf{A}).$$

Pro libovolný $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dostáváme $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \varrho(\mathbf{A})$ a tedy $\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \varrho(\mathbf{A})$. Pokud zvolíme $\mathbf{x}$ tak, aby $\mathbf{y}^T = (0, \dots, 0, 1)$ nastane (díky volbě tvaru matice $\mathbf{D}$) požadovaná rovnost $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \Lambda$. $\square$

9.1.1 Spektrum adjacenční matice

Tvrzení 9.1.8. *Nechť $\mathbf{A}_G$ je adjacenční matice jednoduchého grafu $G = (V, E)$ s $\#V = n$. Pak*

$$(i) \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0,$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \#E.$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{D}$ je matice vzniklá diagonalizací matice $\mathbf{A}_G$. Matice $\mathbf{D}$ a $\mathbf{A}_G$ mají – jakožto podobné matice – stejné spektrum a stopu a proto

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(\mathbf{D}) = \text{Tr}(\mathbf{A}_G) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_G)_{ii} = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že jednoduchý graf neobsahuje smyčky a tedy jeho adjacenční matice má nulovou diagonálu.

Dále platí

$$\text{Tr}(\mathbf{A}_G^2) = \text{Tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{A}_G^2 \mathbf{C}) = \text{Tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{A}_G \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{A}_G \mathbf{C}) = \text{Tr}(\mathbf{D}^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

a zároveň

$$\text{Tr}(\mathbf{A}_G^2) = \sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E,$$

kde poslední dvě rovnosti plynou z vět 1.4.1 respektive 1.2.1. $\square$

Věta 9.1.9. *Nechť Λ je maximální vlastní číslo adjacenční matice $\mathbf{A}_G$ grafu $G = (V, E)$. Pak platí $\delta(G) \leq \Lambda \leq \Delta(G)$.*

Důkaz. Nechť $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Označme $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^n$ jednotkový vektor $\mathbf{j}^T = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$. Pak z Tvzení 9.1.7 dostáváme

$$\Lambda = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x} \geq \mathbf{j}^T \mathbf{A}_G \mathbf{j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_G(v_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(G) = \frac{1}{n} n \delta(G) = \delta(G).$$

Nechť $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je nezáporný vlastní vektor matice $\mathbf{A}_G$ k vlastnímu číslu Λ . Upravíme jej tak, aby maximální složka (ozn. x_k) byla 1. Dostáváme

$$\Lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}_G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \mathbf{A}_G \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_G(v_1) \\ \vdots \\ d_G(v_n) \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

tedy uvažujeme-li pouze k -tý řádek

$$\Lambda = \Lambda x_k = \dots = d_G(v_k) \leq \Delta(G). \quad (9.2)$$

$\square$

Poznámka. Kdy nastane v Tvzení 9.1.9 rovnost $\Lambda = \Delta(G)$? V obou nerovnostech v rovnicích (9.1) a (9.2) musí nastat rovnost. Předně tedy musí platit $d_G(v_k) = \Delta(G)$, dále pak

$$(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy $x_i = 1$ pro každé i takové, že $\{v_k, v_i\} \in E$. To ale znamená, že i tuto složku vlastního vektoru k Λ jsem mohl použít v (9.2), tzn. i zde chceme nerovnost nahradit rovností. Speciálně musí platit $d_G(v_i) = \Delta(G)$ pro všechna i taková, že $\{v_k, v_i\} \in E$. Zároveň pro všechny tyto vrcholy musíme zopakovat úvahu o druhé nerovnosti a podmínka $d_G(v) = \Delta(G)$ se tak přenesse i na sousedy sousedů vrcholu v_k a tak dál.

Důsledek 9.1.10. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Pak pro maximální vlastní číslo jeho adjacenční matice platí $\Lambda = \Delta(G)$ právě tehdy, když G je regulární.*

Tvrzení 9.1.11. *Nechť $G = (V, E)$ je regulární souvislý graf, $\mathbf{A}_G$ jeho adjacenční matice a $\sigma(\mathbf{A}_G) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \Lambda\}$. Pak vlastní vektory k vlastním číslům $\lambda \neq \Lambda$ leží v nadrovině $\{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.*

Důkaz. Nechť λ je libovolné vlastní číslo $\mathbf{A}_G$, $\lambda \neq \Lambda$. Dle předpokladu je G souvislý, jeho adjacenční matice je tedy nerozložitelná a podle Perron-Frobeniovy věty má její maximální vlastní číslo Λ násobnost 1. Navíc podle důsledku 9.1.10 platí $\Lambda = \Delta(G)$. Celkem tedy $\lambda \neq \Delta(G)$. Sečteme-li rovnici

$$\mathbf{A}_G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

po složkách, dostaneme

$$\Delta(G) \sum_{i=1}^n x_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

Protože $\lambda \neq \Delta(G)$ nastane rovnost pouze v případě $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. $\square$

