Algebraická topologie

Relace homotopie

Definice: Homotopie *

Nechť X a Y jsou dva topologické prostory, a nechť $f, g: X \to Y$ jsou spojitá zobrazení.
Řekneme, že f a g jsou homotopická, pokud existuje spojité zobrazení $H: X \times I \to Y$, takové že pro všechna $x \in X$
i) $H(x,0) = f(x)$
ii) $H(x,1) = g(x)$.
Zobrazení H se nazývá homotopie zobrazení f a g ($f \simeq g$).

Lemma: *

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $C_1, C_2 \subset X$ uzavřené množiny.
Nechť $f: C_1 \cup C_2 \to Y$ je libovolné zobrazení.
Potom f je spojité právě tehdy, když $f|_{C_1}$ a $f|_{C_2}$ jsou spojitá.

Tvrzení: Homotopické třídy *

Nechť X, Y jsou dva topologické prostory.
Symbolem $Top(X,Y)$ označujeme prostor všech spojitých zobrazení z X do Y.
Potom „být homotopické" je relací ekvivalence na $Top(X,Y)$.
Příslušné třídy ekvivalence se nazývají homotopické třídy.

Definice: Homotopie vůči množině *

Nechť $f, g \in Top(X,Y)$ a $A \subset X$ libovolná.
Řekneme, že f a g jsou homotopické relativně k A, existuje-li jejich homotopie $H: X \times I \to Y$, taková že pro všechna $a \in A$ je $H(a,t)$ funkce nezávislá na t.
Označujeme $f \simeq_A g$.

Poznámka: *

Z definice vyplývá, že pro $a \in A$ platí $f(a) = H(a,0) = H(a,1) = g(a)$, tj. dvě homotopická zobrazení vůči A musí na A splývat.

Definice: Homotopická ekvivalence, homotopický typ *

Nechť X, Y jsou topologické prostory.
Zobrazení $f \in Top(X,Y)$ se nazývá homotopická ekvivalence, jestliže existuje zobrazení $g \in Top(Y,X)$, takové, že
i) $f \circ g \simeq \mathbb{I}_Y$
ii) $g \circ f \simeq \mathbb{I}_X$
Existuje-li mezi dvěma prostory nějaká homotopická ekvivalence, řekneme, že mají stejný homotopický typ.

Definice: Kontraktibilní prostor *

Má-li topologický prostor X stejný homotopický typ jako jedno-bodová množina, říkáme, že X je stáhnutelný do bodu.

Tvrzení: *

Mít stejný homotopický typ je relace ekvivalence.

Definice: Deformační retrakt *

Nechť $A \subset X$ je podmnožina topologického prostoru X.
Řekneme, že A je deformační retrakt X, jestliže existuje $r \in Top(X,X)$:
i) $r(X) = A$
ii) $\mathbb{I}_X \simeq_A r$

Tvrzení: *

Je-li A deformační retrakt X, mají X a A stejný homotopický typ.

Fundamentální grupa

Definice: Homotopie křivek s pevnými konci *

Nechť $f, g \in Top(I, X)$, pro které platí $f \simeq_A g$, pro nějakou $A \subset X$.
Pak říkáme, že příslušná homotopie je homotopie křivek s pevnými konci.
Nadále budeme uvažovat výhradně tuto homotopii a pak psát $f \simeq g$.

Lemma: Reparametrizace křivky *

Nechť $f \in Top(I, X)$.
Reparametrizací křivky f rozumíme křivku $f \circ \varphi$, kde $\varphi : I \to I$ je libovolné spojité zobrazení splňující $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(1) = 1$.
Potom platí $[f] = [f \circ \varphi]$.
Tj. reparametrizace nemění třídu homotopie.

Definice: Napojení křivek *

Nechť $f, g \in Top(I, X)$ jsou dvě křivky, takové že $f(1) = g(0)$.
Napojením křivek f a g myslíme křivku $f * g$ definovanou:

$$(f*g)(t) := \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ g(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Lemma: *

Operace napojení křivek se chová přirozeně vzhledem k homotopiím.
Tj.: $f, g, f', g' \in Top(I, X)$, $f \simeq f' \wedge g \simeq g' \Rightarrow f * g \simeq f' * g'$

Definice: Částečná binární operace na homotopiích *

Na třídách homotopie zavádíme částečnou binární operaci $*$ jako:

$$[f] * [g] = [f * g]$$

Tvrzení: *

Operace * má grupové vlastnosti:

i) Násobení jednotkou

Pro libovolnou konstantní křivku $e_{x_0}(t) = x_0$ platí

$[f] * [e_{x_0}] = [f]$, $\cancel{[e_{x_0}] * [f] = [f]}$

pro všechny $f \in Top(I,X)$, pro které má operace * smysl.

ii) Inverze

Pro každou křivku $f \in Top(I,X)$ existuje křivka $f^{-1} \in Top(I,X)$, taková že $[f] * [f^{-1}] = [e_{f(0)}]$, $[f^{-1}] * [f] = [e_{f(1)}]$

iii) Asociativita

Pro každou trojici křivek $f, g, h \in Top(I,X)$ platí:

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$$

Definice: Prostor smyček s počátkem v bodě x_0 *

Nechť $x_0 \in X$ je libovolný bod.

Prostorem smyček s počátkem v bodě x_0 myslíme množinu $\Omega(X, x_0) \subset Top(I,X)$ definovanou jako:

$$\Omega(X, x_0) := \{ f \in Top(I,X) \mid f(0) = f(1) = x_0 \}$$

Definice: Fundamentální grupa *

Fundamentální grupou $\pi_1(X, x_0)$ prostoru X v bodě x_0 myslíme množinu tříd homotopie smyček v $\Omega(X, x_0)$, tedy

$$\pi_1(X, x_0) = \{ [f] \mid f \in \Omega(X, x_0) \} \equiv \Omega(X, x_0) / \simeq$$

Tvrzení: *
Fundamentální grupa je grupa (s operací *).

Tvrzení: *
Nechť x_0 a y_0 jsou dva body prostoru X ležící v jedné komponentě souvislosti.
Potom existuje isomorfismus grup $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(X, y_0)$.

Definice: Jednoduše souvislý prostor *
Nechť X je lineárně souvislý topologický prostor.
Řekneme, že X je jednoduše souvislý, jestliže jeho fundamentální grupa je triviální.

Tvrzení: *
Topologický prostor X je jednoduše souvislý, jestliže pro každé $x, y \in X$ existuje právě jedna homotopická třída h, že:
i) $h(0) = x$
ii) $h(1) = y$

Fundamentální grupa kružnice

Věta: Fundamentální grupa kružnice *
$\pi_1(S_1^1)$ je nekonečná cyklická grupa generovaná třídou homotopie smyčky $\omega \in \Omega(S_1^1, (1,0))$, kde $\omega(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Definice: (Stejnoměrné) nakrytí * ?
Nechť X je topologický prostor.
Nakrytí X je topologický prostor $\tilde{X}$ a $p \in Top(\tilde{X}, X)$, takové, že pro každý bod $x_0 \in X$ existuje jeho okolí $U \subset X$, takové, že $p^{-1}(U)$ je disjunktní sjednocení otevřených množin, kde každou z nich p zobrazuje homeomorfně na U.

Říkáme, že U je stejnoměrně nakryté.

Tvrzení:
Nechť ~~$\tilde{X}$~~ $p: \tilde{X} \to X$ je nakrytí, potom platí:
i) Pro každou křivku $f \in Top(I, X)$ s počátkem v bodě $x_0 \in X$ a každé $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existuje unikátní zdvih $\tilde{f} \in Top(I, \tilde{X})$ s počátkem v bodě $\tilde{x}_0$.

ii) Je-li H homotopie křivek s počátkem v bodě x_0, existuje unikátní homotopie $\tilde{H}$ příslušných zdvihů s počátkem v $\tilde{x}_0$.

Lemma:
Pro každé zobrazení $F \in Top(Y \times I, X)$ a $\tilde{F} \in Top(Y \times \{0\}, \tilde{X})$, které je zdvihem $F|_{Y \times \{0\}} \in Top(Y \times \{0\}, X)$, tj. $p \circ \tilde{F} = F|_{Y \times \{0\}}$ existuje unikátní zdvih celého F.
Tj.: $\tilde{F} \in Top(Y \times I, \tilde{X})$, $p \circ \tilde{F} = F$

Věta: Základní věta algebry *

Každý nekonstantní polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

Věta: Brouwerova věta o pevném bodě v dimenzi 2 *

Nechť $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřený jednotkový disk, tj.: $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$. Potom pro každé $f \in Top(D^2, D^2)$ existuje $x_0 \in D^2$, tak že $f(x_0) = x_0$.

Indukované zobrazení a homotopická ekvivalence

Tvrzení: *

Nechť $\varphi \in Top(X,Y)$ je spojité zobrazení.
Potom předpisem
$$\varphi_*[f] := [\varphi \circ f],$$
pro všechna $[f] \in \pi_1(X,x_0)$ definujeme homomorfismus grup $\varphi_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,\varphi(x_0))$.

Pokud $\psi \in Top(Y;Z)$, platí pravidla
i) $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$
ii) $\mathbb{I}_* = \mathbb{I}$
iii) Je-li φ homeomorfismus, je φ_* isomorfismus fundamentálních grup.

Věta: Vícerozměrné sféry jsou jednoduše souvislé *
Pro každé $n \geq 2$ je $\pi_1(S^n) = \{e\}$.

Lemma: *
Pro libovolné dva topologické prostory je $\pi_1(X \times Y)$ isomorfní $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ pokud-li X a Y jsou křivkově souvislé!

Lemma:
Nechť X je sjednocení kolekce otevřených podmnožin A_α, kde každá z nich obsahuje x_0 a každý průnik $A_\alpha \cap A_\beta$ je křivkově souvislý.
Potom každá smyčka v $\Omega(X,x_0)$ je homotopická součinu smyček, kde každá z nich je celá obsažena v nějakém A_α.

Důsledek: *

Prostory $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^n$ jsou homeomorfní pouze pro $n=2$.

Tvrzení: *

Nechť $r \in Top(X,A)$ je retrakce, $A \subset X$.
Potom inkluze $i \in Top(A,X)$ indukuje monomorfismus
$i_* : \pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ pro všechny $x_0 \in A$.
Je-li r deformační retrakt je zobrazení i_* isomorfismus.

Věta: *

Nechť X a Y jsou libovolné topologické prostory a $\varphi : X \to Y$ je homotopická ekvivalence.
Potom $\varphi_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,\varphi(x_0))$ je isomorfismus.

Lemma:

Nechť $H : X \times I \to Y$ je homotopie zobrazení $f_0 := H(\cdot,0)$, $f_1 := H(\cdot,1)$.
Definujme křivku $h \in Top(I,Y)$ jako obraz bodu x_0 homotopií H,
tj.: $h(t) := H(x_0,t)$.
Potom následující diagram je komutativní:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, f_1(x_0)) \arrow[d, "\beta_h"] \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "f_{1*}"] \arrow[r, "f_{0*}"'] & \pi_1(Y, f_0(x_0))
\end{tikzcd},$$

kde β_h je isomorfismus generovaný křivkou h.

Jazyk kategorií

Poznámka: Teorie kategorií *

- Základem každé kategorie $\mathcal{C}$ je třída jejích objektů $Ob(\mathcal{C})$.
  Třídou se myslí abstraktní pojem z teorie množin, nahrazující problematický pojem „množina".
  Například pro $\mathcal{C} := Set$ je $Ob(Set)$ třída všech množin.
  Notace se často zjednodušuje a píše se pouze $Ob(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

- Pro každé dva objekty $a, b \in Ob(\mathcal{C})$ existuje třída morfismů $\mathcal{C}(a,b)$.
  To už obvykle bývá obvyklá množina.
  Například pro každé $A, B \in Ob(Set)$ je $Set(A,B)$ množina všech zobrazení $f : A \to B$.

- Pro každé tři objekty $a, b, c \in Ob(\mathcal{C})$ existuje operace skládání $*$, zobrazení $* : \mathcal{C}(a,b) \times \mathcal{C}(b,c) \to \mathcal{C}(a,c)$.
  Obvykle se značí $*(f,g) \equiv g * f$.

