

Coxeterovy grupy

doc. Ing. Jiří Hrivnák, Ph.D.

19. září 2022

Úvod

- studium Coxeterových grup započato Haroldem Coxeterem (1907 – 2003) ve 30. letech 20. století
- všechny Euklidovské grupy zrcadlení jsou zároveň Coxeterovými grupami
- všechny *konečné* Coxeterovy grupy jsou Euklidovské grupy zrcadlení
- základním pojmem pro studium Euklidovských grup zrcadlení je kořenový systém
- krystalografické kořenové systémy odpovídají Weylových grupám zrcadlení
- obecnější přístup nezávislý na Lieově teorii

Reference

- [1] R. Kane, *Reflection Groups and Invariant Theory*, New York, Springer, 2001.
- [2] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **29** (1990) Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] A. Bjorner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate Texts in Mathematics, **231** (2005) Springer, New York.
- [4] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York, 1972.

1 Euklidovské grupy zrcadlení

1.1 Zrcadlení a grupy zrcadlení

Nechť $\mathbb{E}$ je konečnědimenzionální Euklidovský vektorový prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$ a $\dim \mathbb{E} = l$. Grupu ortogonálních operátorů na $\mathbb{E}$ značíme $O(\mathbb{E})$; působení operátorů z $O(\mathbb{E})$ na $\mathbb{E}$ lze také chápat jako akci grupy $O(\mathbb{E})$ na $\mathbb{E}$. Nechť H je nadrovina v $\mathbb{E}$ a $L = H^\perp$ je její ortogonální doplněk, tzn. $\mathbb{E} = H \oplus L$. **Zrcadlení vzhledem k nadrovině** $H \subset \mathbb{E}$ je definováno jako lineární zobrazení $s_H : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$

$$\begin{aligned}s_H x &= x, & x \in H \\ s_H x &= -x, & x \in L.\end{aligned}$$

Zrcadlení vzhledem k vektoru $\alpha \in \mathbb{E}, \alpha \neq 0$ je zrcadlení vzhledem k nadrovině $H_\alpha = \{\alpha\}^{\perp}$ a značíme

$$s_\alpha \equiv s_{H_\alpha}.$$

Zřejmě platí pro $k \neq 0$, že $s_\alpha = s_{k\alpha}$. Nadrovina H_α se nazývá **nadrovina zrcadlení**, nebo invariantní nadrovina pro s_α .

Tvrzení 1.1. (A-1)

$$s_\alpha x = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha, \quad x \in \mathbb{E}$$

(A-2) s_α je ortogonální operátor, $s_\alpha \in O(\mathbb{E})$.

(A-3) $s_\alpha^2 = 1, \det s_\alpha = -1$,

(A-4) Pro $\varphi \in O(\mathbb{E})$ platí

$$\begin{aligned}\varphi(H_\alpha) &= H_{\varphi\alpha} \\ \varphi s_\alpha \varphi^{-1} &= s_{\varphi\alpha}.\end{aligned}$$

Důkaz. Tvrzení (A-1) se dokáže dosazením do definice zrcadlení. Pro důkaz (A-2) se využije kritérium: $s_\alpha \in O(\mathbb{E})$, právě když pro všechna $x, y \in \mathbb{E}$ platí $(s_\alpha x, s_\alpha y) = (x, y)$ a explicitní tvar (A-1). Pro $x \in H_\alpha$ platí $(\varphi x, \varphi \alpha) = (x, \alpha) = 0$ a tedy $\varphi(H_\alpha) \subset H_{\varphi\alpha}$ a porovnáním dimenzí dostaneme první tvrzení (A-4). Druhé tvrzení (A-4) se dostane z explicitního tvaru (A-1) porovnáním výrazů $\varphi s_\alpha x = s_{\varphi\alpha} \varphi x$. $\square$

Podgrupa $W \subset O(\mathbb{E})$ se nazývá (Euklidovská) **grupa zrcadlení**, pokud je generována svými zrcadleními. Dvě grupy $W \subset O(\mathbb{E})$ a $W' \subset O(\mathbb{E}')$ se nazývají **izomorfní**, pokud existuje izomorfní zobrazení vektorových prostorů $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ takové, že

$$\begin{aligned}(fx, fy)' &= (x, y), \\ fWf^{-1} &= W' .\end{aligned}$$

Grupa zrcadlení $W \subset O(\mathbb{E})$ je **reducibilní**, pokud lze napsat jako direktní součin svých podgrup $W = W_1 \times W_2$, kde W_1 a W_2 jsou netriviální a generovány zrcadleními z W . Jinak se W nazývá **ireducibilní**.

1.2 Příklady grup zrcadlení

Příklad 1 (Symetrická grupa Σ_l). **Symetrická grupa** Σ_l má akci na $\mathbb{E} = \mathbb{R}^l = (x_1, \dots, x_l)$ se standardním skalárním součinem a je generována zrcadleními $s_{\alpha_{ij}}$, $i, j \in \{1, \dots, l\}$, $i \neq j$

$$\alpha_{ij} = (0, \dots, 1, \dots, -1, \dots, 0).$$

Zrcadlení $s_{\alpha_{ij}}$ působí na $\mathbb{R}^l$ jako transpozice

$$s_{\alpha_{ij}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_l) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_l).$$

Protože transpozice generují grupu celou grupu permutací l prvků, je Σ_l tvořena všemi permutacemi souřadnic prvků v $\mathbb{R}^l$. Grupa Σ_{l+1} je grupa symetrií l -simplexu ve tvaru

$$\Delta_l = \{(c_1, \dots, c_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1} \mid c_i \geq 0, c_1 + \dots + c_{l+1} = 1\}$$

Příklad 2. [Grupy zrcadlení v rovině $\mathcal{D}_n$] Prvky z množiny grup $\mathcal{D}_n$, které se nazývají **di-hedrální grupy**, mají akci na $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem. Uvažujme přirozené číslo $n \geq 3$, označme úhel $\theta = \frac{\pi}{n}$ a definujme vektory $\alpha = (\sin \theta, -\cos \theta)$ a $\beta = (0, 1)$. Pak grupa $\mathcal{D}_n$ je generována s_α a s_β . Operátory s_α a s_β jsou ve standardní bázi reprezentovány maticemi $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a jejich součin $t = s_\alpha s_\beta$ je roven $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$, což je matice reprezentující operátor rotace o úhel 2θ . Pak všech $2n$ prvků z $\mathcal{D}_n$ je ve tvaru n rotací $R_n = \{1, t, \dots, t^{n-1}\}$ a n zrcadlení ve tvaru $\{s_\alpha, ts_\alpha, \dots, t^{n-1}s_\alpha\}$. S použitím relace $ts_\alpha = s_\alpha t^{-1}$ se ukáže, že pro n liché mají zrcadlení tvar $\{s_\alpha, ts_\alpha t^{-1}, \dots, t^{n-1}s_\alpha t^{-n+1}\}$, tzn. zrcadlení tvoří jednu třídu konjugovaných prvků. Pro $n = 2k$ sudé je n zrcadlení rozděleno do dvou tříd konjugovaných prvků $\{s_\alpha, ts_\alpha t^{-1}, \dots, t^{k-1}s_\alpha t^{-k+1}\}$ a $\{s_\beta, ts_\beta t^{-1}, \dots, t^{k-1}s_\beta t^{-k+1}\}$. Grupa $\mathcal{D}_n$ je grupa symetrií pravidelného n -úhelníku $[B_0, \dots, B_{n-1}]_k$, kde vrcholy B_k , jsou v bodech $B_k = (\cos(2k+1)\theta, \sin(2k+1)\theta)$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Platí $s_\alpha B_0 = B_0$ a $s_\alpha B_k = B_{n-k}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ a dále $s_\beta B_k = B_{n-k-1}$.

1.3 Polopřímý součin

Nechť grupa K má podgrupy G a H a necht' platí

- (i) $K = GH$
- (ii) $G \triangleleft K$
- (iii) $G \cap H = \{1\}$,

pak K se nazývá **polopřímý součin podgrup** $K = G \rtimes H$. Rozklad (i) grupy K je z vlastnosti (iii) jednoznačný, protože pokud $g_1 h_1 = g_2 h_2$ pak $g_1^{-1} g_2 = h_1 h_2^{-1} = 1$. Pak platí $|K| = |G||H|$.

Nechť G a H jsou grupy a je zadaný homomorfismus $\Phi : H \rightarrow \text{Aut}(G)$. Pak grupa s nosičem $G \times H$ a s operací

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1[\Phi(h_1)g_2], h_1 h_2)$$

se značí $G \rtimes_\Phi H$. Pokud G a H jsou podgrupy $K = G \rtimes H$ a definuje se $\Phi(h)g = hgh^{-1}$ pak grupy K a $G \rtimes_\Phi H$ jsou izomorfní.

