Otázky z Teorie grafů a kombinatoriky v šk. rok 2002-2003

Písemka sestává ze dvou otázek z teorie grafů (skupina 1-20) a z jedné otázky z generujících funkcí (skupina I - X).

1. **a)** Definujte hamiltonovskou kružnici v grafu a hamiltonovský sled.

   b) Vyslovte podmínku na skóre grafu, která zaručuje existenci hamiltonovské kružnice a na příkladě ilustrujte, že tato podmínka není nutná.

   c) Napište vztah mezi existencí hamiltonovské kružnice v grafu a existenci hamiltonovské cesty v grafu.

   d) Odvoďte z bodů b) + c) postačující podmínku pro existenci hamiltonovské cesty v grafu a s její pomocí dokažte, že každý samokomplementární graf obsahuje hamiltonovskou cestu.

2. **a)** Definujte eulerovský cyklus a hamiltonovskou kružnici.

   b) Vyslovte a dokažte větu, která charakterizuje eulerovské grafy.

   c) Vyslovte postačující podmínku týkající se minimálního stupeně grafu, která zaručuje existenci hamiltonovské kružnice.

   d) Dokažte větu z bodu c).

3. **a)** Zaveďte pojmy komponenta grafu, souvislost grafu, řez v grafu.

   b) Napište rekurentní vztah pro posloupnsot (s_n), kde s_n je počet souvslých grafů na n vrcholech.

   c) Vyslovte větu, která umožní rozhodnout o souvislosti grafu pomocí matice grafu.

   d) Dokažte předchozí větu (i pomocná tvrzení, které v důkazu použijete).

4. **a)** Definujte obyčejný graf, stupeň a skóre.

   b) Popište všechny dvojice čísel (r, n), pro které existuje r-regulární graf na n vrcholech a své tvrzení zdůvodněte.

   c) Vyslovte větu, která umožní rozhodovat, zda daná posloupnost čísel je či není skórem.

   d) Dokažte předchozí větu.

5. **a)** Definujte bipartitiní graf a popište tvar matice bipartitního grafu.

   b) Určete spektrum hvězdy S_n.

   c) Vyslovte větu, která charakterizuje bipartitní grafy pomocí spektra.

   d) Dokažte tuto větu pro případ souvislého grafu.

6. **a)** Definujte podgraf a indukovaný podgraf grafu.

   b) Jaká je souvislot mezi spektrem grafu a spektrem jeho podgrafu.

c) Vyslovte větu o existenci velkých bipartitních podgrafů v grafu G na $2n$ vrcholech

d) Dokažte tuto větu.

7. **a)** Definujte kružnici a cyklus v grafu.

   b) Charakterizujte bipartitní grafy pomocí kružnic.

   c) Vyslovte nutnou a postačující podmínku proto, aby bipartitní graf měl perfektní párování.

   d) Dokažte větu z bodu b).

8. **a)** Definujte párování M v grafu, M-střídající a M-zlepšující cestu.

   b) Vyslovte nutnou a postačující podmínku proto, aby párování bylo maximální.

   c) Vyslovte nutnou a postačující podmínku proto, aby obyčejný graf obsahoval perfektní párování.

   d) Dokažte větu b).

9. **a)** Definujte ramseyovská čísla $r(k,l)$ a vyslovte větu opravňující $r(k,l)$ zavádět.

   b) Přímo podle definice dokažte, že $r(3,3) = 6$.

   c) Vyslovte nejlepší známý dolní a horní odhad na číslo $r(k,k)$.

   d) Tyto odhady dokažte.

10. **a)** Definujte kliku grafu a nezávislou množinu grafu. Zaveďte čísla $\alpha(G)$ a $\omega(G)$.

    b) Vyslovte větu, která dává dolní odhad na $\alpha(G)$, když počet hran grafu je něčím omezen.

    c) Vyslovte dolní odhad na $\omega(G)$ využívající skóre grafu.

    d) Dokažte jednu z vět b) nebo c).

11. **a)** Vyslovte horní odhady na počet hran v grafu, který neobsahuje K_p.

    b) Určete spektrum K_p.

    c) Nalezněte graf na $n = 9$ vrcholech, který má minimální počet klik a nezávislých množin velikosti 3. Zdůvodněte proč právě vámi nalezený graf jich má minimálně.

    d) Dokažte odhad z bodu a).

12. **a)** Vyslovte horní odhady na počet hran v grafu, který neobsahuje $K_{p,p}$.

    b) Určete spektrum $K_{p,p}$.

    c) Nalezněte graf na $n \geq 12$ vrcholech, který neobshuje nezávislou množinu velikosti 4 a přitom má minimální počet hran mezi grafy s touto vlastností.

    d) Popište konstrukci grafu, který neobsahuje $K_{2,2}$ a přitom má maximální počet hran.

13. **a)** Definujte strom a les.

    b) Vyslovte a dokažte větu charakterizující strom podle počtu hran.

    c) Spočítejte, kolik je všech lesů na 7 vrcholech. Své tvrzení zdůvodněte.

- **d)** Určete počet stromů na n vrcholech a dokažte toto tvrzení (i všechna pomocná tvrzení, která použijete.)