- Pro každý objekt $a \in Ob(\mathcal{C})$ existuje významný morfismus $\mathbb{I}_a \in \mathcal{C}(a,a)$, kterému se říká identita v a.

- Naloží se několik axiomů, které zajistí, že operace skládání je asociativní operace a identity fungují jako identity.

Příklad: *

- Nejdůležitějším příkladem kategorie pro algebraickou topologii je $\underline{\mathbf{Top}_*}$, kategorie topologických prostorů s vyznačeným bodem.

Objekty $Ob(\mathbf{Top}_*)$ jsou dvojice (X, x_0), kde X je topologický prostor a $x_0 \in X$ jeho vyznačený bod.
Pro každé (X, x_0) a (Y, y_0) definujeme množinu morfismů jako

$$\mathbf{Top}((X, x_0), (Y, y_0)) := \{ f \in \mathbf{Top}(X, Y) \mid f(x_0) = y_0 \}.$$

Operace $*$ je zavedena jako skládání spojitých zobrazení.

- Kategorií grup $\underline{\mathbf{Grp}}$ myslíme kategorii, jejímiž objekty je třída všech grup a morfismy jsou grupové homomorfismy.

- Každý graf $G = (V, E)$ definuje kategorii C.
Vezmeme $Ob(C) := V$ a pro každé $v, w \in Ob(C)$ definujeme $C(v, v')$ jako množinu všech hranových cest z v do v'.
Potom $C(v, v)$ jsou přesně cykly v grafu G a jednotkovým prvkem je triviální cyklus (prázdná hranová cesta).
Skládání je napojování hranových cest.

- V obecné kategorii nemusí existovat „inverzní šipka".
Pokud pro každý morfismus $f \in C(a, b)$ existuje $f^{-1} \in C(b, a)$, takový, že $f * f^{-1} = \mathbb{1}_b$ a $f^{-1} * f = \mathbb{1}_a$, nazveme tuto kategorii grupoidem

V předchozích kapitolách jsme zkonstruovali fundamentální grupoid $\Pi_1(X)$ prostoru X, kde $Ob(\Pi_1(X)) = X$ a pro každou dvojici x, y máme

$$\Pi_1(X)(x,y) = \{[f] \mid f \in Top(I,X);\ f(0)=x \wedge f(1)=y\},$$

Skládáním je indukované napojování křivek, identity jsou třídy konstantních smyček a máme $\Pi_1(X)(x,y) = \pi_1(X,x)$, pro všechna $x \in X$.

Definice: Funktor *

Nechť C a D jsou dvě kategorie.
Funktor $F : C \rightsquigarrow D$ je následující kombinace:

i) Zobrazení na objektech, tj. přiřazení $Ob(C) \ni a \mapsto F(a) \in Ob(D)$.

ii) Zobrazení na morfismech, pro každé $f \in C(a,b)$ máme morfismus $f_* \in D(F(a), F(b))$.

iii) Zobrazení na morfismech respektuje skládání v obou kategoriích, tj. platí:

$$(g * f)_* = g_* * f_*,$$

$$(\mathbb{1}_a)_* = \mathbb{1}_{F(a)},$$

pro všechny $f \in C(a,b)$, $g \in C(b,c)$ a všechny objekty $a, b, c \in Ob(C)$.

Příklad: *

Nechť $C = Top$ a $D = Set$. Každý topologický prostor je množina a spojité zobrazení je zobrazení množin. Na to se můžeme dívat jako na funktor $\square : Top \rightsquigarrow Set$, kterému se říká zapomínající funktor

Tvrzení: *

Fundamentální grupu lze chápat jako funktor z Top_* do Grp.

Homologie *

Fundamentální grupa je užitečný nástroj. Ve své podstatě však pokrývá pouze 1-rozměrné objekty - spojité smyčky. Intuitivně tak tušíme, že není vhodná k analýze „vícerozměrných" topologických prostorů. Již jsme například ukázali, že pro $n \geq 2$ je $\pi_1(S^n) = \{e\}$, a tedy navzájem nerozlišíme vícerozměrné sféry. Ze stejného důvodu nerozeznáme (jako topologické prostory) vektorové prostory různé dimenze.

Ideu fundamentální grupy lze snadno rozšířit - prostor smyček můžeme ztotožnit s prostorem $\underline{Top_*((S^1,*),(X,x_0))}$ a definujeme $\pi_1(X,x_0)$ jako homotopické třídy těchto zobrazení.

Vyšší homotopické grupy $\pi_n(X,x_0)$ lze pak definovat jako třídy homotopie zobrazení v $\underline{Top_*((S^n,*),(X,x_0))}$.
Problém je však jejich skutečný výpočet.

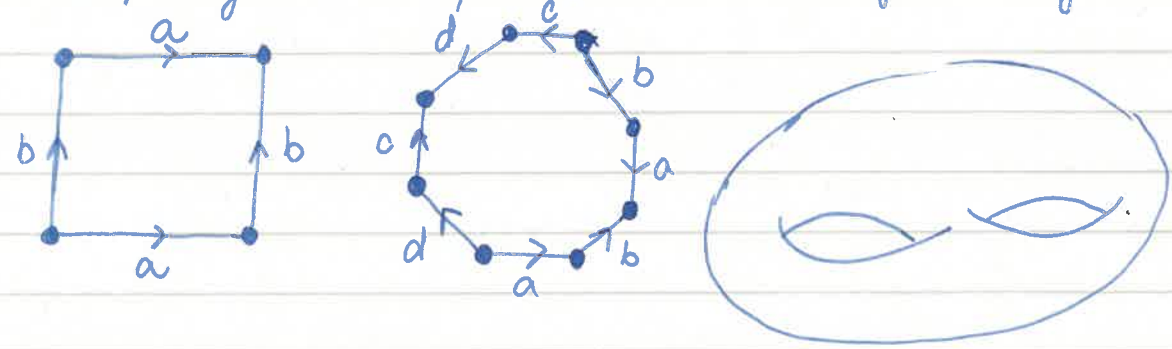
Například $\pi_s(S^n)$ se obecně zná jen pro $s \leq n$. Pro $s > n$ existují jen tabulky pro speciální případy. Obecná formulka neexistuje.

Je proto potřeba vyvolat výpočetně jednodušší způsoby.
V této kapitole si ukážeme metodu, která využívá toho, že spoustu známých topologických prostorů lze „slepit" z konečně mnoha elementárních objektů jako jsou úsečky, trojúhelníky, čtyřstěny atd.

Způsobem, jakým jsou slepeny lze zachytit algebraicky, pomocí tzv. homologických grup.

Celulární komplexy *

Anglicky „cell complexes", též CW komplexy.
Nejprve si ukažme jednoduchý příklad konstrukce toru $T^2 \cong S^1 \times S^1$.
Ten lze psát jako čtverec, ve kterém identifikujeme hrany:



Definice: n-cely, n-kostra, celulární komplex *

Uvažujme následující induktivní sekvenci kroků

i) Začneme s diskrétní množinou X^0, jejíž body považujeme za 0-cely.

ii) Vyrobíme tzv. n-kostru X^n z X^{n-1} přilepením množiny n-cel e^n_α pomocí spojitých zobrazení $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$.
Přesněji, X^n je faktorprostor disjunktního sjednocení $X^{n-1} \sqcup_\alpha D^n_\alpha$ množiny X^{n-1} s kolekcí n-rozměrných disků D^n_α, kde každé $x \in \partial D^n_\alpha \simeq S^{n-1}$ identifikujeme s $\varphi_\alpha(x) \in X^{n-1}$, t.j. $x \sim \varphi_\alpha(x)$.
Množinově tedy $X^n = X^{n-1} \sqcup_\alpha e^n_\alpha$, kde každá n-cela e^n_α je otevřený disk (n-rozměrný), na který se faktor-zobrazením homeomorfně zobrazí $D^n_\alpha \setminus \partial D^n_\alpha$.

iii) Definujeme $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$, kde X je vybaveno tzv. slabou topologií, kde $A \subset X$ je otevřená (resp. uzavřená), je-li $A \cap X^n$ otevřená (uzavřená) pro každé $n \geq 0$.

Takto zkonstruovaný topologický prostor X se nazývá celulární komplex, nebo také CW komplex.
Je-li $X = X^n$ pro nějaké $n \geq 0$, říkáme, že X je konečně rozměrný a nejmenší takové n je jeho dimenze.

Příklad: *

Vezměme $X^0 = \{e^0\}$ tvořený jedním bodem, tj. máme právě jednu 0-celu. Poté nebudeme mít žádné n-cely pro $1 \leq n \leq k-1$.
Pak budeme uvažovat právě jednu k-celu e^k a příslušné zobrazení $\varphi: S^{k-1} \to X^{k-1} = \{e^0\}$ musí být logicky konstantní zobrazení $\varphi(x) = e^0$ pro všechny $x \in S^{k-1}$. Tedy

$$X^k = (\{e^0\} \sqcup D^k)/\approx,$$

kde ztotožníme ∂D^k s bodem e^0. Snadno nahlédneme, že $X^k = e^k \simeq S^k$, a to včetně topologie. Další cely nepřidáváme a tedy $X = X^k = S^k$.
Vidíme, že vícerozměrné sféry lze psát jako celulární komplexy

Příklad: *

Uvažujme topologický prostor $\mathbb{R}P^n$, prostor přímek skrz počátek v $\mathbb{R}^{n+1}$.
$\mathbb{R}P^n := \{\mathbb{R}x \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}$.
Topologicky se zavede jako faktorprostor $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ relací ekvivalence $\lambda x \sim x$ pro nějaké nenulové $\lambda \in \mathbb{R}$, nebo zcela ekvivalentně jako faktorprostor S^n identifikací antipodálních bodů, x a $-x$.

To je ale totéž jako uvažovat pouze (uzavřenou) horní hemisféru $S^n_+ := \{x \in S^n \mid x^1 \geq 0\}$, která je homeomorfní disku D^n.

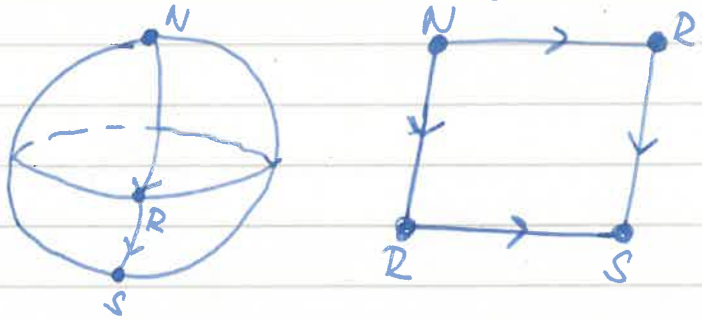
Poznámka: *

Jeden topologický prostor může mít mnoho struktur celulárních komplexů. Uvažujme například následující identifikaci prostoru $\mathbb{RP}^2$

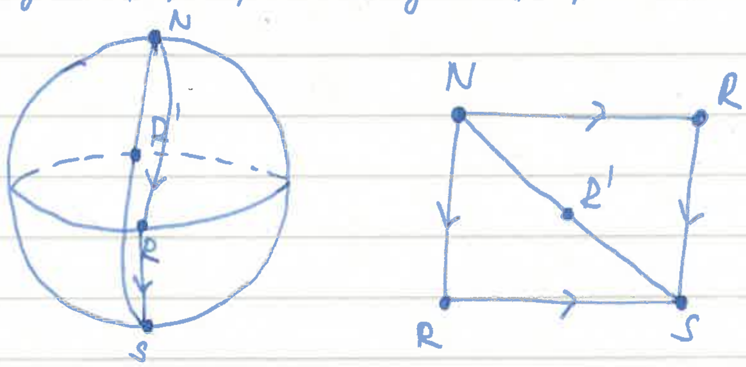
$\mathbb{RP}^2 = S^2 \setminus \{x \sim -x\}$.

Nejprve si na sféře zvolme trojici bodů $\{N,S,R\}$, kde N a S jsou póly a R libovolný bod na rovníku.