Příklad 3 (Grupa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \Sigma_l$). Grupa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \Sigma_l$ má akci na $\mathbb{E} = \mathbb{R}^l = (x_1, \dots, x_l)$ se standardním skalárním součinem a standardní báží $(e_1, \dots, e_l)$ je generována zrcadleními $s_{\alpha_{ij}}$, $i, j \in \{1, \dots, l\}$, $i \neq j$

$$\alpha_{ij} = (0, \dots, 1, \dots, -1, \dots, 0)$$

a zrcadleními $s_{e_1}, \dots, s_{e_l}$. Zrcadlení s_{e_i} , která generují podgrupu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$, působí na $\mathbb{R}^l$ jako změna znaménka

$$s_{e_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_l) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_l).$$

Protože transpozice generují grupu celou grupu permutací l prvků, je Σ_l tvořena všemi permutacemi souřadnic prvků v $\mathbb{R}^l$. Pro počet prvků platí $|(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \Sigma_l| = 2^l l!$. Grupa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \Sigma_l$ je grupa symetrií l -dimenzionální krychle

$$I^l = \{(c_1, \dots, c_l) \mid -1 \leq c_i \leq 1\}.$$

Příklad 4 (Dihedrální grupy D_n). Podgrupa rotací R_n dihedrální grupy D_n je normální a platí

$$D_n = R_n \rtimes \{1, s_\beta\}.$$

Věta 1.1. • Každá ortogonální transformace v $\mathbb{R}^2$ je zrcadlení nebo rotace.

- Jediné konečné podgrupy ortogonální grupy $O(\mathbb{R}^2)$ jsou cyklické grupy rotací R_n a dihedrální grupy D_n .

2 Kořenový systém

2.1 Definice a vlastnosti

Kořenový systém je *konečná* množina nenulových vektorů $\Delta \subset \mathbb{E}$, tzv. **kořenů**, která splňuje

(B-1) Pokud $\alpha \in \Delta$, pak $\lambda\alpha \in \Delta$ právě když $\lambda = \pm 1$.

(B-2) Pokud $\alpha, \beta \in \Delta$, pak $s_\alpha\beta \in \Delta$.

Dimenze prostoru $\mathbb{E}_\Delta = \Delta_{lin}$ se nazývá **hodnost (rank) systému** Δ . Kořenový systém se nazývá **krystalografický**, pokud pro všechna $\alpha, \beta \in \Delta$ platí

(B-3) $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Kořenový systém $\Delta \subset \mathbb{E}$ se nazývá **esenciální**, pokud platí

(B-4) $\mathbb{E}_\Delta = \mathbb{E}$.

Ke každé *konečné* grupě zrcadlení W existuje kořenový systém. Ke každému zrcadlení W podle nadroviny H vybereme jednotkový vektor báze L a utvoříme množinu všech těchto vektorů a vektorů k nim opačných Δ — tím je splněno (B-1). Pro každou dvojici $\alpha, \beta \in \Delta$ pak platí, že $s_{s_\alpha\beta} = s_\alpha s_\beta s_\alpha \in W$ a tedy $s_\alpha\beta \in \Delta$. Tento kořenový systém Δ je určen jednoznačně až na velikost vektorů, které jsme zvolili všechny jednotkové — **hodnost (rank) grupy zrcadlení** W je pak hodnost systému Δ . Lineární obal takto zkonstruovaného kořenového systému označíme $\mathbb{E}_W$ a platí

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_W \oplus \mathbb{E}^W,$$

přičemž W působí na $\mathbb{E}^W$ jako identita. Pokud $\mathbb{E}_W = \mathbb{E}$ nazývá spolu s Δ také grupa W **esenciální**. Dvě grupy $W \subset O(\mathbb{E})$ a $W' \subset O(\mathbb{E}')$ se nazývají **stabilně izomorfní** pokud jejich zúžení $W \upharpoonright_{\mathbb{E}_W} \subset O(\mathbb{E}_W)$ a $W' \upharpoonright_{\mathbb{E}'_{W'}} \subset O(\mathbb{E}'_{W'})$ jsou izomorfní.

Obráceně ke každému kořenovému systému existuje grupa zrcadlení $W(\Delta)$ generovaná zrcadleními $s_\alpha, \alpha \in \Delta$.

Tvrzení 2.1. Grupa $W(\Delta)$ je konečná.

Důkaz. Označme $\varphi : W(\Delta) \rightarrow S_\Delta$ přirozený homomorfismus do grupy permutací systému Δ . Prostor $\mathbb{E}$ lze rozložit $\mathbb{E} = \mathbb{E}_\Delta \oplus \mathbb{E}^\Delta$, kde $\mathbb{E}_\Delta = \Delta_{lin}$ a $\mathbb{E}^\Delta = \bigcap_{\alpha \in \Delta} H_\alpha$. Zobrazení z $W(\Delta)$, které nechává všechny prvky Δ na svém místě musí být identita na $\mathbb{E}_\Delta$ a všechny zobrazení z $W(\Delta)$ působí jako identita na $\mathbb{E}^\Delta$, tzn. $\ker \varphi = 1$ a $W(\Delta)$ musí být konečná. $\square$

Tvrzení 2.2. Necht $\alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \pm\beta$. Pak $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$, právě když $\alpha \perp \beta$.

Důkaz. Komutace s_α a s_β je ekvivalentní s podmínkou $s_\beta = s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_{s_\alpha\beta}$, tzn. $s_\alpha\beta = \pm\beta$. Tato rovnost má z explicitního tvaru (A-1) řešení pouze $(\alpha, \beta) = 0$ nebo díky axiomu (B-1) $\alpha = \pm\beta$. Pokud $\alpha \perp \beta$, pak $\beta \in H_\alpha$ a $s_\alpha\beta = \beta$. $\square$

Kořenový systém $\Delta \subset \mathbb{E}$ je **reducibilní**, pokud existuje ortogonální rozklad na neprázdné kořenové systémy $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \Delta_1 \perp \Delta_2$. Jinak je Δ **ireducibilní**.

Tvrzení 2.3. Když je kořenový systém je reducibilní, pak grupa zrcadlení $W(\Delta)$ je reducibilní.

Důkaz. Pokud je kořenový systém reducibilní, pak existuje ortogonální rozklad $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ a můžeme zkonstruovat podgrupy $W(\Delta_1)$ a $W(\Delta_2)$. Podgrupy $W(\Delta_1)$ a $W(\Delta_2)$ vzájemně komutují a dohromady obsahují všechny generátory W . Prvek z $W(\Delta_1) \cap W(\Delta_2)$ musí být díky rozkladu $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\Delta_1} \oplus \mathbb{E}_{\Delta_2} \oplus \mathbb{E}^\Delta$ identitou a máme tedy direktní součin $W(\Delta) = W(\Delta_1) \times W(\Delta_2)$. $\square$

2.2 Příklady kořenových systémů

Příklad 5 (Systém A_l). Vezměme ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_{l+1}\}$ prostoru $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{l+1}$ a definujeme

$$\Delta = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}.$$

Požadavek (B-1) je splněn z definice a protože $s_{e_i - e_j}$ permutuje souřadnice platí (B-2); navíc

$$W(\Delta) = \Sigma_{l+1}.$$

Platí $\mathbb{E}_\Delta = \{(x_1, \dots, x_{l+1}) \mid x_1 + \dots + x_{l+1} = 0\}$ a $\mathbb{E}^\Delta = (1, \dots, 1)_{lin}$. Takže kořenový systém není esenciální, je ireducibilní a krystalografický.

Příklad 6 (Systém B_l). Vezměme ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_l\}$ prostoru $\mathbb{E} = \mathbb{R}^l$ a definujeme

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm e_i\}.$$

Požadavek (B-1) je splněn z definice a protože $s_{e_i - e_j}$ permutuje souřadnice, s_{e_i} mění jejich znaménko a $s_{e_i + e_j}$ permutuje a mění znaménko platí (B-2); navíc

$$W(\Delta) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \Sigma_l.$$

Kořenový systém je esenciální, je ireducibilní a krystalografický.

Příklad 7 (Systém C_l). Vezměme ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_l\}$ prostoru $\mathbb{E} = \mathbb{R}^l$ a definujeme

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm 2e_i\}.$$

Požadavek (B-1) je splněn z definice a protože $s_{e_i - e_j}$ permutuje souřadnice, s_{e_i} mění jejich znaménko a $s_{e_i + e_j}$ permutuje a mění znaménko platí (B-2); navíc

$$W(\Delta) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \Sigma_l.$$

Kořenový systém je esenciální, je ireducibilní a krystalografický.