Věta 9.1.12. *Nechť $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \Lambda = \Delta(G)$ je spektrum adjacenční matice $\mathbf{A}_G$ regulární souvislého grafu $G = (V, E)$ s $\#V = n$. Pak spektrum adjacenční matice grafu $\overline{G}$ je $\{-1 - \lambda_i \mid i = 1, \dots, n-1\} \cup \{n-1 - \Delta(G)\}$.*

Důkaz. Vyjdeme z následujícího vztahu mezi maticemi $\mathbf{A}_G$ a $\mathbf{A}_{\overline{G}}$.

$$\mathbf{A}_G + \mathbf{A}_{\overline{G}} + \mathbf{I} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

1) Je-li $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ vlastní vektor k Λ , pak z poznámky za větou 9.1.9 o grafu z $\Lambda = \Delta(G)$ plyne, že $\mathbf{y} = (1, \dots, 1)$. Z rovnice (9.3) dostáváme

$$\mathbf{A}_{\overline{G}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}_G) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \Delta(G) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1 - \Delta(G)) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takže $(n-1 - \Delta(G))$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}_{\overline{G}}$.

2) Nechť $(x_1, \dots, x_n)$ je vlastní vektor k λ_i , $i \leq n-1$. Pak z rovnice (9.3) dostáváme

$$\mathbf{A}_{\overline{G}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}_G) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (-1 - \lambda_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kde předposlední rovnost plyne z Tvzení 9.1.11. Takže $(-1 - \lambda_i)$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}_{\overline{G}}$ pro všechna $i \leq n-1$. $\square$

Definice 9.1.13. Má-li charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ tvar $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, definujeme $\tilde{\chi}_{\mathbf{A}}(\lambda) := \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)$.

Tvrzení 9.1.14. Pro diagonalizovatelnou matici $\mathbf{A}$ platí, že $\tilde{\chi}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná, tj. existuje invertovatelná matice $\mathbf{P}$ taková, že

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_s \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Pak následující rovnosti jsou ekvivalentní

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) &= (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{I}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} \cdots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}(\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{I})\mathbf{P} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{D} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{D} - \lambda_2 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{D} - \lambda_s \mathbf{I}) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

přičemž třetí rovnost zjevně plyne z tvaru diagonální matice $\mathbf{D}$. □

Věta 9.1.15. Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Pak spektrum jeho adjacenční matice $\mathbf{A}_G$ má víc různých vlastních hodnot, než je poloměr G (tj. maximální vzdálenost mezi dvojicí vrcholů v G).

Důkaz. Sporem. Nechť $\#\sigma(\mathbf{A}_G) = k \leq \max_{u,v \in V} d(u, v)$. Pak existuje v G dvojice vrcholů $v_i, v_j \in V$ taková, že $d(v_i, v_j) = k$. Nechť polynom $\tilde{\chi}_{\mathbf{A}_G}(\mathbf{A}_G)$ stupně k má tvar

$$\tilde{\chi}_{\mathbf{A}_G}(\mathbf{A}_G) = \mathbf{A}_G^k + a_{k-1}\mathbf{A}_G^{k-1} + \cdots + a_1\mathbf{A}_G + a_0\mathbf{I}. \quad (9.4)$$

Podle Věty 1.4.1 udává $(\mathbf{A}_G^l)_{ij}$ počet sledů délky l mezi vrcholy v_i a v_j . Z předpokladu $d(v_i, v_j) = k$ plyne

$$(\mathbf{A}_G^l)_{ij} = 0 \quad \forall l = k-1, \dots, 1 \quad \text{a zároveň} \quad (\mathbf{A}_G^k)_{ij} \geq 1.$$

Po dosazení do (9.4) dostáváme $(\tilde{\chi}_{\mathbf{A}_G}(\mathbf{A}_G))_{ij} \geq 1$, tedy spor s Tvrzením 9.1.14. □

Věta 9.1.16. Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, Λ maximální vlastní číslo jeho adjacenční matice $\mathbf{A}_G$. Pak G je bipartitní právě tehdy, když $i - \Lambda$ je vlastní číslo $\mathbf{A}_G$.

Důkaz. $\Rightarrow$: Nechť G je bipartitní. Pak $\mathbf{A}_G$ má (po permutaci vrcholů) blokový tvar. Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}_G)$; rovnici $\mathbf{A}_G \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ můžeme blokově zapsat

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}.$$

Porovnáním bloků dostaneme rovnosti $\mathbf{B}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{y}$ a $\mathbf{B}^T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{z}$. Uvažujeme vektor $\mathbf{w} = (\mathbf{y}, -\mathbf{z})^T$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}\mathbf{z} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\mathbf{y} \\ \lambda\mathbf{z} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{z} \end{pmatrix},$$

a tedy $-\lambda \in \sigma(\mathbf{A}_G)$.