Potom S^2 můžeme interpretovat jako čtverec s identifikací:



Obrazem trojice bodů (N,S,R) vzhledem k antipodálnímu zobrazení je (S,N,R'), kde R' je bod „v protinožci" od R.



Potom trojúhelník pod úhlopříčkou odpovídá hemisféře na východ od R.

Ke každé n-cele e^n_α můžeme přiřadit její charakteristické zobrazení $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$ definované jako rozšíření ~~φ_α~~
$\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1} \subset X$.

Přesněji můžeme Φ_α definovat komutativním diagramem

$$\begin{tikzcd} D^n_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend right, "\Phi_\alpha"'] & X^{n-1} \sqcup_\alpha D^n_\alpha \arrow[r, "q"] & X^n \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

kde q je faktor-zobrazení definující X^n, ostatní šipky jsou inkluze. Snadno se ukáže, že na hranici ∂D^n_α je to opravdu φ_α, a zobrazuje $int(D^n_\alpha) = e^n_\alpha$ na jeho homeomorfní kopii v X^n.

Poznámka: *

Popis topologických prostorů pomocí celulárních komplexů umí být velmi užitečným nástrojem. Zejména proto, že se chová velmi příznivě vzhledem k obvyklým operacím na topologických prostorech.

Definice: Podkomplex *

Podkomplex A celulárního komplexu je podmnožina, která je sjednocením cel X, taková že každá cela z A má svůj uzávěr obsažený v A a A samo o sobě je tím pádem celulárním komplexem, jehož topologie je identická jako podmnožinová v $A \subset X$. Dvojice (X, A) se nazývá CW pár.

Poznámka: *

Nyní se dá ukázat, že platí následující:

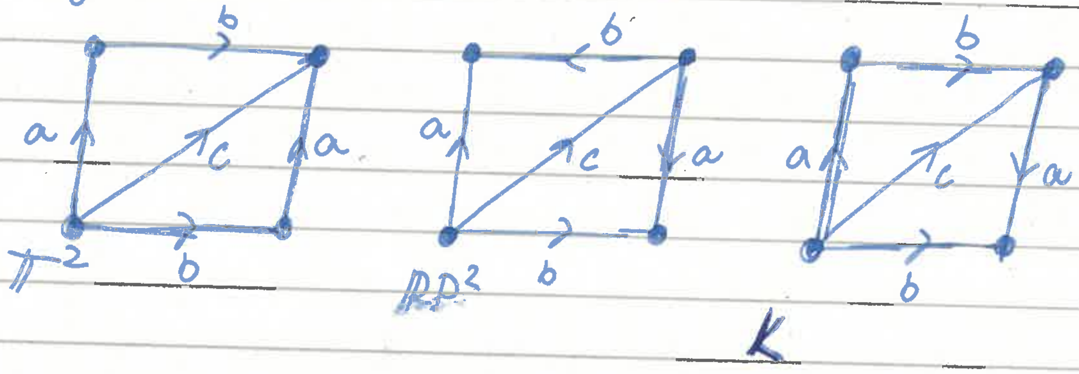
i) Jsou-li X a Y celulární komplexy, je i $X \times Y$ celulární komplexy. Mají-li X a Y spočetně mnoho cel, sedí to i topologicky.

ii) Pro každý CW pár (X, A) je i kvocient X/A celulární komplex, jehož cely jsou cely doplňku $X \setminus A$ a jedna nová 0-cela odpovídající obrazu množiny A v X/A.
Uděláme-li například v příkladu výše kvocient 1-kostru $X^1 \subset X$, zbude nám 2-cela e^2 přidělaná na jednu 0-celu, tj. topologický prostor S^2.

iii) Velice důležitou operací v algebraické topologii je suspenze $S(X)$ prostoru X, definovaná jako kvocient „válce" $X \times I$ relací ekvivalence $\sim$, definované jako $(x,0) \sim (x',0)$ a $(x,1) \sim (x',1)$ pro všechny $x, x' \in X$.
Tedy $S(X) = X/\sim$ s obvyklou topologií.

Δ-komplexy *

Jak ukazuje následující obrázek, torus $\mathbb{T}^2$, projektivní rovinu $\mathbb{R}P^2$ i Kleinovu láhev K lze psát (kreslit) jako sjednocení trojúhelníků s identifikovanými stěnami:



Snadno lze nalézt podobné rozdělení po libovolný pravidelný n-úhelník. Každou orientovanou plochu s genusem g lze tedy tímto způsobem tzv. triangulovat.

Idea Δ-komplexů je zobecnit tento náhled pro libovolné dimenze. Nejprve je potřeba zavést n-rozměrný analog trojúhelníku. Uvažujme afinně nezávislý soubor $n+1$ vektorů $(v_0,\dots,v_n)$ v prostoru $\mathbb{R}^m$, tj.: $(v_1-v_0,\dots,v_n-v_0)$ je lineárně nezávislý soubor v $\mathbb{R}^m$.
Potom *n-simplex* je *konvexní obal* souboru $(v_0,\dots,v_n)$.

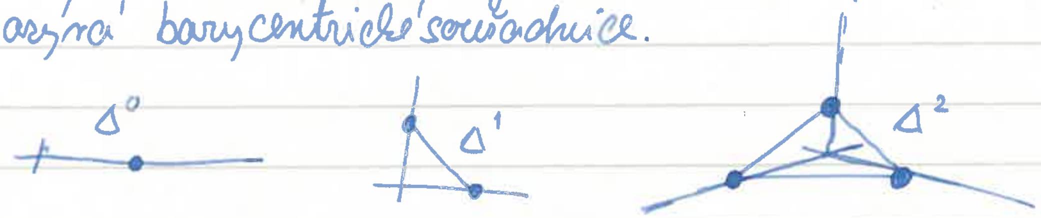
Vektory v_i se nazývají vrcholy simplexu a samotný simplex budeme značit jako $[v_0,\dots,v_n]$.
Je důležité, že uvažujeme vektory jako soubor, tj. včetně pořadí!

Příklad: Standardní simplex v $\mathbb{R}^{n+1}$ *

Modelovým příkladem je standardní simplex v $\mathbb{R}^{n+1}$, definovaný jako

$$\Delta^n := \{(t_0,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \ge 0\},$$

tj.: $\Delta^n = [e_0,\dots,e_n]$, kde $(e_i)_{i=0}^{n}$ je standardní báze $\mathbb{R}^{n+1}$! Každý simplex $[v_0,\dots,v_n]$ je homeomorfní Δ^n, kde homeomorfismus definovaný jako $(t_0,\dots,t_n)\mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$ se nazývá barycentrické souřadnice.



Z daného n-simplexu $[v_0,\dots,v_n]$ můžeme „vymazat" vrchol a dostaneme $(n-1)$-simplex tvořený zbývajícími vrcholy t.j.: $[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$ nazývaný stěna simplexu protilehlá vrcholu v_i. Pořadí vrcholů stěny, případně libovolného podsimplexu (konvexní obal na podmnožině jeho vrcholů) je určováno jejich pořadím v původním souboru.
Máme tedy například orientaci hran, 1-simplexů ve tvaru $[v_i,v_j]$ pro $0\le i<j\le n$.

Sjednocení stěn standardního n-simplexu se nazývá hranice Δ^n, značíme $\partial\Delta^n$.
Otevřený n simplex $\mathring{\Delta}^n$ je definovaný jako vnitřek (topologický) n-simplexu, tj.: $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$.
Formalizace a zároveň zobecnění pojmu triangulace skrývá následující definice:

Definice: Δ-komplex na prostoru X *

Struktura Δ-komplexu na prostoru X je kolekce zobrazení $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$, kde n závisí na indexu α, takových že platí následující:

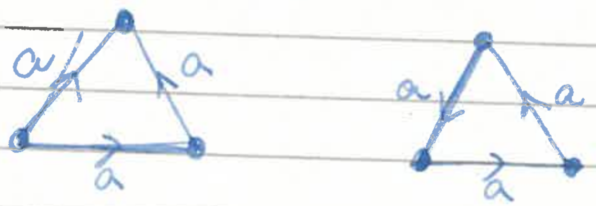
i) Restrikce $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ je injektivní a každý bod X je v oboru právě jedné této restrikce.

ii) Restrikce $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ na libovolnou hranu dává jiné zobrazení $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$ z kolekce.
Striktně vzato musíme používat homeomorfismus, který ztotožňuje hranu Δ^n se standardním $(n-1)$-simplexem Δ^{n-1} a zachovává pořadí vrcholů.

iii) Množina $A \subset X$ je otevřená, právě tehdy když její vzor $\sigma_\alpha^{-1}(A) \subset \Delta^n$ je množina otevřená v Δ^n pro každé ze zobrazení σ_α.

Příklad: *

První z obrázků představuje jednoduchý Δ-komplex nazývaný klouboučník klobouk (dunce hat). Má jeden 0-simplex, jeden 1-simplex a jeden 2-simplex.



Druhý obrázek vypadá zdánlivě jako jednoduchý Δ-komplex, ale ve skutečnosti jím není.
(čtyři 0-simplexy, deset 1-simplexů, sedm 2-simplexů)

Simpliciální homologie *

Definujeme $\Delta_n(X)$ jako volnou abelovskou grupu generovanou zobrazeními $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$. Každý element $\Delta_n(X)$ je tedy formální lineární kombinace $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, kde $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ jsou celočíselné koeficienty a jen konečně mnoho z nich je nenulových.

Grupovou operaci budeme psát v aditivní notaci:

$$\left(\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha\right) + \left(\sum_\alpha m_\alpha \sigma_\alpha\right) := \sum_\alpha (n_\alpha + m_\alpha)\sigma_\alpha .$$

Inverze a jednotka jsou zřejmé. $\Delta_n(X)$ se nazývá prostor n-řetězců.

Nechť $\Delta^n = [0, 1, \dots, n]$. Standardní n-simplex má $(n+1)$ stěn, které značíme jako $\Delta^n_{(i)} := [0, \dots, \hat{i}, \dots, n]$, kde jsme v $\Delta^n_{(i)}$ vynechali i-tý vrchol.

Z definice je restrikce každého σ_α na $\Delta^n_{(i)}$ nějaký $(n-1)$-simplex $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$. Má tedy dobrý smysl definovat operátor hranice $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ pomocí jeho hodnoty na generátory

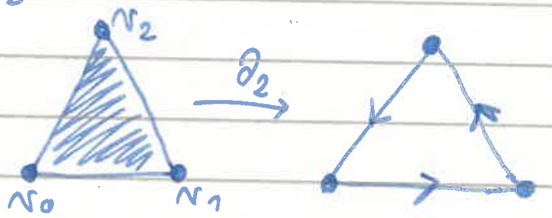
$$\partial_n \sigma_\alpha = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(i)}}$$

Poznámka: *

Operátor hranice si lze vizualizovat následovně:
Každý simplex $\Delta^n_\alpha = \sigma_\alpha(\Delta^n)$ je tvořený vrcholy $(v_0, \dots, v_n)$, tj: $\Delta^n_\alpha = [v_0, \dots, v_n]$. Potom ~~každý~~ element $\partial_n \sigma_\alpha \in \Delta_{n-1}(X)$ je celočíselná (formální) kombinace zobrazení, jejichž obrazy jsou právě stěny $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ simplexu Δ^n_α.
Můžeme tedy psát $\partial_n [v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$.

Příklad: *

$\partial_2 [v_0, v_1, v_2]$:



Tvrzení: *

Pro každý Δ-komplex X platí: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
Zavádí se konvence $\Delta_n(X) = 0$ pro $n < 0$.
Jinými slovy $Im(\partial_n) \subset ker(\partial_{n-1})$.

Definice: Řetězcový komplex, homologie *

Nechť $(C_n)_{n \geq 0}$ je posloupnost abelovských grup společně s homomorfismy $(\partial_n)_{n \geq 0}$, kde $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ splňují $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
Tato struktura se nazývá <u>řetězcový komplex</u>, značíme $(C_\bullet, \partial_\bullet)$

Grupě C_n se říká <u>n-řetězce</u>, ta má dvě významné podgrupy:
Podgrupa <u>n-cyklů $Z_n := ker(\partial_n)$</u> a podgrupa <u>n-hranic $B_n := Im(\partial_{n+1})$</u>.
<u>n-tá grupa homologie $H_n := Z_n / B_n$</u>.
Elementy H_n se nazývají <u>homologické třídy</u>.