Příklad 8 (Systém D_l). Vezměme ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_l\}$ prostoru $\mathbb{E} = \mathbb{R}^l$ a definujeme

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\}.$$

Požadavek (B-1) je splněn z definice a protože $s_{e_i - e_j}$ permutuje souřadnice $s_{e_i + e_j}$ permutuje a mění znaménko platí (B-2); navíc

$$W(\Delta) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{l-1} \rtimes \Sigma_l,$$

kde $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{l-1}$ označuje grupu sudých změn znamének. Kořenový systém je esenciální, je ireducibilní a krystalografický.

3 Fundamentální systém

3.1 Existence fundamentálního systému

Pokud $\Delta \in \mathbb{E}$ je kořenový systém, pak $\Sigma \subset \Delta$ se nazývá **fundamentální (prostý) systém** a jeho prvky **prosté kořeny** pokud,

- (i) soubor vektorů Σ je lineárně nezávislý
- (ii) každý prvek $\alpha \in \Delta$ je lineární kombinace vektorů z Σ , jejíž koeficienty jsou všechny buď nezáporné (**kladné kořeny**, $\alpha > 0$), nebo nekladné (**záporné kořeny**, $\alpha < 0$).

Množina kladných prostých kořenů se značí Δ^+ a záporných prostých kořenů Δ^- a platí $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$. Komponenta souvislosti množiny $\mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} H_\alpha$ se nazývá **Weylova komora**.

Tvrzení 3.1. Pokud V je vektorový prostor nad nekonečným tělesem $\mathcal{F}$, pak V nelze zapsat jako sjednocení konečného počtu nadrovin.

Důkaz. Pro $\dim V = 1$ je tvrzení zřejmé. Necht $\dim V \geq 2$. Uvažujme $V = \bigcup_{i=1}^n H_i$ rozklad takový, že pro každé

$$V_i = H_1 \cup \dots \cup H_{i-1} \cup H_{i+1} \cup \dots \cup H_n$$

platí $V_i \neq V$. Pak existuje takové $\beta_i \in H_i$, že $\beta \notin V_i$, tzn. $\beta \notin H_j$ pro $j \neq i$. Protože množina $\{\beta_1 + \lambda\beta_2 \mid \lambda \in \mathcal{F}\}$ je nekonečná, musí existovat její dva různé prvky, které oba patří do některého H_k . Pak platí

$$(\lambda - \lambda')\beta_2 = (\beta_1 + \lambda\beta_2) - (\beta_1 + \lambda'\beta_2) \in H_k$$

a tedy $k = 2$. Pak ale $\beta_1 + \lambda\beta_2 \in H_2$ a $\beta_2 \in H_2$ nutí $\beta_1 \in H_2$ což je spor. □

Popíšeme nyní způsob *konstrukce prostého systému* kořenů z daného systému kořenů. Množina $\mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} H_\alpha$ je tedy neprázdná a uvažme její bod t a komoru $\mathcal{C}$, která ho obsahuje $t \in \mathcal{C}$. Pak protože $t \notin H_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, máme pro všechna $\alpha \in \Delta$, že $(t, \alpha) \neq 0$; rozdělíme tedy kořenový systém na dvě části

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \{\alpha \in \Delta \mid (t, \alpha) > 0\}, \\ \Delta^- &= \{\alpha \in \Delta \mid (t, \alpha) < 0\}.\end{aligned}$$

Pro jiné $t' \in \mathcal{C}$ je rozklad stejný, závisí tedy pouze na $\mathcal{C}$.

Vyberme dále množinu $\Sigma \subset \Delta^+$ takovou, že

- (a) každý prvek z Δ^+ je lineární kombinací prvků z Σ z nezápornými koeficienty
- (b) žádná vlastní podmnožina Σ nesplňuje (a).

Tvrzení 3.2. Pro všechna $\alpha, \beta \in \Sigma$, $\alpha \neq \beta$ platí $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Důkaz. Necht $(\alpha, \beta) > 0$. Pak platí, že $s_\alpha\beta = \beta - \lambda\alpha$, kde $\lambda = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) > 0$. Protože $s_\alpha\beta \in \Delta$, musí platit, že buď $s_\alpha\beta \in \Delta^+$ nebo $-s_\alpha\beta \in \Delta^+$. Pokud $s_\alpha\beta \in \Delta^+$, pak $\beta - \lambda\alpha = \sum_{\gamma \in \Sigma} \lambda_\gamma \gamma$, kde $\lambda_\gamma \geq 0$. Pokud $\lambda_\beta < 1$ pak β je pozitivní lineární kombinace prvků z $\Sigma \setminus \beta$, což je spor s (b). Pokud $\lambda_\beta \geq 1$ pak 0 je netriviální pozitivní lineární kombinace prvků z Σ , což je spor s tím, že skalární součin takové kombinace s prvkem $t \in \mathcal{C}$ je kladný. Nyní zbývá možnost $-s_\alpha\beta \in \Delta^+$. Pak ale $\lambda\alpha - \beta = \sum_{\gamma \in \Sigma} \lambda_\gamma \gamma$ a obě možnosti $\lambda_\alpha < \lambda$ a $\lambda_\alpha \geq \lambda$ vedou stejným mechanismem ke sporu. □

Tvrzení 3.3. Množina Σ je lineárně nezávislá.

Důkaz. Pokud by vektory z Σ byly lineárně závislé, pak existují dvě disjunktní podmnožiny Σ^+ a Σ^- množiny Σ , kde obě jsou neprázdné, tak že

$$\sum_{\alpha \in \Sigma^+} c_\alpha \alpha - \sum_{\beta \in \Sigma^-} c_\beta \beta = 0,$$

a $c_\alpha, c_\beta > 0$. Pokud by kterákoliv z těchto dvou byla prázdná, pak 0 je pozitivní lineární kombinací prvků z Σ . Pak pro prvek $\sigma = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} c_\alpha \alpha$ s využitím předchozího tvrzení platí

$$(\sigma, \sigma) = \sum c_\alpha c_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$$

a tedy $\sigma = 0$ lze zapsat jako pozitivní lineární kombinaci prvků z Σ , což je spor. $\square$

Tvrzení 3.4. Necht Δ je kořenový systém, Σ_1 a Σ_2 jsou jeho fundamentální systémy a $\Delta = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$, $\Delta = \Delta_2^+ \cup \Delta_2^-$ příslušné rozklady na pozitivní a negativní kořeny. Pak $\Sigma_1 = \Sigma_2$, právě když $\Delta_1^+ = \Delta_2^+$.

Důkaz. Pokud $\Sigma_1 = \Sigma_2$, pak $\Delta_1^+ = \Delta_2^+$ platí z definice. Pokud $\Delta_1^+ = \Delta_2^+$ a $\Sigma_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, $\Sigma_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_l\}$, pak

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^l x_{ij} \beta_j, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^l y_{ij} \alpha_j, \quad x_{ij} \geq 0, y_{ij} \geq 0.$$

Matice (x_{ij}) , (y_{ij}) jsou regulární a vzájemně inverzní a tedy platí $\sum_{j=1}^l x_{ij} y_{jk} = \delta_{ik}$. Takže z nezápornosti koeficientů pokud $x_{ij} \neq 0$ musí být $y_{ji} > 0$, jinak by měla matice (y_{ij}) nulový řádek. Pak z inverznosti matic musí být také $x_{ik} = 0, k \neq j$. Každý řádek matice (x_{ij}) tedy obsahuje maximálně jeden nenulový prvek; musí obsahovat právě jeden, jinak by celý řádek byl nulový. Protože je (x_{ij}) invertibilní, musí také každý sloupec obsahovat právě jeden nenulový prvek. Z vlastnosti (B-1) musí každý tento nenulový prvek být roven jedničce a matice (x_{ij}) pouze permutuje prvky z Σ_2 a tedy $\Sigma_1 = \Sigma_2$. $\square$

Ke každé Weylově komoře $\mathcal{C}$, která určuje množinu Δ^+ , existuje tedy jednoznačně určený fundamentální systém Σ . Pro dvě různé Weylovy komory existuje nadrovina H_α , $\alpha \in \Delta$, která je odděluje a toto α je pozitivní pro jednu komoru a negativní pro druhou — dvě Weylovy komory určují různé množiny pozitivních kořenů a tedy různé fundamentální systémy. Ke každému fundamentálnímu systému $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ existuje **fundamentální Weylova komora**

$$\mathcal{C} = \{t \in \mathbb{E} \mid (t, \alpha_i) > 0, i = 1, \dots, l\}.$$

Množina $\mathcal{C}$ je neprázdná, protože pro duální $\omega_j^\vee$ vektory, definované $(\alpha_i, \omega_j^\vee) = \delta_{ij}$, platí $\omega_1^\vee + \dots + \omega_l^\vee \in \mathcal{C}$. Pro všechny pozitivní a negativní kořeny vzhledem k Σ a pro dané $t \in \mathcal{C}$ platí $(\alpha, t) > 0, \alpha > 0$ a $(\alpha, t) < 0, \alpha < 0$ — všechny prvky z $\mathcal{C}$ tedy leží na jedné straně nadrovin H_α , takže $\mathcal{C}$ je opravdu Weylova komora. Sestrojili jsme tedy *bijekci mezi množinou všech Weylových komor a množinou všech fundamentálních systémů*.

