Otázky - teorie grafů

I. Dokažte, že grafy (vhodné obrázky) jsou neizomorfní.

II. Najděte dva stromy na 6 vrcholech, které mají stejné grafové posloupnosti, ale nejsou izomorfní.

III. Nakreslete všechny navzájem neizomorfní grafy s grafovou posloupnosti $(6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Ukažte, že jste žádný graf nevynechali.

IV. Dokažte, že graf na n vrcholech s c komponentami má alespoň $n - c$ hran.

V. Nechť strom G obsahuje vrchol stupně k. Ukažte, že G obsahuje alespoň k vrcholů stupně 1.

VI. Rozhodněte zda graf (vhodný obázek) je planární.

VII. Následující dva obrázky znázorňují izomorfní grafy (vhodný obrázek). Nalezněte příslušný izomorfizmus.

VIII. Nalezněte souvislý graf na 10 vrcholech, pro který je součet jeho stupňů minimální. Kolik takových grafů na 10 vrcholech existuje?

IX. Les na 173 vrcholech má 111 hran. Kolik má tento les stromů?

X. Najděte všechny souvislé 5-regulární (všechny stupně = 5) grafy s vrcholovou barevností $\chi(G) = 6$.

XI. Nalezněte všechny souvislé neizomorfní grafy na 11 vrcholech, pro které platí $\chi'(G) = \chi(G) = 2$. Stejnou úlohu řešte pro grafy na 10 vrcholech.

XII. Nalezněte souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech, pro který platí $\chi'(G) < \chi(G)$.

XIII. Popište všechny neizomorfní bipartitní grafy, pro které platí $\alpha(G) = \omega(G)$.

XIV. Nalezněte graf, pro který platí $\omega(G) + 2 = \chi(G)$.

XV. **a)** Nalezněte graf, pro který platí $3 + \chi(G) = \chi'(G)$. **b)** Nalezněte graf, pro který platí $3 + \chi'(G) = \chi(G)$.

XVI. Nechť p je prvočíslo. **a)** Popište všechny neizomorfní grafy na p vrcholech, pro které platí $\alpha(G).\chi(G) \leq p$. **b)** Popište všechny neizomorfní grafy na p vrcholech, pro které platí $\alpha(G).\chi(G) \geq p$.

XVII. Nalezněte alespoň dva neizomorfní grafy na 22 vrcholech, pro které platí $\alpha(G).\chi(G) = 22 = \alpha(\overline{G}).\chi(\overline{G})$.

XVIII. Popište všechny neizomorfní stromy na 6 vrcholech, které mají perfektní párování.

XIX. Popište všechny neizomorfní samokomplementární grafy na 4 vrcholech a na 5 vrcholech.

XX. Dokažte, že neexistuje planární samokomplementární graf na 12 vrcholech (Návod: Co lze říct o hranách tohoto grafu?)

XXI. Dokažte, že pro graf G na n vrcholech platí $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta+1}$ a popište všechny grafy, pro které nastává rovnost.

XXII. Definujte ramseyovské číslo $r(3,3)$ a dokažte, že je rovno 6.

XXIII. Z úplného grafu na n vrcholech ubereme dvě hrany. Jaká je vrcholová barevnost tohoto grafu?

XXIV. Z úplného bipartitního grafu na $12+12$ vrcholech ubereme 8 hran. Určete $\chi(G)$ a $\chi'(G)$ takto vzniklého grafu.

XXV. Popište všechny neizomorfní souvislé bipartitní grafy na 6 vrcholech, pro které je $\chi'(G) = 3$ a které mají minimální počet hran mezi grafy s touto vlastností.

XXVI. Popište všechny grafy na n vrcholech, ve kterých existuje dvojice vrcholů i, j tak, že $d(i,j) = n-1$.

XXVII. Popište všechny grafy, pro které platí **a)** $\Lambda < 1$, **b)** $\Lambda = 1$.

XXVIII. Popište všechny souvislé grafy, pro které platí **a)** $\Lambda < \sqrt{2}$, **b)** $\Lambda = \sqrt{2}$.

XXIX. Popište všechny grafy, pro které platí $\Lambda = \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$, kde $m = |E|$ a $n = |V|$.

XXX. **a)** Ukažte, že když $|E| > \binom{n-1}{2}$, pak G je souvislý. **b)** Nalezněte graf s $\binom{n-1}{2}$ hranami, který není souvislý.

XXXI. **a)** Ukažte, že když $\delta \geq \frac{n}{2}$, pak G je souvislý. **b)** Nalezněte graf s minimálním stupněm $\delta = \frac{n}{2} - 1$, který není souvislý.

XXXII. Ukažte, že v každém souvislém grafu existuje takový vrchol, že i po ubrání tohoto vrcholu zůstane graf souvislý.

XXXIII. Dokažte nebo vyvraťte následující implikace:

a) G je souvislý $\Longrightarrow$ $\overline{G}$ není souvislý
b) G není souvislý $\Longrightarrow$ $\overline{G}$ je souvislý

XXXIV. Nalezněte graf $G = (V, E)$ a jeho párování M, které není maximální a přitom M nelze rozšířit o hranu e tak, aby $M \cup \{e\}$ bylo párování.

XXXV. Nechť minimální stupeň v grafu je $\delta \geq 5$. Pak G obsahuje kružnici délky minimálně 6.

XXXVI. Nechť G je souvislý graf. Pak každé dvě jeho cesty maximální délky mají společný vrchol.

XXXVII. Dokažte, že $\Lambda \geq \delta$.

XXXVIII. Popište všechny souvislé grafy, pro které platí $\Lambda = \delta$.

XXXIX. Dokažte, že každý regulární bipartitní graf má perfektní párování.

XL. Dokažte, že minimální počet křížení v neplanárním grafu je $cr(G) \geq |E| - 3|V| + 6$. Nalezněte graf, pro který nastává rovnost.

XLI. Popište algoritmus, který pro daný souvislý graf G rozhodné zda je G eulerovský a v kladném případě najde eulerovský cyklus.

XLII. Dokažte, že vrcholová barevnost planárního grafu je ≤ 6.

XLIII. Popište algoritmus, který pro danou posloupnost $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ celých čísel rozhodne, zda je grafová a v kladném případě zkonstruuje graf s touto grafovou posloupností.

XLIII. Definujte strom a dokažte větu, že strom na n vrcholech má ... hran.

XLIV. Definujte M-zlepšující cestu v grafu a dokažte, že když graf obsahuje M-zlepšující cestu, tak párování M není maximální.

XLV. Definujte vrcholovou barevnost grafu $\chi(G)$ a dokažte $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

XLVI. Definujte k-kritický graf a dokažte, že v takovém grafu je $\delta \geq k - 1$.

XLVII. Dokažte Eulerovu formuli pro planární grafy: $|V| - |E| + \Phi(G) = 2$.

XLVIII. Dokažte, že minimální stupeň planárního grafu je ≤ 5.

IL. Popište algoritmus, který pro daný graf rozhodne, zda je souvislý, a v opačném případě vypíše množiny vrcholů jednotlivých komponent.

L. Určete spektrum hvězdy S_n.

LI. Určete spektrum (včetně násobností) úplného bipartitního grafu na 12+12 vrcholech aniž byste počítali charakteristický polynom. Využijte tvaru matice a vět o spektru.