Tvrzení: *

Nechť X je Δ-komplex.
Potom $C_n = \Delta_n(X)$ spolu s operátorem hranice tvoří řetězcový komplex. Příslušnou homologickou grupu značíme $H_n^\Delta(X)$ a nazýváme n-tou simpliciální grupou homologie

Poznámka: *

Všimněte si, že je-li v X maximální dimense simplexů n, máme $B_n = 0$ a tedy $H_n^\Delta(X) = Z_n$.
Zřejmě také $H_i^\Delta(X) = 0$, pro $i > n$.
Podobně $Z_0 = C_0$ a tedy $H_0^\Delta = \Delta_0(X)/B_0$.

Příklad: *

Uvažujme jednoduchý Δ-simplex definovaný jako na obrázku:

Je tvořený jedním 0-simplexem $v = \sigma_v(\Delta^0)$ a jedním 1-simplexem $e = \sigma_e(\Delta^1)$. Máme $\Delta_0(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_v\}$ a $\Delta_1(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_e\}$.
Operátor hranice $\partial_1 : \Delta_1(X) \to \Delta_0(X)$ má tvar

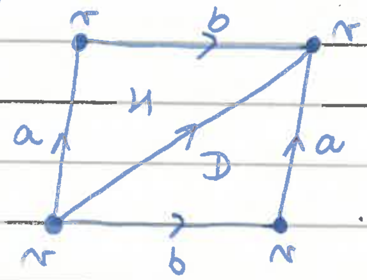
$$\partial_1(\sigma_e) = \sigma_e|_{\Delta_0^1} - \sigma_e|_{\Delta_1^1} = \sigma_v - \sigma_v = 0$$

Odtud vidíme, že $H_1^\Delta(X) = Z_1 = \Delta_1(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_e\} \simeq \mathbb{Z}$.
Zároveň $B_0 = 0$ a tedy $H_0^\Delta(X) = \Delta_0(X)/B_0 = \Delta_0(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_v\} \simeq \mathbb{Z}$

$$\rightarrow H_n^\Delta(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \in \{0,1\} \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

Příklad: *

Uvažujme torus T^2 s následující strukturou Δ-komplexu:



Ztotožníme zobrazení σ s jejich obrazy v X.
Máme tedy $\Delta_0(T^2) = \mathbb{Z}\{v\}$, $\Delta_1(T^2) = \mathbb{Z}\{a,b,c\}$, $\Delta_2(T^2) = \{U, D\}$.
Začneme operátorem hranice, máme:

$$\partial_2 U = U|_{\Delta_0^2} - U|_{\Delta_1^2} + U|_{\Delta_2^2}.$$

Ale vrcholy trojúhelníku U jsou obrazem vrcholů Δ^2 jako na obrázku v příkladu 2.2.3. Odtud

$$\partial_2 U = b - c + a,$$
$$\partial_2 D = a - c + b,$$

Protože všechny 1-simplexy končí na stejném vrcholu, 0-simplexu 'v', máme zřejmě $\partial_1 = 0$. Podgrupy cyklů:

$$\partial_2(U - D) = 0 \to Z_2 = \mathbb{Z}\{U-D\} \cong \mathbb{Z}$$

$$Z_1 = \Delta_1(T^2) = \mathbb{Z}\{a,b,c\}, \quad Z_0 = \Delta_0(T^2) = \mathbb{Z}\{v\}$$

$$H_n^{\Delta}(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \mathbb{Z}, & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

Singulární homologie *

Definice: Singulární n-simplex, n-řetězec, operátor hranice *

Singulárním n-simplexem nazveme libovolné spojité zobrazení $\sigma : \Delta^n \to X$. Grupa singulárních n-řetězců $C_n(X)$ je volná abelovská grupa na singulárních n-simplexech, tedy množina konečných formálních sum $\sum n_i \sigma_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\sigma_i : \Delta^n \to X$.
Operátor hranice se definuje analogicky jako pro Δ-komplex, tedy

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{\Delta^n_{(i)}},$$

kde $\Delta^n_{(i)} \simeq \Delta^{n-1}$ je hrana standardního n-simplexu Δ^n protilehlá vrcholu n.
Analogicky platí $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ a tedy $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ tvoří řetězcový komplex.
Potom $H_n(X) = \ker(\partial_n) / \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$ se nazývá singulární n-tou grupou homologie.

Poznámka: *

Je zřejmé, že výpočet $H_n(X)$ je téměř nemožným úkolem, jelikož i pro hodně jednoduché X je $C_n(X)$ nespočetná množina.
Není vůbec zřejmé, že by $H_n(X)$ měla být nějaká hezká abelovská grupa typu $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{Z}_n$.
Než si ukážeme nejdůležitější vlastnost singulární homologie, zavedeme si následující pojem.

Definice: Řetězcové zobrazení, Kategorie řetězcových komplexů *

Nechť $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ a $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ jsou dva řetězcové komplexy. Homomorfismus $\varphi: C_\bullet \to C'_\bullet$ se nazývá řetězcové zobrazení, jestliže zachovává stupeň, tj.: $\varphi(C_n) \subset C'_n$ a komutuje s operátory hranice, tj.: $\partial'_n \circ \varphi = \varphi \circ \partial_n$, $\forall n \geq 0$.

Snadno se rozmyslí, že řetězcové komplexy společně s řetězcovými zobrazeními tvoří kategorii řetězcových komplexů Ch.

Lemma: *

Přiřazení $(C_\bullet, \partial_\bullet) \mapsto H_\bullet$ je funktor z Ch do kategorie abelovských grup Ab.

Lemma: *

Přiřazení $X \mapsto H_\bullet(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n(X)$ je funktor z kategorie Top do Ab.

Důsledek: *

Je-li $\varphi \in Top(X,Y)$ homeomorfismus, je $\varphi_*: H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$ isomorfismus abelovských grup. Singulární homologie je tedy topologický invariant.

Lemma: *

Každý topologický prostor je disjunktním sjednocením svých komponent křivkové souvislosti, $X = \coprod_\alpha X_\alpha$.

Potom $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$

Důsledek: *

Je-li $X = \coprod X_\alpha$, kde X_α jsou komponenty křivkové souvislosti X, máme $H_0(X) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$.

Nultá singulární homologie tedy „počítá" komponenty křivkové souvislosti X.

Příklad: *

Je-li X jednobodová množina, máme $H_0(X)=\mathbb{Z}$ a $H_n(X)=0, n>0$.

$$\partial_n a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_{n-1} = \Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\Big)\cdot a_{n-1} = \begin{cases} a_{n-1}, & n \text{ sudé} \\ 0, & n \text{ liché} \end{cases}$$

Poznámka: *

- Nechť X je křivkově souvislá, pak $H_1(X)$ je abelizace grupy $\pi_1(X)$.

- Pro libovolnou grupu G lze sestrojit komutátorovou podgrupu $[G,G]\subset G$, definovanou jako nejmenší podgrupu obsahující všechny komutátory $[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh$. Taková podgrupa je vždy normální, proto má smysl definovat abelizaci jako:

$$G_{Ab} = G/[G,G].$$

Snadno se ukáže, že G_{Ab} je abelovská grupa a $G\mapsto G_{Ab}$ je funktor z Grp do Ab. Toto pozorování může být užitečné:

$$\mathbb{Z}_2 = H_1^{\Delta}(\mathbb{R}P^2) \simeq H_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^2)_{Ab}.$$

Odsud hned vidíme, že $\pi_1(\mathbb{R}P)\neq\{e\}$ a proto $\mathbb{R}P^2$ není jednoduše souvislý.

Ve skutečnosti lze dokázat, že pro libovolnou topologickou křivkově souvislou varietu X je $\pi_1(X)$ automaticky abelovská a potom rovnou $\pi_1(X)\simeq H_1(X)$

Věta: *

Nechť $\varphi, \varphi' \in Top(X, Y)$ jsou homotopická zobrazení!
Potom $\varphi_* = \varphi'_*$.

Důsledek: *

Je-li $\varphi \in Top(X, Y)$ homotopická ekvivalence, φ_* je isomorfismus.

Exaktní posloupnosti a vyříznutí *

Je-li X topologický prostor a $A \subset X$ jeho uzavřená podmnožina, je přirozené se ptát, jak souvisí homologické grupy $H_n(A)$, $H_n(X \setminus A)$ a $H_n(X)$.

Definice: Augmentovaný singulární komplex, Redukovaná singulární homologie *

Pro libovolný neprázdný topologický prostor X definujeme $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ vztahem

$$\varepsilon\left(\sum n_i a_i\right) = \sum n_i .$$

Pro libovolný 1-simplex a je $\varepsilon(\partial_1 a) = \varepsilon(a|_{\Delta^1_{(0)}} - a|_{\Delta^1_{(1)}}) = 1 - 1 = 0$. Můžeme tedy uvažovat augmentovaný singulární komplex:

$$\dots \to C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 .$$

Příslušná homologie $\tilde{H}_n(X)$ se nazývá redukovaná singulární homologie. Zjevně $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ pro $n > 0$ a $\tilde{H}_{-1}(X) = 0$.
$\hat{\varepsilon}[a] = \varepsilon[a]$ je dobře definovaný epimorfismus z $H_0(X)$ do $\mathbb{Z}$ a $\tilde{H}_0(X) \subset H_0(X)$ je jeho jádro. Tedy $H_0(X) \simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Je-li $\varphi : X \to Y$ spojité zobrazení, indukované $\varphi_* : \tilde{H}_0(X) \to \tilde{H}_0(Y)$ můžeme definovat stejným způsobem, protože pokud $a \in C_0(X)$ splňuje $\varepsilon(a) = 0$, pak $\varepsilon'(\varphi \circ a) = 0$.

Singulární versus simpliciální homologie

Věta: *

Homomorfismy $H_n^\Delta(X,A) \to H_n(X,A)$ jsou isomorfismy pro libovolné n a všechny dvojice Δ-komplexů (X,A).

Lemma: O pěti isomorfismech *

Uvažujme následující diagram grup a jejich homomorfismů:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, dashed, "\gamma_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"] & A_5 \arrow[d, "\gamma_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd},$$

kde obě horizontální posloupnosti jsou exaktní a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_5$ jsou isomorfismy. Potom i γ_3 je isomorfismus.

Důsledek: *

Jako vedlejší produkt jsme ukázali, že každá konečně generovaná abelovská grupa kdykoliv má X konečně mnoho n-simplexů.

Je známá věc, že každá konečně generovaná abelovská grupa G je isomorfní

$$G \cong \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_m},$$

$q \geq 0$, $k_1, \dots, k_m > 1$, $k_i \mid k_{i+1}$.

Koeficient q se značí jako $\operatorname{rank}(G)$ a pro $G = H_n(X)$ nazývá <u>n-té Bettiho číslo prostoru X</u>

$(k_1, \dots, k_m)$ se nazývají <u>torzní koeficienty</u>.

Věta: Věta o invarianci dimense, Brouwer 1910 *

Jsou-li $U \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$, $V \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$ homeomorfní ($U \simeq V$), $n = m$.

Příklad: *

Ukažme si relativní singulární homologii páru $H_i(D^n, \partial D^n)$.

Pak $H_n(D^n, \partial D^n) = \mathbb{Z}$

$H_i(D^n, \partial D^n) = 0$, $i \neq n$.

Někdy je užitečné nalézt explicitní předpis pro n-cyklus, který ji reprezentuje.

Dvojici $(D^n, \partial D^n)$ je užitečné nahradit ekvivalentní (homeomorfní) dvojicí $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. V singulárním komplexu $C_n(\Delta^n)$ vždy máme n-simplex $\mathbb{I}_n : \Delta^n \to \Delta^n$. Z definice mají všechny ~~komplexy~~ simplexy tvořící hranici $\partial\mathbb{I}_n$ hodnoty v $\partial\Delta^n$, z čehož plyne, že $\mathbb{I}_n$ reprezentuje relativní n-cyklus v $C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, označme ho jako $\mathbb{I}_n'$.