3.2 Výška

Pro daný fundamentální systém $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ kořenového systému Δ je **výška kořenu** $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l \in \Delta$ daná vztahem

$$h(\alpha) = \lambda_1 + \dots + \lambda_l.$$

Protože všechny lineární kombinace kořenů z fundamentálního systému mají nezáporné nebo nekladné koeficienty, platí pro všechna $\alpha \in \Delta$, že $h(\alpha) \neq 0$.

Tvrzení 3.5. Pro $\alpha \in \Delta^+$, $\alpha \notin \Sigma$, existuje $\alpha_k \in \Sigma$ takové, že

(i) $s_{\alpha_k} \alpha \in \Delta^+$

(ii) $h(s_{\alpha_k} \alpha) < h(\alpha)$.

Důkaz. Necht $\alpha = \sum_{i=1}^l \lambda_i \alpha_i$, $\lambda_i \geq 0$, kde alespoň dvě λ_i jsou kladné. Pak z nerovnosti

$$0 < (\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^l \lambda_i (\alpha, \alpha_i)$$

vidíme, že musí existovat $\alpha_k \in \Sigma$ tak, že $(\alpha, \alpha_k) > 0$ spolu s $\lambda_k > 0$. Z toho plyne, že pro kořen

$$s_{\alpha_k} \alpha = \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha_k)}{(\alpha_k, \alpha_k)} \alpha_k \in \Delta$$

platí (ii). Pak druhé nenulové $\lambda_i \neq \lambda_k$ zůstane v rozvoji pro $s_{\alpha_k} \alpha$ stejné – kladné – a tedy všechny koeficienty $s_{\alpha_k} \alpha$ musí být nezáporné, $s_{\alpha_k} \alpha \in \Delta^+$. $\square$

Tvrzení 3.6. Pro všechna $\alpha \in \Delta^+$ platí $h(\alpha) \geq 1$. Navíc $h(\alpha) = 1$, právě když $\alpha \in \Sigma$.

Důkaz. Pro $\alpha \in \Sigma$ platí $h(\alpha) = 1$. Pokud by platilo pro nějaké $\alpha \in \Delta^+$, že $h(\alpha) < 1$, pak $\alpha \notin \Sigma$ a tedy existoval by kladný kořen s menší výškou. Takto by bylo možno zkonstruovat nekonečnou posloupnost kladných kořenů. Pokud je $h(\alpha) = 1$, pak musí být $\alpha \in \Sigma$ — jinak by existoval kladný kořen s výškou menší než jedna. $\square$

Označme W_0 podgrupu $W(\Delta)$ generovanou $s_\alpha, \alpha \in \Sigma$, takzvanými **fundamentálními zrcadleními**.

Věta 3.1. Pro každé $\alpha \in \Delta$ existují $\varphi \in W_0$ a $\alpha_k \in \Sigma$ tak, že $\alpha = \varphi \alpha_k$.

Důkaz. Pro každé $\alpha \in \Delta^+$ existuje konečná posloupnost $s_{k_1} \alpha, s_{k_2} s_{k_1} \alpha, \dots, s_{k_n} \dots s_{k_2} s_{k_1} \alpha$ s ostře klesajícími výškami. Poslední prvek musí být $\alpha_k \in \Sigma$, tzn. $\alpha = s_{k_1} \dots s_{k_n} \alpha_k$. Pro $\alpha \in \Delta^-$ platí $-\alpha \in \Delta^+$ a tedy $-\alpha = \varphi \alpha_k$. Pak dostaneme $\alpha = \varphi(-\alpha_k) = \varphi s_{\alpha_k} \alpha_k$. $\square$

Důsledek 3.7. Platí $\Delta = W(\Delta)\Sigma$, tzn. každá $W(\Delta)$ -orbita množiny Δ obsahuje prostý kořen.

Věta 3.2. Platí $W(\Delta) = W_0$, tzn. grupa $W(\Delta)$ je generována fundamentálními zrcadleními.

Důkaz. Pro každé $\alpha \in \Delta$ existují $\varphi \in W_0$ a $\alpha_k \in \Sigma$ tak, že $\alpha = \varphi \alpha_k$ — tedy z vlastnosti (A-4) dostaneme, že $s_\alpha = \varphi s_{\alpha_k} \varphi^{-1}$. Každý generátor $s_\alpha, \alpha \in \Delta$ grupy $W(\Delta)$ lze tedy vyjádřit pomocí prvků z W_0 . $\square$

3.3 Příklady fundamentálních systémů

Příklad 9 (Systém A_l). Pro kořenový systém $\Delta = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ se volí fundamentální systém

$$\Sigma = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_l - e_{l+1}\}.$$

Pak platí $\Delta^+ = \{e_i - e_j \mid i < j\}$ a $\Delta^- = \{e_i - e_j \mid i > j\}$ a

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j).$$

Příklad 10 (Systém B_l). Pro kořenový systém $\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm e_i\}$ se volí fundamentální systém

$$\Sigma = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{l-1} - e_l, e_l\}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \{e_i - e_j \mid i < j\} \cup \{e_i + e_j \mid i \neq j\} \cup \{e_i\} \\ \Delta^- &= \{e_i - e_j \mid i > j\} \cup \{-e_i - e_j \mid i \neq j\} \cup \{-e_i\}.\end{aligned}$$

Příklad 11 (Systém C_l). Pro kořenový systém $\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm 2e_i\}$ se volí fundamentální systém

$$\Sigma = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{l-1} - e_l, 2e_l\}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \{e_i - e_j \mid i < j\} \cup \{e_i + e_j \mid i \neq j\} \cup \{2e_i\} \\ \Delta^- &= \{e_i - e_j \mid i > j\} \cup \{-e_i - e_j \mid i \neq j\} \cup \{-2e_i\}.\end{aligned}$$

Příklad 12 (Systém D_l). Pro kořenový systém $\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\}$ se volí fundamentální systém

$$\Sigma = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{l-1} - e_l, e_{l-1} + e_l\}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \{e_i - e_j \mid i < j\} \cup \{e_i + e_j \mid i \neq j\} \\ \Delta^- &= \{e_i - e_j \mid i > j\} \cup \{-e_i - e_j \mid i \neq j\}.\end{aligned}$$

4 Délka

4.1 Vlastnosti smazání a výměny

Nechť Δ je kořenový systém, $\Sigma \subset \Delta$ je fundamentální systém a $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ je množina fundamentálních zrcadlení. Rozklad prvku $\varphi \in W(\Delta)$ na fundamentální zrcadlení $\varphi = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ je **redukováný**, pokud neexistuje rozklad s menším počtem prvků, $\varphi = s_{j_1} \dots s_{j_m}$, $m < k$; délka k redukovaného rozkladu $\varphi = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ je **délka** prvku $l(\varphi) = k$. Označme množinu $\Delta(\varphi)$ kladných kořenů, které $\varphi \in W(\Delta)$ zobrazuje na záporné kořeny,

$$\Delta(\varphi) = \Delta^+ \cap \varphi^{-1}\Delta^-,$$

a $\gamma(\varphi) = |\Delta(\varphi)|$. Protože rozklad $\varphi = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ je redukovaný, právě když $\varphi^{-1} = s_{i_k} \dots s_{i_1}$ je redukovaný, platí $l(\varphi^{-1}) = l(\varphi)$.

Tvrzení 4.1. Nechť $\varphi \in W(\Delta)$ a $\alpha \in \Sigma$. Pak platí

- (i) $\Delta(s_\alpha) = \{\alpha\}$,
- (ii) $s_\alpha[\Delta(\varphi) \setminus \{\alpha\}] = \Delta(\varphi s_\alpha) \setminus \{\alpha\}$,
- (iii) $\varphi\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \in \Delta(\varphi) \Leftrightarrow \gamma(\varphi s_\alpha) = \gamma(\varphi) - 1$,
- (iv) $\varphi\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \Delta(\varphi s_\alpha) \Leftrightarrow \gamma(\varphi s_\alpha) = \gamma(\varphi) + 1$.