14. **a)** Definujte izomorfizmus dvou grafů.
    - **b)** Nalezněte dva stromy na 6 vrcholech, které mají stejné grafové posloupnosti, ale nejsou izomorfní. Zdůvodněte, proč nejsou izomorfní.
    - **c)** Definujte úlohu hledání minimálního stromu v grafu a popište Kruskalův algoritmus.
    - **d)** Dokažte, že Kruskalův algoritmus dává minimální strom.
15. **a)** Definujte vrcholovou barevnost grafu $\chi(G)$.
    - **b)** Pro graf s n vrcholy vyslovte vztahy mezi $\chi(G)$ a $\alpha(G)$, mezi $\chi(G)$ a Δ, mezi $\chi(G)$ a $\omega(G)$.
    - **c)** Pro graf na n vrcholech udejte horní i dolní odhad na barevnost doplňku $\chi(\overline{G})$ pomocí barevnosti $\chi(G)$.
    - **d)** Dokažte odhady z bodu c) i všechna pomocná tvrzení, která budete v důkazu používat.
16. **a)** Definujte k-kritické grafy.
    - **b)** Vyslovte a dokažte vztah k a δ pro k-kritický graf.
    - **c)** Vyslovte, co nejslabší podmínky, které už zaručují $\chi(G) \leq \Delta$.
    - **d)** Větu z bodu c) dokažte (nemusíte dokazovat pomocná tvrzení).
17. **a)** Definujte planární graf.
    - **b)** Vyslovte a dokažte Eulerovu formuli.
    - **c)** Definujte crosing number $cr(G)$ a napište dva dolní odhady na $cr(G)$ pro neplanární graf.
    - **d)** Ze znalosti toho, jak vypadají jisté minimální neplanární grafy, dokažte Kuratowského větu charakterizující planární grafy.
18. **a)** Definujte dělení grafu.
    - **b)** Z Eulerovy formule odvoďte tvrzení o minimálním stupni v planárním grafu.
    - **c)** Vyslovte nutnou a postačující podmínku nato, aby graf byl planární.
    - **d)** Dokažte, že planární graf má vrcholovou barevnost ≤ 5.
19. **a)** Definujte hranovou barevnost grafu $\chi'(G)$ a její vztah k pojmu párování.
    - **b)** Co všechno lze říct o vztahu $\chi'(G)$ a Δ ?
    - **c)** Popište, jak souvisí hranová barevnost a tvorba rozvrhu, a jak do toho vstupuje omezení na počet místnosti.
    - **d)** Určete hranovou barevnost pro bipartitní graf a své tvrzení dokažte.
20. **a)** Definujte adjacenční matici grafu $\mathbb{A}_G$ a vyčíslete stopu $tr(\mathbb{A}_G)$ a $tr(\mathbb{A}_G^2)$.

b) Popište vztah mezi spektrem regulárního grafu a spektrem jeho doplňku.

c) S kterou vlastností grafu souvisí mohutnost spektra matice a jak?

d) Napiše horní i dolní odhady na maximální vlastní číslo matice $\mathbb{A}_G$ pomocí maximálního a minimálního stupně. Dokažte tyto odhady a popište grafy, pro které které nastává v nerovnostech rovnost.

I. Posloupnost Bernoulliových čísel $(B_n)_0^\infty$ je definována tím, že její exponenciální generující funkcí je

$$(B_n)_0^\infty \quad \stackrel{egf}{\longleftrightarrow} \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Odvoďte rekurentní vztah pro $(B_n)_0^\infty$ a zdůvodněte, proč liché členy této posloupnosti jsou od jistého n počínaje nulové.

II. Nalezněte exponenciální generující funkci pro posloupnost $(n^2)_0^\infty$. Pomocí ní pak sečtěte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$$

III. Napište vztah Bellových a Stirlingových čísel. Odvoďte tvar exponenciální generující funkce pro posloupnost Bellových čísel $(b_n)_0^\infty$, víte-li, že

$$b_0 = 1 \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{e} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^n}{r\,!} \qquad \text{pro} \quad n \geq 1$$

IV. Odvoďte rekurentní vztah pro Bellova čísla $(b_n)_0^\infty$, víte-li tvar exponenciální generující funkce

$$(b_n)_0^\infty \quad \stackrel{egf}{\longleftrightarrow} \quad f(x) = e^{e^x - 1}$$

V. Nalezněte pomocí obyčejné generující funkce explicitní tvar posloupnosti $(c_n)_0^\infty$ zadané následovně:

$$c_1 = 1 \;\; \text{a} \;\; c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} \;\; \text{pro} \;\; n \geq 2$$

VI. Pomocí generující funkce určete počet řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = M,$$

když neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nabývají hodnoty v množině přirozených čísel $1, 2, 3 \ldots$

VII. Počet d_n permutací bez pevného bodu na množině $\{1, 2, \ldots n\}$ splňuje vztah

$$n\,! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k \;,$$

přičemž klademe $d_0 = 1$. Odvoďte explicitní tvar d_n.

VIII. Posloupnost

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{když 3 dělí } n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

lze zapsat jako

$$a_n = \frac{1 + \omega^n + \omega^{2n}}{3}\ , \quad \text{kde} \ \ \omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3}\ .$$

Nalezněte exponenciální generující funkci posloupnosti $(a_n)_0^\infty$. Pomocí ní pak sečtěte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{3k}$$

IX. Pro posloupnost $(a_n)_1^\infty$ platí

$$a_1 = 1 \ \text{ a } \ a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(n-k) \ \text{ pro } \ n \geq 2$$

Nalezněte obyčejnou generující funkci této posloupnosti a její pomocí explicitní tvar a_n.

X. Posloupnost funkcí $B_k(x)$ je definovaná takto:

$$B_0(x) = 1 \ \text{ a } \ B_k(x) = \sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n \ \text{ pro } \ k \geq 1$$

Užitím rekurentního vztahu pro Stirlingova čísla vyjádřete $B_k(x)$ ve tvaru racionální funkce. Rozkladem $B_k(x)$ na parciální zlomky odvoďte explicitní vyjádření pro $\left\{ {n \atop k} \right\}$