Tvrdíme, že $[\mathbb{I}_n']$ je generátor $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Důsledek: *

Pro každý topologický prostor X a jeho libovolnou podmnožinu A dostáváme dlouhou exaktní posloupnost homologických grup

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X|A) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{q_*} H_{n-1}(X|A) \to \dots \to H_0(X|A) \to 0,$$

~~kde $\iota \in Top(A \times A$~~ , kde $\iota \in Top(A,X)$ je inkluze a q_* je indukované zobrazení $q: C_n(X) \to C_n(X,A)$.

Poznámka:

Pro $A \neq \emptyset$ můžeme úplně stejně odvodit dlouhou exaktní sekvenci redukovaných homologií, kde se ve stupni -1 přidá krátká exaktní sekvence:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \to 0 \to 0$$

Věta: o vyříznutí *

Pro libovolné množiny $Z \subset A \subset X$, kde uzávěr Z je ve vnitřku A. Potom vnoření $(X-Z, A-Z) \hookrightarrow (X,A)$ indukuje isomorfismus relativních homologických grup $H_n(X-Z, A-Z) \hookrightarrow H_n(X,A)$, $\forall n \geq 0$.

Tvrzení: *

Pro dobrý pár (X,A) zobrazení $q: (X,A) \to (X|A, A|A)$ indukuje isomorfismus grup $q_*: H_n(X,A) \to H_n(X|A, A|A) \cong \tilde{H}_n(X|A)$

Důsledek: Redukovaná homologie sfér *

Platí $\tilde{H}_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ a $\tilde{H}_i(S^n) = 0$, pro $i \neq n$

Důsledek: Brouwerova věta o pevném bodě v dimenzi n *

Každé spojité zobrazení $\varphi: D^n \to D^n$ má pevný bod.

Definice: Relativní n-řetězec/hranice/grupy homologie *

Pro libovolnou podmnožinu $A \subset X$ můžeme sestrojit faktorgrupu <u>relativních n-řetězců</u> $C_n(X,A) := C_n(X)/C_n(A)$.

Operátor <u>relativní hranice</u> $\partial_n: C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$

$H_n(X,A) = \ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ se nazývají <u>grupy relativní homologie.</u>

Označme $q: C_n(X) \to C_n(X,A)$ přirozené faktor-zobrazení z definice relativních n-řetězců. Rovněž z definice dostáváme pro každé n komutativní diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{q} & C_n(X|A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{q} & C_{n-1}(X|A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Tvrzení: Hadí lemma *?

Příklad: *

Pro křivkově souvislý topologický prostor je $\tilde{H}_0(X)=0$. Ukázali jsme totiž, že $H_0(X)=\mathbb{Z}[\sigma_{x_0}]$, kde $x_0\in X$ je libovolný fixní bod.
Potom $\hat{\varepsilon}[\sigma_{x_0}]=1$ je zjevně isomorfismus a má tedy triviální jádro $\tilde{H}_0(X)$.

Definice: Exaktní posloupnost *

Uvažujme posloupnost grup a homomorfismů

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Řekneme, že jde o exaktní posloupnost, pokud $\underline{\ker(\varphi_n)=\mathrm{Im}(\varphi_{n+1})}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Příklad: *

i) Posloupnost $0\to A\xrightarrow{\varphi} B$ je exaktní, právě tehdy když φ je injektivní.
ii) Posloupnost $A\xrightarrow{\varphi} B\to 0$ je exaktní, právě tehdy když φ je surjektivní.
iii) Posloupnost $0\to A\xrightarrow{\varphi} B\xrightarrow{\psi} C\to 0$ je exaktní, právě tehdy když φ je injektivní, ψ surjektivní a $\ker\psi=\mathrm{Im}\,\varphi$.
Tento případ se nazývá krátká exaktní posloupnost.

Věta: Dobrý pár *

Nechť X je topologický prostor, $A\subset X$ jeho uzavřená podmnožina a nechť dále A je deformační retrakt nějakého okolí $U\subset X$. Dvojice (X,A) se nazývá <u>dobrý pár</u>.
Potom existuje následující exaktní posloupnost redukovaných homologických grup

$$\cdots \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_{n-1}(X/A) \to \cdots \to \tilde{H}_0(X/A) \to 0,$$

kde $\iota\in\mathrm{Top}(A,X)$ je vnoření a $q\in\mathrm{Top}(X,X/A)$ je faktor-zobrazení.
Homomorfismus ∂ je definovaný následovně:
Pro každé $[\sigma]\in H_n(X/A)$ najdu $\hat{\sigma}:\Delta^n\to X$ splňující $q\circ\hat{\sigma}=\sigma$.
Protože $\partial\sigma=0$, bude nutně $\partial\hat{\sigma}\in C_{n-1}(A)$ a můžu definovat $\partial[\sigma]=[\partial\hat{\sigma}]$.
To, že to jde a je to a je to nezávislé na volbách je netriviální

Nějaké aplikace

Definice: stupeň f *

Nechť $f \in \mathrm{Top}(S^n, S^m)$ pro $n > 0$.
Dostáváme indukované zobrazení $f_*: H_n(S^m) \sim H_n(S^n)$.
Ukázali jsme, že $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ a tedy $f_*(\alpha) = \deg(f) \cdot \alpha$ pro libovolný generátor $\alpha \in \mathbb{Z}$ a číslo $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, které závisí pouze na f, nazýváme stupeň f. Z definice a funktoriality homologie snadno dostáváme spoustu vlastností $\deg(f)$:

i) $\deg(\mathbb{I}) = 1$, protože $\mathbb{I}_* = \mathbb{I}$

ii) $\deg(f) = 0$ kdykoliv f není surjektivní.
Je-li $x_0 \in S^n - f(S^n)$, můžeme f psát jako faktorizaci skrz zobrazení $S^n \to S^n \setminus \{x_0\} \to S^n$. Jelikož $H_n(S^n \setminus \{x_0\}) = 0$ z kontraktibility, je nutně $f_* = 0$.

iii) $\deg(fg) = \deg(f) \cdot \deg(g)$. homeomorfismus má tedy stupeň ± 1

iv) Reflexe podle jedné roviny má stupeň -1, antipodální zobrazení $(-1)^{n+1}$

v) $f \simeq g$ platí $\deg(f) = \deg(g)$. Platí i opak!

vi) Zobrazení f nemá pevné body $\Leftrightarrow$ f je homotopické antipodálnímu zobrazení.

Věta: *

Na sféře S^n existuje všude nenulové spojité vektorové pole, právě tehdy když n je liché.

Kohomologie *

V této kapitole se budeme zabývat teorií, která je duální k homologické teorii. Budeme uvažovat <u>řetězcové komplexy</u>

$$\dots C^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \xrightarrow{d_n} C^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \dots,$$

posloupnosti ~~abelovských~~ abelovských grup a jejich morfismů, přičemž platí $d_{n+1} \circ d_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
d_n se nazývá <u>operátor kohranice</u> nebo též <u>diferenciál</u>.
Zcela analogicky definujeme n-kocykly $Z^n = \ker(d_n)$
n-kohranice $B^n = \operatorname{Im}(d_{n-1})$
n-tá kohomologie $H_n = Z^n / B^n$

de-Rhamova kohomologie

Definice: de-Rhamova kohomologie *

Nechť M je hladká varieta, $\dim M = n$, $\Omega^k(M)$ je prostor hladkých k-forem.
Potom dostáváme řetězcový komplex

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0.$$

$(\Omega^\bullet(M), d)$ definuje řetězcový de-Rhamův komplex.

Podgrupa Z^n tvoří uzavřené n-formy.
B^n tvoří exaktní n-formy.

Poznámka: *

Analogicky lze uvažovat formy s kompaktním nosičem a dostaneme <u>kompaktní de-Rhamův komplex</u>.

Mayer-Vietorisova posloupnost

Tvrzení: *

Pro každé variety M a N a hladké zobrazení $\varphi: M \to N$ máme pullback diferenciálních forem $f^*: \Omega^m(M) \to \Omega^m(N)$, který komutuje s vnější derivací, $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$.
Definuje tedy řetězcové zobrazení a předpis $\varphi^*[\alpha] = [\varphi^* \alpha]$ definuje indukovaný homomorfismus kohomologických grup.
Platí

i) $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$

ii) $\mathbb{I}^* = \mathbb{I}$.

Jinými slovy, přiřazení $M \mapsto \Omega^\bullet(M)$ je kontravariantní funktor z kategorie hladkých variet $\underline{Man^\infty}$ do kategorie abelovských grup $\underline{Ab}$.

~~Difeomorfismi~~:
Důsledek: *

Difeomorfní variety mají izomorfní kohomologické grupy.

Definice: Rozklad jedničky *

Nechť $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí variety M a nechť $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ je kolekce hladkých funkcí na M, které splňují:

i) $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$, $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$

ii) Každý bod $x \in M$ má okolí, které má neprázdný průnik pouze s konečně mnoha množinami $\mathrm{supp}(\rho_\alpha)$.

iii) Pro každé $x \in M$: $\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha(x) = 1$

Dá se ukázat, že rozklad jedničky existuje pro libovolné otevřené pokrytí M.

Nyní uvažujme situaci, kde $M = U \cup V$ pro dvě otevřené podmnožiny. Dostáváme následující dvojici posloupností variet a jejich hladkých zobrazení

$$M \leftarrow U \sqcup V \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\leftleftarrows}} U \cap V,$$

kde levá šipka je kanonické surjektivní zobrazení z disjunktního zobrazení na sjednocení opravdové a ∂_0 (respektive ∂_1) je vnoření $U \cap V$ do kopie V (respektive U) v disjunktním sjednocení $U \sqcup V$. Dostáváme tedy dvojici prostorů forem s šipkami naopak:

$$\Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \underset{\partial_1^*}{\overset{\partial_0^*}{\rightrightarrows}} \Omega^\bullet(U \cap V).$$

Připomeňme, že například ∂_0^* zobrazuje dvojici $(\omega, \vartheta) \in \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$ na formu $\hat{\vartheta} \in \Omega^\bullet(U \cap V)$, která je fakticky pouze restrikcí ϑ na otevřenou podmnožinu $U \cap V$. Pomocí těchto zobrazení definujme posloupnost

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \xrightarrow{\eta} \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0,$$

kde $\boxed{\eta(\omega, \vartheta) := (\partial_0^* - \partial_1^*)(\omega, \vartheta) = \hat{\vartheta} - \hat{\omega}}$

První šipka zobrazí formu $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ na dvojici jejích restrikcí $(\omega_U, \omega_V) \in \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$.

Právě jsme dostali Mayer-Vietorisovu posloupnost.

Tvrzení:
Mayer-Vietorisova posloupnost je exaktní!

Důsledek:
Je-li $M = U \cup V$, dostáváme dlouhou exaktní posloupnost ~~kohomologií~~ kohomologií

$$\cdots \to H^n(M) \to H^n(U) \oplus H^n(V) \xrightarrow{\eta_*} H^n(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(M) \to H^{n+1}(U) \oplus H^{n+1}(V) \xrightarrow{\eta_*} H^{n+1}(U \cap V) \to \cdots$$

Spojující homomorfismus δ můžeme explicitně definovat následovně. Nechť $[\omega] \in H_n(U \cap V)$.

Máme $\omega = \eta(-\rho_V \omega, \rho_U \omega)$. Potom ale $\eta(-d(\rho_V \omega), d(\rho_U \omega)) = d\omega = 0$. To ale znamená, že existuje forma $\alpha \in \Omega^{n+1}(M)$, že $\cancel{(\alpha_U, \alpha_V)} = (\alpha_U, \alpha_V) = (-d(\rho_V \omega), d(\rho_U \omega))$. Tato forma je uzavřená a definujeme $\delta[\omega] = [\alpha]$.

Příklad: Kohomologie kružnice
Mayer-Vietoris se dá snadno použít na výpočet de Rhamovy kohomologie kružnice $H^\circ(S^1)$.

Zjevně $S^1 = U \cap V$, kde U a V jsou otevřené oblouky co se na dvou koncích kružnice překrývají.