Důkaz. (i) Každé $\beta > 0$, $\beta \neq \alpha_i$ zapíšeme ve tvaru $\beta = \sum_{j=1}^l \lambda_j \alpha_j$, $\lambda_j \geq 0$, kde alespoň jedno λ_k , $k \neq i$ je kladné. Pak kořen $s_{\alpha_i}\beta$ má stejný kladný koeficient u α_k jako β a tedy $s_{\alpha_i}\beta > 0$. (ii) Pokud $\beta \in \Delta(\varphi)$, $\beta \neq \alpha$, pak $\beta > 0$, $\varphi\beta < 0$. Protože (i) znamená, že s_α permutuje $\Delta^+ \setminus \{\alpha\}$, platí $s_\alpha\beta > 0$, $s_\alpha\beta \neq \alpha$ a navíc $(\varphi s_\alpha)s_\alpha\beta < 0$, tzn. $s_\alpha[\Delta(\varphi) \setminus \{\alpha\}] \subset \Delta(\varphi s_\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Opačnou inkluzi dostaneme dosazením za φ prvek φs_α a inverzí s_α . (iii)+(iv) Ekvivalence $\varphi\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \in \Delta(\varphi)$ plyne přímo z definice. S využitím této ekvivalence dostaneme $\alpha \in \Delta(\varphi s_\alpha) \Leftrightarrow \varphi s_\alpha\alpha < 0 \Leftrightarrow \varphi(-\alpha) < 0 \Leftrightarrow \varphi\alpha > 0$. Pak s využitím (ii) dostaneme poslední ekvivalence v (iii) a (iv). $\square$

Tvrzení 4.2. Pro rozklad $\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_k} \in W(\Delta)$ označme $\beta_{a_i} = s_{a_k} s_{a_{k-1}} \dots s_{a_{i+1}} \alpha_{a_i}$, kde $s_{a_i} = s_{\alpha_{a_i}}$, $\alpha_{a_i} \in \Sigma$, $1 \leq i \leq k$. Pak pokud $\beta_{a_i} = \pm \beta_{a_j}$, $i \neq j$ pak

$$\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_{i-1}} s_{a_{i+1}} \dots s_{a_{j-1}} s_{a_{j+1}} \dots s_{a_k}.$$

Důkaz. Pokud $i < j$, pak rovnost $\beta_{a_i} = \pm \beta_{a_j}$ lze zapsat

$$s_{a_k} s_{a_{k-1}} \dots s_{a_{i+1}} \alpha_{a_i} = \pm s_{a_k} s_{a_{k-1}} \dots s_{a_{j+1}} \alpha_{a_j}$$

a upravit na

$$s_{a_j} s_{a_{j-1}} \dots s_{a_{i+1}} \alpha_{a_i} = \pm \alpha_{a_j}. \quad (1)$$

Pak z vlastnosti (A-4) a zrovnosti $s_\alpha = s_{-\alpha}$ dostaneme

$$s_{a_j} = (s_{a_j} s_{a_{j-1}} \dots s_{a_{i+1}}) s_{a_i} (s_{a_{i+1}} \dots s_{a_j})$$

a úpravou máme

$$s_{a_i} s_{a_{i+1}} \dots s_{a_{j-1}} = s_{a_{i+1}} \dots s_{a_j}.$$

Ve výrazu pro φ pak dosadíme z poslední rovnosti za $s_{a_i} s_{a_{i+1}} \dots s_{a_{j-1}}$. $\square$

Věta 4.1. Nechť $\varphi \in W(\Delta)$ a $\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_k}$ je redukovaný rozklad. Pak platí

$$(i) \quad l(\varphi) = \gamma(\varphi) = k,$$

$$(ii) \quad \Delta(\varphi) = \{\alpha_{a_k}, s_{a_k} \alpha_{a_{k-1}}, \dots, s_{a_k} s_{a_{k-1}} \dots s_{a_2} \alpha_{a_1}\}$$

Důkaz. Důkaz (ii) provedeme indukcí na $l(\varphi)$. Pokud $l(\varphi) = 1$, pak je φ rovno nějakému fundamentálnímu zrcadlení a $\gamma(\varphi) = |\Delta(\varphi)| = 1$. Označme znovu $\beta_{a_i} = s_{a_k} s_{a_{k-1}} \dots s_{a_{i+1}} \alpha_{a_i}$ a dále $\varphi = \tilde{\varphi} s_{a_k}$, kde $\tilde{\varphi} = s_{a_1} \dots s_{a_{k-1}}$ je redukovaný rozklad pro $\tilde{\varphi}$, a podobně

$$\tilde{\beta}_{a_i} = s_{a_{k-1}} s_{a_{k-2}} \dots s_{a_{i+1}} \alpha_{a_i}.$$

Pak pro $1 \leq i \leq k-1$ máme vztahy $\beta_{a_i} = s_{a_k} \tilde{\beta}_{a_i}$ a $\varphi \beta_{a_i} = \tilde{\varphi} \tilde{\beta}_{a_i}$. Podle indukčního předpokladu platí $\Delta(\tilde{\varphi}) = \{\tilde{\beta}_{a_1}, \dots, \tilde{\beta}_{a_{k-1}}\} \subset \Delta^+$ — ukažme, že navíc platí $\{\tilde{\beta}_{a_1}, \dots, \tilde{\beta}_{a_{k-1}}\} \subset \Delta^+ \setminus \{\alpha_{a_k}\}$. Pokud by bylo $\tilde{\beta}_{a_i} = \alpha_{a_k}$, $i < k$ pak působením zobrazení s_{a_k} na obě strany dostaneme $\beta_{a_i} = -\alpha_{a_k} = -\beta_{a_k}$. Pak podle Tvzení 4.2 lze z rozkladu pro φ vynechat s_{a_i} a s_{a_k} , což je spor s tím, že rozklad φ je redukovaný. Ukažme dále, že $\{\beta_{a_1}, \dots, \beta_{a_k}\} \subset \Delta(\varphi)$ — k tomu je potřeba ukázat, že $\beta_{a_i} > 0$ a $\varphi \beta_{a_i} < 0$. Platí $\beta_{a_k} = \alpha_{a_k} > 0$; pro $i < k$ máme $\beta_{a_i} = s_{a_k} \tilde{\beta}_{a_i}$ a protože $\tilde{\beta}_{a_i} \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_{a_k}\}$ a s_{a_k} permutuje $\Delta^+ \setminus \{\alpha_{a_k}\}$ je $s_{a_k} \tilde{\beta}_{a_i} > 0$. Ukázali jsme, že $\alpha_{a_k} \notin \Delta(\tilde{\varphi})$ a tedy $\tilde{\varphi} \alpha_{a_k} > 0$, tzn. platí $\varphi \beta_{a_k} = \tilde{\varphi} s_{a_k} \alpha_{a_k} = -\tilde{\varphi} \alpha_{a_k} < 0$. Pro $i < k$ máme z indukčního předpokladu $\varphi \beta_{a_i} = \tilde{\varphi} \tilde{\beta}_{a_i} < 0$. Tím je dokázáno, že $\{\beta_{a_1}, \dots, \beta_{a_k}\} \subset \Delta(\varphi)$. Z Tvzení 4.2 víme, že množina $\{\beta_{a_1}, \dots, \beta_{a_k}\}$ musí obsahovat k navzájem různých prvků, jinak by rozklad φ nebyl redukovaný, a tedy $k \leq \gamma(\varphi)$. Dále z Tvzení 4.1 plyne, že při konstrukci φ z jeho rozkladu, se funkce γ zvyšuje při každém z k kroků nejvýše o jedničku, a tedy $\gamma(\varphi) \leq k$. Závěrem tedy $\gamma(\varphi) = k = l(\varphi)$ a $\Delta(\varphi) = \{\beta_{a_1}, \dots, \beta_{a_k}\}$. $\square$

Věta 4.2 (Deletion Property, Matsumoto Cancellation Property). Pokud $\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_k} \in W(\Delta)$ má délku $l(\varphi) < k$, pak existují $1 \leq i < j \leq k$ tak, že

$$\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_{i-1}} s_{a_{i+1}} \dots s_{a_{j-1}} s_{a_{j+1}} \dots s_{a_k}.$$