$\Leftarrow$: Nechť $-\Lambda$ je vlastní číslo $\mathbf{A}_G$. Volíme vlastní vektor $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ k $-\Lambda$ tak, aby $\|\mathbf{w}\| = 1$. Uvažujeme

$$\begin{aligned} \Lambda = |-\Lambda| &= |-\Lambda \mathbf{w}^T \mathbf{w}| = |\mathbf{w}^T \mathbf{A}_G \mathbf{w}| = \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_i w_j \right| \stackrel{(i)}{\leq} \sum_{ij}^n a_{ij} |w_i| |w_j| = \\ &= (|w_1|, \dots, |w_n|) \mathbf{A}_G (|w_1|, \dots, |w_n|)^T \stackrel{(ii)}{\leq} \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_G \mathbf{x} = \Lambda. \end{aligned}$$

Protože se levá a pravá strana rovnají, musí být nerovnosti (i) a (ii) rovnostmi:

- $(|w_1|, \dots, |w_n|) \mathbf{A}_G (|w_1|, \dots, |w_n|)^T = \Lambda$.
Tato rovnost implikuje, že $(|w_1|, \dots, |w_n|)^T$ je vlastním vektorem k Λ . Protože G je souvislý, $\mathbf{A}_G$ je nerozložitelná a podle Perron-Frobeniovy věty pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí $|w_i| > 0$.
- $\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_i w_j \right| = \sum_{i,j}^n a_{ij} |w_i| |w_j|$
Tato rovnost znamená, že všechny mají členy stejná znaménka a rovnost tedy platí i bez absolutních hodnot. Protože $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_i w_j \leq 0$ je nutně i každý člen sumy menší nebo roven nule.

Nechť $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Definujeme $V_1 := \{v_i \mid w_i < 0\}$ a $V_2 := \{v_i \mid w_i > 0\}$. Protože pro všechna i je $|w_i| > 0$, tvoří V_1 a V_2 disjunktní rozklad množiny V vrcholů grafu G . Navíc $V_1 \neq \emptyset$ a $V_2 \neq \emptyset$, protože jinak by $(w_1, \dots, w_n)$ byl vlastní vektor k $-\Lambda$ i Λ .

Graf G je bipartitní s rozkladem $V_1 \cup V_2$: nechť $\{v_i, v_j\}$ je hrana v G . Pak $a_{ij} = 1$, a protože $a_{ij} w_i w_j \leq 0$ a zároveň $|w_i| > 0$ a $|w_j| > 0$ mají nutně w_i a w_j jiná znaménka a tedy jeden z vrcholů v_i, v_j patří do množiny V_1 a druhý do V_2 . $\square$

Věta 9.1.17. *Graf $G = (V, E)$ je bipartitní právě tehdy, když spektrum jeho adjacenční matice je symetrické kolem nuly (včetně násobností).*

Důkaz. $\Rightarrow$: Viz stejný směr v důkazu věty 9.1.16.

$\Leftarrow$: Napřed předpokládejme, že G je souvislý. Pak z předpokladu na symetričnost spektra plyne $-\Lambda \in \sigma(\mathbf{A}_G)$ a G je bipartitní podle věty 9.1.16.

Nechť G má komponenty $G_1, G_2, \dots, G_r$. Pak existuje permutace vrcholů taková, že adjacency matice grafu G má tvar

$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{G_1} & & & \\ & \mathbf{A}_{G_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{G_r} \end{pmatrix}.$$

Nechť Λ je maximální vlastní číslo matice $\mathbf{A}_G$. Pak se symetrie je $-\Lambda$ také vlastním číslem $\mathbf{A}_G$. BÚNO $-\Lambda \in \sigma(\mathbf{A}_{G_1})$. Protože každý blok je nezáporná, symetrická, nerozložitelná matice, je dle Perron-Frobenia i $\Lambda \in \sigma(\mathbf{A}_{G_1})$. Protože je G_1 komponenta a tedy souvislý graf, je podle věty 9.1.16 graf G_1 bipartitní. Spektrum $\sigma(\mathbf{A}_{G_1})$ je tedy symetrické.

Nadále uvažujeme graf $G \setminus G_1$; ze spektra $\sigma(\mathbf{A}_G)$ jsme odstranili symetrickou část $\sigma(\mathbf{A}_{G_1})$, takže zbytek je stále symetrický. Opakováním tohoto postupu ukážeme, že každá komponenta je bipartitní graf. $\square$