Máme tedy $U, V \simeq \mathbb{R}$ a $U \cap V \simeq \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$. Mayer-Vietorisova posloupnost má tvar

$$0 \to H^0(S^1) \to H^0(\mathbb{R}) \oplus H^0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\eta_*} H^0(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} H^1(S^1) \to H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\eta_*} H^1(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \to 0$$

Po dosazení známých věcí tedy dostáváme posloupnost

$$0 \to H^0(S^1) \to \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \xrightarrow{r^*} \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \xrightarrow{d} H^1(S^1) \to 0$$

Už jsme si ujasnili, že $H^0(S^1) = \mathbb{R}$, protože S^1 je křivkově souvislá.

Poincarého lemma

Uvažujme následující dvojici zobrazení hladkých variet:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n,$$

kde $\pi(x,t)$ je projekce a $s(x) = (x,0)$ je nulový řez.
Na úrovni forem tedy dostáváme diagram

$$\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{s^*}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n).$$

Zjevně platí rovnost $\pi \circ s = \mathbb{I}$ a tedy i $s^* \circ \pi^* = \mathbb{I}$.
Opačně máme $(s \circ \pi)(x,t) = (x,0)$, což není identita.
Ani na úrovni forem neplatí, že $\pi^* \circ s^* = \mathbb{I}$, protože například $s^*(dt) = 0$. Na úrovni kohomologií jsme však úspěšnější:

Tvrzení:
Zobrazení $\pi^* : H^\bullet(\mathbb{R}^n) \to H^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ je isomorfismus.

Věta: Poincarého lemma
Platí následující:

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}.$$

Jinými slovy, každá uzavřená k-forma na $\mathbb{R}^n$ je exaktní (pro $k > 0$).

Důsledek:

Snadnou modifikací důkazu předchozího tvrzení zjistíme, že pro projekci $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$, kde M je libovolná hladká varieta, je zobrazení $\pi^* : H^\circ(M) \to H^\circ(M \times \mathbb{R})$ isomorfismus.

Důsledek:

Nechť $f, g : M \to N$ jsou dvě hladká homotopická zobrazení. Potom $f^* = g^*$ jako zobrazení de Rhamových kohomologií.

de Rhamova kohomologie je tedy invariantem homotopické ekvivalence. Pro každou kontraktibilní varietu M v důsledku platí $H^0(M) = \mathbb{R}$ a $H^k(M) = 0$, pro $k \neq 0$.

Příklad: (de Rhamova kohomologie sfér)

Uvažujme $M = S^n$. Napišme $M = U \cup V$, kde U a V jsou kontraktibilní a $U \cap V$ je difeomorfní $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.
Indukcí podle n dokážeme, že

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ \mathbb{R}, & k = n \\ 0, & k \notin \{0, n\} \end{cases}.$$

Pro $n \in \{0,1\}$ už máme dokázáno.
Pro $n > 1$, s použitím Mayer-Vietorisovy posloupnosti dostáváme $H^1(S^n) = 0$ a protože S^n je křivkově souvislý, máme $H^0(S^n) = \mathbb{R}$.
Pro $k > 1$ pak platí $H^k(S^n) = H^{k-1}(S^{n-1})$.
Použitím indukčního předpokladu dostáváme výsledek.

Poznámka: Poincarého lemma pro kompaktní nosiče

$$H_c(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Čechova-de Rhamova kohomologie

Definice: Dobré pokrytí

Nechť $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí n-rozměrné variety M.
Řekneme, že $\mathcal{U}$ je dobré pokrytí, je-li každý neprázdný konečný průnik $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ otevřených množin z $\mathcal{U}$ difeomorfní $\mathbb{R}^n$.

Definice: Zjemnění

Připomeňme, že pro dvě pokrytí $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$, $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ řekneme, že $\mathcal{V}$ je zjemnění $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U} < \mathcal{V}$), jestliže existuje zobrazení $\phi : J \to I$: $V_\beta \subset U_{\phi(\beta)}$.

Věta:

Nechť M je libovolná varieta.
Potom každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má zjemnění $\mathcal{V}$, které je dobrým pokrytím M.
Každá kompaktní varieta má konečné dobré pokrytí.

Tvrzení:

Má-li M konečné dobré pokrytí, je příslušná de-Rhamova kohomologie $H^\bullet(M)$ konečně rozměrná.

Nyní předpokládejme, že $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí M, kde I je spočetná a uspořádaná množina (klidně může být i konečná).

Zavedeme označení $U_{\alpha_1 \dots \alpha_k} := U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ a uvažujme (obecně nekonečnou) posloupnost inkluzí:

$$M \longleftarrow \bigsqcup U_\alpha \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\longleftleftarrows}} \bigsqcup_{\alpha_0 < \alpha_1} U_{\alpha_0 \alpha_1} \overset{\partial_0}{\underset{\partial_2}{\overset{\partial_1}{\Lleftarrow}}} \bigsqcup_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \Lleftarrow \dots ,$$

kde $\partial_i : U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \to U_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_k}$ vynechá i-tou množinu.

Funktor přiřazující de Rhamovy kořetězcové komplexy nám přiřadí opačnou posloupnost

$$\Omega^\bullet(M) \to \prod \Omega^\bullet(U_\alpha) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \overset{\partial_0}{\underset{\partial_2}{\overset{\partial_1}{\Rrightarrow}}} \dots ,$$

kde ∂_i jsou restrikce indukované značením výše.

Připomeňme, obecný element prostoru $\omega \in \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$ je posloupnost $\omega = (\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k})_{\alpha_0 < \dots < \alpha_k}$, kde $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \in \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$. Výsledek působení $\partial_i \omega$ je tedy opět posloupnost, jejíž element $(\partial_i \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}}$ má tvar $(\partial_i \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} = \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{k+1}}|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}}}$.

Definice:

Nechť $\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$ má komponenty $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \in \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$. Definujeme element $\partial \omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}})$ pomocí příslušných komponent

$$(\partial \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (\partial_i \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{k+1}}$$

Jak si operátor δ představit?
Předpokládejme, že $M = U_0 \cup U_1 \cup U_2$. Potom například $\omega \in \prod \Omega^\bullet(M)$ je trojice $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$, kde $\omega_i \in \Omega^\bullet(U_i)$.
Prostor $\prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1})$ je tvořen trojicemi $(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{12})$, kde $\omega_{ij} \in \Omega^\bullet(U_i \cap U_j)$ pro $i<j$. Potom

$$\delta(\omega)_{01} = \omega_1 - \omega_0, \quad \delta(\omega)_{02} = \omega_2 - \omega_0, \quad \delta(\omega)_{12} = \omega_2 - \omega_1$$

Lemma:
Platí rovnost $\delta^2 = 0$.

Tvrzení: Zobecněná Mayer-Vietorisova posloupnost
Pro každou varietu M a její otevřené pokrytí $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$, kde I je uspořádaná spočetná množina, dostáváme dlouhou exaktní posloupnost

$$0 \to \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{r} \prod_{\alpha_0} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

Jinými slovy, posloupnost výše je řetězcový komplex s triviální kohomologií!

Vidíme, že máme řetězcový komplex (byť s triviální kohomologií), jehož stupně tvoří násobnosti průniků okolí z pokrytí $\mathcal{U}$. Zároveň však máme přirozené stupně forem a vnější diferenciály d. Pro každé $p, q \geq 0$ tedy definujeme vektorový prostor

$$K^{p,q} = C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$$

Z definice dostáváme komutativní diagram obsahující všechny tyto prostory

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,2} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,2} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & \dots
\end{array}$$

Kolekci vektorových prostorů vybavených a dvou komutujících diferenciálů $\delta : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$
$d : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$
se říká dvojný řetězcový komplex.

Příklad $K^{p,q} = C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ se nazývá Čechův-deRhamův dvojný komplex.

Každý dvojný řetězcový komplex $(K^{p,q}, d, \delta)$ zadarmo poskytuje další řetězcovou strukturu, tzv. totální řetězcový komplex $(K^\bullet, D)$, kde:

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}, \quad D = \delta + (-1)^p d$$

Lemma:

$(K^\bullet, D)$ je řetězcový komplex, tj.: $D^2 = 0$

Výsledná kohomologie $H_D^\bullet(K)$ se nazývá totální kohomologie dvojného komplexu.

Čech-de Rhamův komplex ovšem není zcela obyčejný. Každý jeho řádek je exaktní zobecněná Mayer-Vietorisova posloupnost. To mu propůjčuje jisté neobvyklé vlastnosti. Nejprve je třeba si uvědomit, že pro každé $n \geq 0$ máme zobrazení $r: \Omega^n(M) \to C^0(\mathcal{U}, \Omega^n) = K^{0,n} \subset K^n$

Navíc pro každou n-formu ω platí

$\delta \circ r = 0$ (řetězcový komplex)

$$D(r(\omega)) = \delta(r(\omega)) + (-1)^0 d r(\omega) = 0 + r(d(\omega)).$$

komutuje s operátorem hranice

To dokazuje, že $r: \Omega^\bullet(M) \to K^\bullet$ je řetězcové zobrazení a indukuje tedy homomorfismus $r^*: H^\bullet(M) \to H_D^\bullet(K)$

Věta: Zobecněný Mayer-Vietorisův princip

Zobrazení r^* je isomorfismus.

Jinými slovy, de Rhamova kohomologie M a Čechova-de Rhamova kohomologie odpovídající libovolnému nejvýše spočetnému pokrytí $\mathcal{U}$ jsou isomorfní, $H^n(M) \cong H_D^n(C^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet))$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1(M) \arrow[r, "r"] & K^{0,1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & K^{1,1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \ldots \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[r, "r"] & K^{0,0} \arrow[r, "\delta"] & K^{1,0} \arrow[r, "\delta"] & \ldots \\
 & & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "\delta"] & \ldots \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

kde $C^p(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \ker(d) \subset K^{p,0}$ je prostor lokálně konstantních funkcí na $(p+1)$-násobných průnicích $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}$, který zdědí diferenciál δ z K^{pp} (restrikce lokálně konstantních funkcí jsou konstantní). Dostáváme tedy řetězcový komplex

$$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

Příslušná kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$ se nazývá Čechova kohomologie pokrytí $\mathcal{U}$.

Věta:

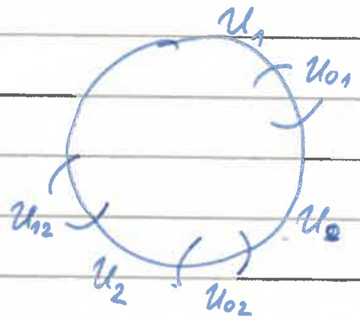
Je-li $\mathcal{U}$ dobré pokrytí, je $i: H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to H^\bullet_D(K)$ isomorfismus.

Tvrzení:

Čechova kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$ je stejná pro všechna dobrá pokrytí M.

Příklad: Dobré pokrytí S^1

Uvažujme dobré pokrytí kružnice jako na obrázku



Máme tedy pouze dva netriviální členy Čechova komplexu:

$$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 = \{(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$
$$C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 = \{(\lambda_{01},\lambda_{02},\lambda_{12}) \mid \lambda_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

Zajímá nás tedy pouze operátor $\delta : C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$
Pro $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) \in C^0(\mathcal{U},\mathbb{R})$ máme

$$(\delta\lambda)_{01} = \lambda_1 - \lambda_0, \quad (\delta\lambda)_{02} = \lambda_2 - \lambda_0, \quad (\delta\lambda)_{12} = \lambda_2 - \lambda_1$$

Snadno vidíme, že $\ker(\delta) = \{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$.
Odsud plyne $H^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Dále $\dim(H^1(\mathcal{U},\mathbb{R})) = \dim(C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}))/\mathrm{im}(\delta) = 1$

Odsud $H^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Zřejmě $H^n(\mathcal{U},\mathbb{R}) = 0$ pro $n>0$.
Dostáváme tedy

$$H^n(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & n=0 \\ \mathbb{R}, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

Důsledek: Kohomologie vektorových bundlů

Nechť $\pi: E \to M$ je libovolný vektorový bundl nad varietou M.