Důkaz. Protože $l(\varphi) = \gamma(\varphi)$ a při konstrukci z rozkladu $\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_k}$ podle Tvzení 4.1 se funkce γ nemůže zvyšovat v každém z k kroků o jedničku, musí existovat $j \leq k$ tak, že

$$l(s_{a_1} \dots s_{a_j}) = l(s_{a_1} \dots s_{a_{j-1}}) - 1.$$

Protože tato vlastnost je ekvivalentní $s_{a_1} \dots s_{a_{j-1}} \alpha_{a_j} < 0$ a $\alpha_{a_j} > 0$ musí existovat $i < j$ tak, že $s_{a_{i+1}} \dots s_{a_{j-1}} \alpha_{a_j} > 0$ a $s_{a_i} s_{a_{i+1}} \dots s_{a_{j-1}} \alpha_{a_j} < 0$. Protože s_{a_i} permutuje $\Delta^+ \setminus \{\alpha_{a_i}\}$ musí být $s_{a_{i+1}} \dots s_{a_{j-1}} \alpha_{a_j} = \alpha_{a_i}$. Dále se postupuje stejně jako v rovnici (1), z (A-4) platí $s_{a_i} = s_{a_{i+1}} \dots s_{a_{j-1}} s_{a_j} s_{a_{j-1}} \dots s_{a_{i+1}}$. $\square$

Důsledek 4.3 (Matsumoto Exchange Property). Pokud $\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_k} \in W(\Delta)$ má délku $l(\varphi) < k$, pak existují $1 \leq i < j \leq k$ tak, že

$$s_{a_i} \dots s_{a_{j-1}} = s_{a_{i+1}} \dots s_{a_j}.$$

4.2 Akce grupy $W(\Delta)$ na Weylových komorách

Protože akce grupy $W(\Delta)$ na nadrovinách zrcadlení H_α , $\alpha \in \Delta^+$ je permutuje, máme dobře definovanou akci grupy $W(\Delta)$ na Weylových komorách, tzn. pro $\varphi \in W(\Delta)$ a Weylovu komoru $\mathcal{C}$ je $\varphi(\mathcal{C})$ znovu Weylova komora. Nadrovina zrcadlení **odděluje** komory $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ pokud pro všechna $t_1 \in \mathcal{C}_1$ a $t_2 \in \mathcal{C}_2$ mají skalární součiny $(t_1, \alpha), (t_2, \alpha)$ opačné znaménko. Pro $\varphi \in W(\Delta)$ definujeme funkci $\lambda(\varphi)$ jako počet nadrovin zrcadlení, které oddělují fundamentální Weylovu komoru $\mathcal{C}_0$, odpovídající $\Sigma \subset \Delta$ a $\varphi(\mathcal{C}_0)$.

Věta 4.3. Pro $\varphi \in W(\Delta)$ platí $l(\varphi) = \lambda(\varphi)$.

Důkaz. Protože platí $l(\varphi) = l(\varphi^{-1}) = \gamma(\varphi^{-1})$, stačí ukázat $\lambda(\varphi) = \gamma(\varphi^{-1})$. Nadrovina H_α , $\alpha > 0$ odděluje $\mathcal{C}_0$ a $\varphi(\mathcal{C}_0)$, právě když pro každé $t \in \mathcal{C}_0$ platí $(t, \varphi^{-1}\alpha) = (\varphi t, \alpha) < 0$. To nastane, právě když $\varphi^{-1}\alpha < 0$ a tedy $\alpha \in \Delta(\varphi^{-1})$. $\square$

Věta 4.4. Každá $W(\Delta)$ –orbita obsahuje prvek z $\overline{\mathcal{C}_0}$.

Důkaz. Necht $Wa = \{wa \in \mathbb{E} \mid w \in W\}$ je orbita bodu $a \in \mathbb{E}$ a pro $b \in \mathcal{C}_0$ označme $d = \min\{\|x - b\| \mid x \in Wa\}$. Pak existuje takové $\varphi \in W(\Delta)$ takové, že $d = \|\varphi a - b\|$. Dokažme, že $\varphi a \in \overline{\mathcal{C}_0}$. Pokud by neleželo, platilo by pro nějaký kořen $\alpha \in \Sigma$, že $(\varphi a, \alpha) < 0$. Pak z rovnosti

$$\|s_\alpha \varphi a - b\|^2 = \|\varphi a - b\|^2 + 4 \frac{(\varphi a, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} (\alpha, b),$$

která se odvodí přímým výpočtem, a z $(\alpha, b) > 0$ plyne, že $\|s_\alpha \varphi a - b\| < \|\varphi a - b\|$. $\square$

Věta 4.5. Akce grupy $W(\Delta)$ na množině Weylových komor je regulární (anglicky regular, nebo simply transitive).

Důkaz. Regulární akce znamená, že je tranzitivní a volná. Tranzitivita znamená, že pro každé dvě Weylovy komory $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ existuje $\varphi \in W(\Delta)$ takové, že $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. To je ekvivalentní tomu, že pro každou Weylovu komoru $\mathcal{C}$ existuje $\varphi \in W(\Delta)$ takové, že $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_0$. K tomu stačí ukázat, že existuje $\varphi \in W(\Delta)$ tak, že $\varphi(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_0 \neq \emptyset$. Vezměme $a \in \mathcal{C}$ a jeho $W(\Delta)$ –orbitu, která obsahuje prvek $\varphi a \in \overline{\mathcal{C}_0}$. Prvek φa neleží na žádné z nadrovin zrcadlení H_α , $\alpha \in \Delta$, protože jinak by i prvek a ležel v $H_{\varphi^{-1}\alpha}$, tzn. $\varphi a \in \mathcal{C}_0$. Volnost akce znamená, že jediný prvek, který ponechává $\mathcal{C}_0$ nezměněno, je identita ve $W(\Delta)$. Pokud $\varphi(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0$, pak $l(\varphi) = \lambda(\varphi) = 0$ a φ musí být identita. $\square$

Důsledek 4.4. Akce grupy $W(\Delta)$ na množině fundamentálních systémů kořenového systému Δ je regulární; Weylova komora $\varphi(\mathcal{C}_0)$ je fundamentální Weylovou komorou fundamentálního systému $\varphi\Sigma$.

5 Parabolické podgrupy

Nechť $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Delta$ je fundamentální systém, $S = \{s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_l}\}$ je odpovídající množina fundamentálních zrcadlení a $I \subset \{1, \dots, l\}$. Pak **parabolická podgrupa** $W_I \subset W(\Delta)$ **vzhledem k** Σ je grupa generovaná s_{α_i} , $i \in I$. Označíme-li $\Sigma_I = \{\alpha_i \mid i \in I\}$, pak $\Delta_I = (\Sigma_I)_{lin} \cap \Delta$ je kořenový systém s fundamentálním systémem Σ_I nazývaný **parabolický kořenový podsystém vzhledem k** Σ a platí $W_I = W(\Delta_I)$.

Podgrupa $W' \subset W(\Delta)$ je **parabolická**, pokud existuje fundamentální systém $\Sigma' \subset \Delta$ a $I' \subset \{1, \dots, l\}$ tak, že $W' = W_{I'}$ je parabolická podgrupa vzhledem k Σ' ; pak kořenový podsystém $\Delta_{I'} \subset \Delta$ se také nazývá **parabolický**.

Tvrzení 5.1. Pokud $\Delta'' \subset \Delta'$ a $\Delta' \subset \Delta$ jsou parabolické kořenové podsystémy, pak $\Delta'' \subset \Delta$ je také parabolický kořenový podsystém; pokud $W(\Delta'') \subset W(\Delta')$ a $W(\Delta') \subset W(\Delta)$ jsou parabolické podgrupy, pak $W(\Delta'') \subset W(\Delta)$ je také parabolická podgrupa.

Důkaz. Existují fundamentální systémy $\Sigma \subset \Delta$, $\Sigma' \subset \Delta'$ a odpovídající podsystémy $\Sigma_I \subset \Sigma$, $\Sigma'_J \subset \Sigma'$ takové, že $\Delta_I = \Delta'$ a $\Delta'' = \Delta'_J$. Systémy Σ' a Σ_I jsou dva fundamentální systémy kořenového systému Δ' a tedy $\Sigma' = \varphi \Sigma_I$, $\varphi \in W(\Delta)$. Pak systém Σ'_J je parabolický kořenový podsystém vzhledem k $\varphi \Sigma$. $\square$

Označme pro parabolickou podgrupu $W_I \subset W(\Delta)$ a $\varphi \in W_I$ délku $l(\varphi)$ ve $W(\Delta)$ vzhledem k fundamentálnímu systému Σ a $l_I(\varphi)$ délku ve W_I vzhledem k fundamentálnímu systému Σ_I .

Tvrzení 5.2. Pro $\varphi \in W_I$ platí $l_I(\varphi) = l(\varphi)$.