Potom $H^\bullet(M) \simeq H^\bullet(E)$

Kohomologie Lieových algeber

Aplikace teorie kohomologií sahají mnohem dál než do diferenciální geometrie. Ukazuje se, že představují užitečný nástroj i při studiu algebraických objektů. Příkladem nám budou kohomologie (reprezentací) Lieových algeber.

Následující definice fungují nad libovolným tělesem (pro jistotu s charakteristikou 0) a pro libovolnou (tedy i nekonečnou) dimenzi.

Definice: Chevalley-Eilenbergův řetězcový komplex

Nechť $(\mathfrak{g}, [\cdot;\cdot])$ je Lieova algebra a nechť (V,ρ) je její reprezentace.
Potom prostor k-řetězců Chevalley-Eilenbergova řetězcového komplexu $C^k(\mathfrak{g},\rho)$ definujeme jako prostor k-lineárních totálně antisymetrických zobrazení z $\mathfrak{g}$ do V.

Poznámka:

Pro konečně rozměrné $\mathfrak{g}$ můžeme ztotožnit $C^k(\mathfrak{g},\rho)$ a $\Lambda^k\mathfrak{g}^*\otimes V$

Definice: Diferenciál

Diferenciál $\Delta : C^k(\mathfrak{g},\rho) \to C^{k+1}(\mathfrak{g},\rho)$ definujeme pro $\omega\in C^k(\mathfrak{g},\rho)$:

$$\Delta(\omega)(x_1,\dots,x_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\rho(x_i)\,\omega(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{k+1}) +$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,\omega([x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{k+1})$$

Lemma:
Pro každé $k \geq 0$ a $\omega \in C^k(\mathfrak{g}, \rho)$ máme $\Delta(\omega) \in C^{k+1}(\mathfrak{g}, \rho)$.

Tvrzení:
Platí $\Delta^2 = 0$.
$(C^\bullet(\mathfrak{g}, \rho), \Delta)$ tedy tvoří řetězcový komplex.

První tři kohomologické grupy mají jednoduchou algebraickou interpretaci.

- $H^0(\mathfrak{g}, \rho) = Z^0(\mathfrak{g}, \rho) = \{v \in V \mid \rho(x) \cdot v = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\} =: V^{\mathfrak{g}}$

Prvkům $V^{\mathfrak{g}}$ se říká invarianty reprezentace ρ.
Je-li totiž ρ odvozená reprezentace $\tilde{\rho}$ (souvislé) Lieovy grupy G integrující $\mathfrak{g}$, jsou $V^{\mathfrak{g}}$ opravdu invarianty $\tilde{\rho}$.

Připomeňme, že $C^1(\mathfrak{g}, \rho) = Hom(\mathfrak{g}, V)$.
Prostor 1-kocyklů má potom tvar

$$Z^1(\mathfrak{g}, \rho) = \{\alpha \in Hom(\mathfrak{g}, V) \mid \alpha([x_1, x_2]_{\mathfrak{g}}) = \rho(x_1) \cdot \alpha(x_2) - \rho(x_2)\alpha(x_1)\}$$
$$=: Der(\mathfrak{g}, \rho).$$

Prvky $Der(\mathfrak{g}, \rho)$ se nazývají derivace $\mathfrak{g}$-modulu (V, ρ).
1-kohranice potom mají tvar

$$B^1(\mathfrak{g}, \rho) = \{\alpha \in Hom(\mathfrak{g}, V) \mid \alpha(x) = \rho(x) \cdot v \text{ pro nějaké } v \in V\} =$$
$$=: IDer(\mathfrak{g}, \rho)$$

a nazývají vnitřní derivace $\mathfrak{g}$-modulu (V, ρ).

První Chevalley-Eilenbergova kohomologie $H^1(\mathfrak{g},\rho)$ tedy měří kolik derivací není vnitřních:

$$H^1(\mathfrak{g},\rho) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g},\rho)/\mathrm{IDer}(\mathfrak{g},\rho)$$

Příklad:
Uvažujme $(V,\rho) = (\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.
Máme $H^0(\mathfrak{g},\rho) = \{y\in\mathfrak{g} \mid [x,y]_{\mathfrak{g}} = 0, \forall x\in\mathfrak{g}\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Nultá kohomologie příslušná adjungované reprezentaci je centrum Lieovy grupy

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\mathrm{ad}) = \{\alpha\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid \alpha([x_1,x_2]) = [\alpha(x_1),x_2] + [x_1,\alpha(x_2)]\}$$
$$\mathrm{IDer}(\mathfrak{g},\mathrm{ad}) = \{\alpha\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid \alpha(x) = [x,y], \text{ pro nějaké } y\in\mathfrak{g}\}$$

Definice: Abelovské rozšíření $\tilde{\mathfrak{g}}$ algebry $\mathfrak{g}$ modulem
Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a (V,ρ) její reprezentace.
Pak abelovským rozšířením $\tilde{\mathfrak{g}}$ algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V,ρ) myslíme krátkou exaktní posloupnost Lieových algeber

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r, "j"] & \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[l, dashed, bend left, "t"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "s"] & 0, \end{tikzcd}$$

přičemž V interpretujeme jako abelovskou Lieovu algebru.
Navíc musí platit vztah
$$[x, j(v)]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = j(\rho(\pi(x))\cdot v)$$

Je-li $\tilde{\mathfrak{g}}'$ jiné abelovské rozšíření $\mathfrak{g}$ stejným modulem, řekneme, že isomorfismus $\Phi: \mathrm{Hom}(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mathfrak{g}}')$ je ekvivalence abelovských rozšíření, jestliže následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathbb{1}_V"] & \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r, "j'"] & \tilde{\mathfrak{g}}' \arrow[r, "\pi'"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Rozštěpením krátké exaktní posloupnosti myslíme lineární zobrazení $s \in Hom(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}) : \pi \circ s = \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}$.

~~[illegible]~~:

~~[illegible]~~

Nějaké rozštěpení existuje pro každou posloupnost vektorových prostorů nad nekonečným tělesem. Ne nutně je však, s homomorfismus algeber. Pro každé takové, s můžeme sestrojit unikátní zobrazení $t \in Hom(\tilde{\mathfrak{g}}, V)$. splňující $\underline{\ker(t) = im(s)}$ a $\underline{t \circ j = \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}}$. Jelikož je, j monomorfismus, můžeme definovat, t vztahem

$$j(t(x)) = (\mathbb{1} - s \circ \pi)(x),$$

pro všechny $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Snadno se ověří, že, t má požadované vlastnosti.

Zobrazení $\Phi : V \oplus \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ definované vztahem $\Phi(v,y) = j(v) + s(y)$, $\forall (v,y) \in V \oplus \mathfrak{g}$, je isomorfismus vektorových prostorů. Jeho inverse je $\Phi^{-1}(x) = (t(x), \pi(x))$.

Pomocí Φ můžeme na $H = V \oplus \mathfrak{g}$ indukovat strukturu Lieovy algebry $[\cdot,\cdot]_H$. Závorka má tvar:

$$[(v,y),(v',y')]_H = (\rho(y) \cdot v' - \rho(y') \cdot v + \omega(v,v'), [y,y']_{\mathfrak{g}}).$$

kde $\omega \in C^2(\mathfrak{g},\rho)$ je definovaná vztahem

$$\omega(y,y') = \varepsilon([s(y), s(y')]_{\tilde{\mathfrak{g}}}).$$

Lieova algebra $\mathcal{H}$ je zřejmě rovněž abelovským rozšířením Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V,ρ) a $\phi \in Hom(\mathcal{H}, \tilde{\mathfrak{g}})$ je ekvivalence abelovských rozšíření.
Volbou jiného rozštěpení s' dostanu jiné abelovské rozšíření $\mathcal{H}' = V \oplus \mathfrak{g}$, které je nutně ekvivalentní $\mathcal{H}$.

Lemma:
ω je 2-kocyklus, $\omega \in Z^2(\mathfrak{g},\rho)$

Lemma:
Nechť $\mathcal{H} = V \oplus \mathfrak{g}$ a $\mathcal{H}' = V \oplus \mathfrak{g}$ jsou dvě abelovská rozšíření parametrizovaná 2-kocykly ω a ω'.
Potom jsou ekvivalentní právě tehdy, když $\omega' - \omega \in B^2(\mathfrak{g},\rho)$, neboli $[\omega] = [\omega']$ v $H^2(\mathfrak{g},\rho)$.
Jinými slovy, množina tříd ekvivalence abelovských rozšíření algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V,ρ) je bijektivní kohomologii $H^2(\mathfrak{g},\rho)$

Důsledek:
Nechť $\tilde{\mathfrak{g}}$ je abelovské rozšíření algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V,ρ).
Potom existuje rozštěpení $s \in Hom(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ takové, že $s(\mathfrak{g}) \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ je podalgebra isomorfní $\mathfrak{g}$, právě když je odpovídající kohomologická třída v $H^2(\mathfrak{g},\rho)$ triviální

Věta: (1. a 2. Whiteheadova lemma)
Je-li $\mathfrak{g}$ polojednoduchá Lieova algebra nad tělesem charakteristiky 0 a (V,ρ) její konečnorozměrná reprezentace. Potom $H^1(\mathfrak{g},\rho) = H^2(\mathfrak{g},\rho) = 0$.

Důsledek:
Všechny derivace konečnorozměrné polojednoduché algebry nad tělesem charakteristiky 0 jsou vnitřní.

Konečně, nechť G je souvislá Lieova grupa integrující (reálnou) algebru $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$.
Můžeme se ptát, zda existuje nějaká souvislost mezi de Rhamovou kohomologií G a Chevalley-Eilenbergovou kohomologií. Uvažujme podprostor $\Omega^\bullet_L(G) \subset \Omega^\bullet(G)$ levoinvariantních diferenciálních forem. Jelikož d komutuje s pullbacky, zřejmě $d: \Omega^k_L(G) \to \Omega^{k+1}_L(G)$.
Dostáváme tedy subkomplex de Rhamova komplexu tvořený levo-invariantními formami, $(\Omega^\bullet_L(G), d)$.
Příslušné kohomologie $H^\bullet_L(G)$ definují (levou) invariantní de Rhamovu kohomologii G.

Lemma:
Nechť $(\mathbb{R},0)$ je triviální reprezentace $\mathfrak{g}$ na $\mathbb{R}$.
Označme $C^\bullet(\mathfrak{g}) \equiv C^\bullet(\mathfrak{g},0)$. $H^\bullet(\mathfrak{g})$ se obvykle nazývá jednoduše kohomologie Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.

Potom existuje lineární isomorfismus $\varphi: \Omega^\bullet_L(G) \to C^\bullet(\mathfrak{g})$, který tvoří kořetězcové zobrazení, tj.: $\Delta \circ \varphi = \varphi \circ d$.

Zejména tedy $H^\bullet_L(G) \simeq H^\bullet(\mathfrak{g})$

Tvrzení:
Pro kompaktní Lieovu grupu G: $H^\bullet_L(G) \simeq H^\bullet(G)$.

Svazky a jejich Čechova kohomologie

Nechť X je libovolný topologický prostor.
Označme $Op(X)$ následující kategorii. Jejími objekty jsou otevřené podmnožiny X. Pro libovolné dva objekty $U, V \in Op(X)$ existuje právě jeden morfismus $i_V^U : V \to U$, právě tehdy když $V \subset U$.

Lze si to představit jako graf, jehož vrcholy jsou otevřené podmnožiny X a přidáme do něj orientovanou hranu (šipku), je-li jedna podmnožina obsažena v druhé.

Definice: Předsvazek
Nechť C je libovolná kategorie.
Kontravariantní funktor $\mathcal{F} : Op(X) \to C$ se nazývá <u>předsvazek</u> (presheaf) na X s hodnotami v C. Explicitně:
i) pro každé $U \in Op(X)$ máme objekt $\mathcal{F}(U) \in C$
ii) je-li $V \subset U$, existuje <u>morfismus restrikce</u> $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ v kategorii C a platí

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U, \quad \rho_U^U = \mathbb{1}_{\mathcal{F}(U)}$$

pro libovolné $W \subset V \subset U$ otevřené podmnožiny.

Příklad:
Nechť $C = Ab$ je kategorie abelovských grup, nechť $G \in Ab$ je pevně zvolená abelovská grupa. Konstantní předsvazek G_X je definovaný jako $G_X(U) := G$ pro všechny neprázdné $U \in Op(X)$ a $G_X(\emptyset) := \{0\}$.
Restrikce definujeme jako $\rho_V^U := \mathbb{1}_G$ kdykoliv $V \subset U$ a $V \neq \emptyset$
a $\rho_\emptyset^U$ jako nulové zobrazení.

Předsvazek typicky přiřazuje algebraickou strukturu (určenou výběrem C) topologickým datům (otevřeným množinám). Přičemž víme, co se děje, když si bereme menší množiny. Co ale opačná procedura - říct něco „globálně" na základě lokálních dat? Tento požadavek vede přesně na definici svazku. Předpokládáme, že C je tzv. konkrétní kategorie, tj. její objekty jsou množiny a morfismy jsou zobrazení mezi těmito množinami (s extra požadavky). Potom má totiž smysl mluvit o prvcích množiny $\mathcal{F}(U)$, které se nazývají <u>lokální řezy předsvazku $\mathcal{F}$ nad U</u>.

Definice: Svazek

Nechť $\mathcal{F}: Op(X) \to C$ je předsvazek na X s hodnotami v C. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je svazek na X s hodnotami v C, jestliže:

Nechť $U \in Op(X)$ je libovolná podmnožina a nechť $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ její libovolné pokrytí, t.j.: $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. V každém takovém případě musí platit následující dva axiomy:

i) axiom lokality: $\forall s, t \in \mathcal{F}(U): \rho^U_{U_\alpha}(s) = \rho^U_{U_\alpha}(t) \Rightarrow s = t$

ii) axiom lepení: $(s_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{F}(U): \rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)$

Potom existuje řez $s \in \mathcal{F}(U)$ splňující $\rho^U_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$, pro všechny $\alpha \in I$.

Příklad:

Nechť E je topologický prostor a $\pi : E \to X$ spojité surjektivní zobrazení. Definujme svazek $\Gamma(E,\pi)$ spojitých řezů (E,π) předpisem

$$\Gamma(E,\pi)(U) := \{ a : U \to E \mid \pi \circ a = \mathbb{1}_U,\ a \text{ je spojité} \}$$

Takto obecně máme $C = Set$. Pro $V \subset U$ definujme morfismus restrikce jako skutečnou restrikci $\rho^U_V(a) := a|_V$. Z obvyklých vlastností spojitých funkcí plyne, že platí axiomy lokality a lepení. Uvažujme nyní dva speciální případy:

i) $E = X \times \mathbb{R}$

Každý lokální řez $a : U \to X \times \mathbb{R}$ musí mít tvar $a(x) = (x, f(x))$, kde $f : U \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Dostáváme $\Gamma(E,\pi) = C^0_X$, kde C^0_X je svazek spojitých reálných funkcí na X, kde $C^0_X(U) := C^0(U)$ jsou restrikce.

Všimněte si, že v tomhle případě můžeme C vzít i třeba vektorové prostory nad $\mathbb{R}$, abelovské grupy nebo komutativní okruhy.

ii) Nechť $G \in Ab$ je fixní abelovská grupa.

Vybavme G diskrétní topologií a uvažujme opět $E = X \times G$. Spojité lokální řezy $a : U \to X \times G$ opět odpovídají spojitým zobrazením $f : U \to G$. Nechť $x \in X$. Protože množiny $(f(x)) \subset G$ je otevřená. Existuje tedy okolí $V \subset U$ bodu x, takové že $f(V) \subset (f(x))$, neboli $f(y) = f(x)$ pro všechny $y \in V$. Takovým funkcím se říká lokálně konstantní a dá se ukázat, že jsou vždycky spojité vzhledem k diskrétní topologii na G.

Dostáváme tedy svazek lokálně konstantních funkcí $\bar{G}_X$, kde

$$\bar{G}_X(U) := \{ f : U \to G \mid f \text{ je lokálně konstantní} \},$$

kde restrikce jsou restrikce. Aby došlo ke zmatení úplně všech, $\bar{G}_X$ se nazývá konstantní svazek s hodnotami v G.

Tvrzení:
Konstantní předsvazek G_X není svazek.

Nechť $\mathcal{F} : Op(X) \to Ab$ je libovolný předsvazek na X s hodnotami v kategorii abelovských grup. Předpokládejme $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$. Nechť $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí X. Budeme opět používat značení $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_k} = U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$. Tentokrát však umožníme opakování indexů. Podobně jako při konstrukci zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti máme (tentokrát vždy nekonečnou) posloupnost množin:

$$\begin{tikzcd}
X & \coprod\limits_{\alpha_0 \in I} U_{\alpha_0} \arrow[l] & \coprod\limits_{(\alpha_0,\alpha_1) \in I^2} U_{\alpha_0\alpha_1} \arrow[l, shift right, "\partial_0"'] \arrow[l, shift left, "\partial_1"] & \coprod\limits_{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \in I^3} U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \arrow[l, shift right=2, "\partial_0"'] \arrow[l, "\partial_1"] \arrow[l, shift left=2, "\partial_2"] & \cdots \arrow[l, shift right=3, "\partial_0"'] \arrow[l, shift right=1, "\partial_1"] \arrow[l, shift left=1, "\partial_2"] \arrow[l, shift left=3, "\partial_3"]
\end{tikzcd},$$

kde $\partial_i : U_{\alpha_0 \ldots \alpha_k} \to U_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_k}$. Opět umožňujeme opakování indexů! Na tuto posloupnost můžeme aplikovat kontravariantní funktor $\mathcal{F}$ a dostaneme posloupnost abelovských grup, kde $\delta_i := \mathcal{F}(\partial_i)$, a r je indukované inkluzemi U_α do X.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "r"] & \prod\limits_{\alpha_0 \in I} \mathcal{F}(U_{\alpha_0}) \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] & \prod\limits_{(\alpha_0,\alpha_1) \in I^2} \mathcal{F}(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, shift left=2, "\delta_0"] \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[r, shift right=2, "\delta_2"'] & \prod\limits_{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)} \mathcal{F}(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Abelovské grupy v této posloupnosti se nazývají grupy Čechových p-řetězců $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ příslušné předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$, tedy

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_p})$$

Podobně jako při konstrukci Mayer-Vietorisovy posloupnosti musíme nyní zkombinovat jednotlivé restrikce a definovat Čechův operátor kohranice $\partial_{\mathcal{F}} : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ jako

$$(\partial_{\mathcal{F}} \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^{i+1} \partial_i (\omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p}),$$

kde $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ jsou komponenty $\omega \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$.
Opět lze snadno ukázat, že $\partial_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

Definice: Čechova kohomologie předsvazku

Kořetězcový komplex $(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}), \partial_{\mathcal{F}})$ se nazývá Čechův kořetězcový komplex příslušný předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$.
Příslušná kohomologická grupa se značí $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ a nazývá se Čechova kohomologie příslušná předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$.

Nyní uvažujme kategorii $OpC(X)$, jejíž objekty jsou otevřená pokrytí a právě jeden morfismus $j_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, je-li $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, neboli $\mathcal{V}$ je zjemnění $\mathcal{U}$.
Všimněte si, že pro každá dvě otevřená pokrytí $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in OpC(X)$ existuje společné zjemnění $\mathcal{V} \in OpC(X)$ takové, že $\mathcal{U}, \mathcal{U}' < \mathcal{V}$.
Za povšimnutí stojí, že $OpC(X)$ není množina.

Tvrzení:
Přiřazení $\mathcal{U} \mapsto \check{H}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ definuje funktor $\check{H}(\mathcal{F}) : OpC(X) \to Ab$.

Předsvazku $\mathcal{F}$ a topologickému prostoru bychom chtěli přiřadit veličinu, která by nezávisela na konkrétním otevřeném pokrytí $\mathcal{U}$. Předpokládejme, že X je tzv. Lindelöfův prostor, kde každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má spočetné podpokrytí. Například každá hladká varieta je takový prostor. Označme jako $OpC_{\mathbb{N}}(X)$ množinu všech spočetných pokrytí X.

Definice:
Nechť X Lindelöfův prostor.
Potom Čechovou kohomologií prostoru X a předsvazku $\mathcal{F}$ nazýváme tzv. přímou limitu přes spočetná pokrytí

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U} \in OpC_{\mathbb{N}}(X)} \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$

kde abelovská grupa na pravé straně je jednoznačně (až na isomorfismus) definovaná vlastností:

i) pro každé $\mathcal{U} \in OpC_{\mathbb{N}}(X)$ máme homomorfismus $\pi_{\mathcal{U}} : \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^p(X,\mathcal{F})$
ii) je-li $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, platí $\pi_{\mathcal{V}} \circ \phi_{\tau} = \pi_{\mathcal{U}}$
iii) Je-li A libovolná Abelovská grupa a $(\tilde{\pi}_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in OpC_{\mathbb{N}}(X)}$ je kolekce zobrazení $\tilde{\pi}_{\mathcal{U}} : \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to A$ mající vlastnost (ii), existuje unikátní homomorfismus $\varphi : \check{H}^p(X,\mathcal{F}) \to A$ splňující $\varphi \circ \pi_{\mathcal{U}} = \tilde{\pi}_{\mathcal{U}}$ pro každé $\mathcal{U} \in OpC_{\mathbb{N}}(X)$. Tomuto se říká vlastnost univerzality.

Tvrzení:
Taková grupa existuje.

Definice: Čechova kohomologie
Pro $\mathcal{F} = G_X$ dostáváme klasickou Čechovu kohomologii s koeficienty v G, označujeme jednodušeji jako $\check{H}^p(X,G) := \check{H}^p(X,G_X)$.
Pro zajímavost, je-li X parakompaktní topologický prostor, máme $\check{H}^p(X,G_X) \simeq \check{H}^p(X,\overline{G_X})$.

Poznámka:
i) Je-li X hladká varieta, lze $\check{H}^p(X,\mathcal{F})$ počítat jako přímou limitu pouze přes dobrá pokrytí.

ii) Místo všech kořetězců můžeme uvažovat podkomplex $C'^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subseteq C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ alternujících kořetězců, kde kdykoliv se dva indexy opakují, dostaneme nulu a platí pravidlo

$$\omega_{\dots\alpha\dots\beta\dots} = -\omega_{\dots\beta\dots\alpha\dots}$$

Operátor $\delta_{\mathcal{F}}$ se zúží na zobrazení $\delta_{\mathcal{F}} : C'^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C'^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ a my tak můžeme spočítat kohomologii $\check{H}'^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$.
Dá se ukázat, že $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \simeq \check{H}'^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, ale vyžaduje to dost znalostí teorie abstraktních simpliciálních komplexů.

iii) Čechova kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$ pokrytí $\mathcal{U}$ (z Čechova-de Rhamova komplexu) je Čechova kohomologie pro konstantní svazek $\underline{\mathbb{R}}_M$. Jelikož jsme ukázali, že nezávisí na volbě dobrého pokrytí $\mathcal{U}$, dostáváme i) $\check{H}^\bullet(\mathcal{U},\underline{\mathbb{R}}_M) \simeq \check{H}^\bullet(M,\underline{\mathbb{R}}_M)$.
Jelikož je M parakompaktní, platí rovněž $\check{H}^\bullet(\mathcal{U},\underline{\mathbb{R}}_M) \simeq \check{H}^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$.

iv) Čechova kohomologie se přirozeně ~~studuje~~ objevuje v diferenciální geometrii.
Například hlavní fibrované prostory $\pi : P \to M$ s abelovskou strukturní grupou G jsou klasifikovány grupou $\check{H}^1(M, C^\infty_{M,G})$, kde $C^\infty_{M,G}(U) := C^\infty(U,G)$.

v) Třídy Čechovy kohomologie často měří obstrukci nějaké geometrické vlastnosti. Například pro každou varietu M existuje její první Stiefelova-Whitneyho třída, kanonicky definovaná třída v $\check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2)$. Tato třída je ~~[illegible]~~ triviální, právě tehdy když M je orientovatelná.