Důkaz. Pro množiny kladných a záporných kořenů v rozkladu $\Delta_I = \Delta_I^+ \cup \Delta_I^-$ platí $\Delta_I^+ = \Delta_I \cap \Delta^+$ a $\Delta_I^- = \Delta_I \cap \Delta^-$. Pak platí

$$\Delta_I(\varphi) = \Delta_I^+ \cap \varphi^{-1} \Delta_I^- \subset \Delta^+ \cap \varphi^{-1} \Delta^- = \Delta(\varphi).$$

Dále platí, že pokud je rozklad $\varphi \in W_I$ redukovaný vzhledem k Σ , je redukovaný i vzhledem k Σ_I . Platí tedy nerovnosti

$$l(\varphi) \leq l_I(\varphi) = |\Delta_I(\varphi)| \leq |\Delta(\varphi)| = l(\varphi).$$

$\square$

Definujme množinu W^I vztahem

$$W^I = \{\varphi \in W(\Delta) \mid \varphi \alpha_i > 0, i \in I\}.$$

Tvrzení 5.3. Pro každé $\varphi \in W(\Delta)$ existuje právě jedno $\varphi^I \in W^I$ a právě jedno $\varphi_I \in W_I$ takové, že $\varphi = \varphi^I \varphi_I$. Navíc platí $l(\varphi) = l(\varphi^I) + l(\varphi_I)$.

Důkaz. Existence rozkladu. Pro $\varphi \in W(\Delta)$ vyberme pevně reprezentant $\varphi^I \in \varphi W_I$ levé třídy φW_I rozkladu grupy $W(\Delta)$ podle podgrupy W_I s minimální délkou. Pak platí $\varphi = \varphi^I \varphi_I$, kde $\varphi_I \in W_I$. Kdyby pro nějaké $i \in I$ platilo $\varphi^I \alpha_i < 0$, pak podle Tvrzení 4.1 platí $l(\varphi^I s_{\alpha_i}) = l(\varphi^I) - 1$ a reprezentant $\varphi^I s_{\alpha_i} \in \varphi W_I$ by měl menší délku než φ^I — musí tedy být $\varphi^I \in W^I$.

Délka prvků v rozkladu. Pro redukovaný rozklad $\varphi_I = s_{a_1} \dots s_{a_k}$, $a_i \in I$ platí podle Tvrzení 5.2, že $l(\varphi_I) = k$. Pokud by bylo $l(\varphi) < l(\varphi^I) + l(\varphi_I)$, pak ze součinu $\varphi^I \varphi_I$ lze vynechat dva generátory. Ani jeden z těchto dvou generátorů nemůže být vynechán z rozkladu pro φ^I — tím by vznikl (vzhledem k tomu, že vynecháním libovolného počtu generátorů z φ_I je výsledek stále z W_I) reprezentant třídy φW_I s menší délkou než φ^I . Po vynechání obou generátorů z φ_I by vznikl rozklad φ_I o méně prvcích než redukovaný rozklad. Platí tedy $l(\varphi) = l(\varphi^I) + l(\varphi_I)$.

Jednoznačnost rozkladu. Nechť $\tilde{\varphi}^I \in \varphi W_I$ je reprezentant levé třídy φW_I rozkladu grupy $W(\Delta)$ podle podgrupy W_I a platí $l(\tilde{\varphi}^I) = l(\varphi^I)$, tzn. $\tilde{\varphi}^I$ je také prvek s minimální délkou. Pak protože $\tilde{\varphi}^I W_I = \varphi W_I$, existuje podle předchozího bodu rozklad $\tilde{\varphi}^I = \varphi^I \tilde{\varphi}_I$ a platí $l(\tilde{\varphi}^I) = l(\varphi^I) + l(\tilde{\varphi}_I)$. Pak $l(\tilde{\varphi}_I) = 0$ a $\tilde{\varphi}_I$ je identita. $\square$

5.1 Stabilizátory

Pro dané $I \subset \{1, \dots, l\}$ definujeme množinu $\mathcal{C}_I \subset \overline{\mathcal{C}_0}$ vztahem

$$\mathcal{C}_I = \{t \in \mathbb{E} \mid (t, \alpha_i) = 0, i \in I \wedge (t, \alpha_i) > 0, i \notin I\}.$$

Platí $\mathcal{C}_\emptyset = \mathcal{C}_0$ a $\overline{\mathcal{C}_0}$ a rozklad

$$\overline{\mathcal{C}_0} = \bigcup_{I \subset \{1, \dots, l\}} \mathcal{C}_I \quad (2)$$

je disjunktní. **Podgrupa stability (stabilizátor)** množiny $\Gamma \subset \mathbb{E}$ se označuje $W_\Gamma \subset W(\Delta)$

$$W_\Gamma = \{\varphi \in W(\Delta) \mid \varphi x = x, x \in \Gamma\}.$$

Tvrzení 5.4. Pro každé $\varphi \in W^I$, $\varphi \neq 1$ platí $\varphi(\mathcal{C}_I) \cap \overline{\mathcal{C}_0} = \emptyset$.

Důkaz. Pro $\varphi \neq 1$ s redukovaným rozkladem $\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_k}$ platí $\alpha_{a_k} \in \Delta(\varphi)$ a tedy existuje $i = a_k$, $1 \leq i \leq l$ tak, že $\varphi \alpha_i < 0$. Protože $\varphi \in W^I$, platí $i \notin I$. Pro $t \in \mathcal{C}_I$ platí $(t, \alpha_i) = (\varphi t, \varphi \alpha_i) > 0$. Protože pro $y \in \mathcal{C}_0$ a $\varphi \alpha_i < 0$ platí $(y, \varphi \alpha_i) < 0$, platí pro $y \in \overline{\mathcal{C}_0}$ vztah $(y, \varphi \alpha_i) \leq 0$ a tedy $\varphi t \notin \overline{\mathcal{C}_0}$. $\square$

Tvrzení 5.5. Pro každé $x \in \mathcal{C}_I$ platí $W_x = W_I$.

Důkaz. Protože pro každé $i \in I$ platí $\mathcal{C}_I \subset H_{\alpha_i}$, stabilizuje každé s_{α_i} každý prvek z $\mathcal{C}_I$ a tedy $W_I \subset W_x$. Pro dané $\varphi \in W_x$ existují právě jedno $\varphi^I \in W^I$ a právě jedno $\varphi_I \in W_I$ takové, že $\varphi = \varphi^I \varphi_I$. Pak platí

$$x = \varphi x = \varphi^I \varphi_I x = \varphi^I x.$$

Protože $\varphi^I x = x \in \overline{\mathcal{C}_0}$ musí podle Tvrzení 5.4 platit $\varphi^I = 1$ a tedy $\varphi = \varphi_I \in W_I$. $\square$

Důsledek 5.6. Každá $W(\Delta)$ -orbita obsahuje právě jeden prvek z $\overline{\mathcal{C}_0}$.

Důkaz. Necht $x \in \overline{\mathcal{C}_0}$, pak z (2) existuje právě jedno $\mathcal{C}_I \subset \overline{\mathcal{C}_0}$ tak, že $x \in \mathcal{C}_I$. Pro dané $\varphi \in W(\Delta)$ existují právě jedno $\varphi^I \in W^I$ a právě jedno $\varphi_I \in W_I$ takové, že $\varphi = \varphi^I \varphi_I$ a tedy $\varphi x = \varphi^I x$. Pokud platí $\varphi x = \varphi^I x \in \overline{\mathcal{C}_0}$ musí podle Tvrzení 5.4 platit $\varphi^I = 1$ a tedy $\varphi x = \varphi_I x = x$. $\square$

Věta 5.1. Pro všechny podmnožiny $\Gamma \subset \mathbb{E}$ je W_Γ parabolická podgrupa.

Důkaz. Platí, že $W_\Gamma = W_{(\Gamma)_{lin}}$ a necht $\{y_1, \dots, y_k\}$ je báze $(\Gamma)_{lin}$. Existuje $x \in \overline{\mathcal{C}_0}$ tak, že $y_1 = \varphi x$, $\varphi \in W(\Delta)$ a podgrupa $W_{y_1} = \varphi W_x \varphi^{-1}$ je parabolická vzhledem k systému $\varphi \Sigma$. Podgrupa $(W_{y_1})_{y_2} \subset W_{y_1}$ je parabolická podgrupa W_{y_1} a je díky Tvrzení 5.1 parabolická podgrupa $W(\Delta)$. Tímto postupem sestrojíme parabolickou podgrupu $((\dots (W_{y_1}) \dots) y_k)$ grupy $W(\Delta)$, která je rovna $W_{\{y_1, \dots, y_k\}} = W_{\{y_1, \dots, y_k\}_{lin}} = W_{(\Gamma)_{lin}} = W_\Gamma$. $\square$

6 Coxeterovy grupy

6.1 Coxeterovy systémy

Nechť F je volná grupa, která je generována množinou S , a N je normální podgrupa F generovaná množinou R , obsahující slova $r_1, \dots, r_k$ z abecedy S . Pak dvojice S, R se nazývá **prezentací grupy** F/N a značí se

$$F/N = \langle S \mid r_1 = \dots = r_n = 1 \rangle.$$

Nechť S je neprázdná množina. Potom zobrazení $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ se nazývá **Coxeterova matice** pokud pro všechna $s, s' \in S$ platí

- (1) $m(s, s') = m(s', s)$
- (2) $m(s, s') = 1 \Leftrightarrow s = s'$.

Coxeterův graf je graf s množinou vrcholů S a s hranami mezi prvky s, s' pro které $m(s, s') \geq 3$. Pro $m(s, s') \geq 4$ je taková hrana označena číslem $m(s, s')$. Pokud označíme $S_{fin}^2 = \{(s, s') \in S^2 \mid m(s, s') \neq \infty\}$ pak grupa W určená prezentací

$$W = \langle S \mid (ss')^{m(s, s')} = 1, (s, s') \in S_{fin}^2 \rangle$$

se nazývá **Coxeterova grupa** a dvojice (W, S) **Coxeterův systém**. Dva Coxeterovy systémy (W, S) a (W', S') jsou **izomorfní**, pokud existuje grupový izomorfismus $f : W \rightarrow W'$ takový, že $f(S) = S'$. **Hodnost** Coxeterova systému (W, S) je číslo $|S|$ a Coxeterův systém je **konečný** pokud W je konečná. Coxeterův systém je **reducibilní**, pokud $W = W_1 \times W_2$ a $S = S_1 \cup S_2$, kde (W_1, S_1) a (W_2, S_2) jsou Coxeterovy systémy. Jinak se nazývá systém **ireducibilní**. Vzhledem k tomu, že $m(s, s') = 2$, právě když s, s' komutují, pak je Coxeterův systém ireducibilní, právě když je Coxeterův graf souvislý.

Nechť S^* je volný monoid generovaný S , tzn. množina slov tvořená z abecedy S se spojením slov jako součinem. Nechť $\equiv$ je ekvivalence mezi slovy generovaná smazáním nebo přidáním slov tvaru $(ss')^{m(s, s')}$. Pak $S^*/\equiv$ je izomorfní W . Dále platí, že pokud G je grupa a $f : S \rightarrow G$ je zobrazení splňující $(f(s)f(s'))^{m(s, s')} = 1$, $(s, s') \in S_{fin}^2$ pak existuje jednoznačně určené rozšíření a navíc homomorfismus $f : W \rightarrow G$.

Příklad 13 (Prezentace dihedrální grupy $I_2(n)$). Označme

$$I_2(n) = \langle r_1, r_2 \mid r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^n = 1 \rangle.$$

Každý prvek z $I_2(n)$ může být zapsán ve tvaru $r_1 r_2 r_1 \dots$ nebo $r_2 r_1 r_2 \dots$ délky maximálně n a prázdné slovo reprezentující jednotku v grupě. Pro každou délku existují právě dvě slova dané délky a slova dané n jsou stejná, takže $|I_2(n)| \leq 2n$. Protože platí $s_\alpha^2 = s_\beta^2 = (s_\alpha s_\beta)^n = 1$, můžeme rozšířit zobrazení $f : I_2(n) \rightarrow \mathcal{D}_n$ definované na generátorech $r_1 \mapsto s_\alpha$ a $r_2 \mapsto s_\beta$. Toto zobrazení je surjektivní homomorfismus a protože $|I_2(n)| \leq |\mathcal{D}_n|$, je to izomorfismus.

6.2 Coxeterovy systémy pro grupy zrcadlení

Pro kořenový systém Δ s fundamentálním systémem $\Sigma \subset \Delta$ a množinou fundamentálních zrcadlení S označme pro $s, s' \in S$ číslo $m(s, s')$ řád prvku $ss' \in W(\Delta)$.

Věta 6.1 (Coxeter). Dvojice $(W(\Delta), S)$ je konečný Coxeterův systém a platí

$$W(\Delta) = \langle S \mid (ss')^{m(s, s')} = 1, (s, s') \in S^2 \rangle$$

Důkaz. Lze provést indukcí nebo sporem; využívá se podmínky smazání. $\square$

Tvrzení 6.1. Pro $\alpha, \beta \in \Delta$ unitárního kořenového systému platí $s_\alpha s_\beta$ je řádu $m \Leftrightarrow \angle \alpha, \beta = \pi(1 - 1/m) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = -\cos(\pi/m)$.

Důkaz. Prostor $\mathbb{E}_\Delta$ direktně rozložíme na $A = H_\alpha \cap H_\beta$ a $B = \mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$,

$$\mathbb{E}_\Delta = A \oplus B.$$

Zúžení $s_\alpha s_\beta \upharpoonright_A$ je identita a v dvoudimenzionálním prostoru je $s_\alpha s_\beta \upharpoonright_B$ rotace z Příkladu 2. $\square$

Věta 6.2. Dvě esenciální grupy zrcadlení jsou izomorfní, právě když jejich Coxeterovy systémy jsou izomorfní.

Důkaz. Označme $W(\Delta)$ a $W(\Delta')$ dvě esenciální grupy zrcadlení s unitárními kořenovými systémy, s fundamentálními systémy $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Delta$, $\Sigma' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_l\} \subset \Delta'$ a $(W(\Delta), S)$ a $(W(\Delta'), S')$ příslušné Coxeterovy systémy.

Pokud jsou grupy $W(\Delta)$ a $W(\Delta')$ izomorfní, pak existuje izomorfní zobrazení vektorových prostorů $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ takové, že $(fx, fy)' = (x, y)$ a $fWf^{-1} = W'$. Fundamentální systém $f\Sigma \subset f\Delta$ je konjugovaný s systémem $\Sigma' \subset \Delta'$, tzn. existuje $\varphi \in W(\Delta')$ takové, že $\varphi f\Sigma = \Sigma'$. Pak obklad $s \rightarrow (\varphi f)s(\varphi f)^{-1}$ je izomorfismus Coxeterových systémů $(W(\Delta), S)$ a $(W(\Delta'), S')$.

Pokud Coxeterovy systémy $(W(\Delta), S)$ a $(W(\Delta'), S')$ jsou izomorfní, definujme zobrazení $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ předpisem $f(\alpha_i) = \alpha'_i$, $i = 1, \dots, l$. Z izomorfnosti plyne, že prvky $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$ a $s_{\alpha'_i} s_{\alpha'_j}$ mají stejný řád, a tedy podle Tvrzení 6.1 platí $(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha'_i, \alpha'_j) = (f\alpha_i, f\alpha_j)$ a tedy f zachovává skalární součin. Přímým výpočtem se ověří, že $f s_{\alpha_i}(\alpha_j) = s_{\alpha'_i} f(\alpha_j)$ a tedy $f s_{\alpha_i} f^{-1} = s_{\alpha'_i}$, tzn. $fW(\Delta)f^{-1} = W(\Delta')$. $\square$

7 Bilineární formy Coxeterových systémů

7.1 Radikál bilineární formy

Pro daný Coxeterův systém (W, S) definujeme $\mathbb{V}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s bází $\{e_s \mid s \in S\}$. **Bilineární formu** $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme vztahem

$$B(e_s, e_{s'}) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right), & (s, s') \in S_{fin}^2 \\ -1, & m(s, s') = +\infty. \end{cases}$$

Pak platí $B(e_s, e_s) = 1$, speciálně $B \neq 0$, a pokud $m(s, s') = 2$, pak $B(e_s, e_{s'}) = 0$. Ortogonální doplněk k podprostoru $P \subset W$ vzhledem k B je definován

$$P^\perp = \{x \in \mathbb{V} \mid B(x, y) = 0, \forall y \in P\}.$$

Podprostor $\mathbb{V}^\perp$ se nazývá **radikál (nulita) formy** B . Označme

$$V_{s, s'} = \mathbb{R}e_s + \mathbb{R}e_{s'}.$$

Tvrzení 7.1. Pro každé $s, s' \in S$ je zúžení B na $V_{s, s'}$ pozitivně semidefinitní; pokud je $(s, s') \in S_{fin}^2$ je toto zúžení navíc pozitivně definitní.

Důkaz. Pro $x = ae_s + be_{s'} \in V_{s, s'}$ vypočteme

$$B(x, x) = \begin{cases} \left(a - b \cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right)\right)^2 + \left(b \sin\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right)\right)^2, & (s, s') \in S_{fin}^2 \\ (a - b)^2, & m(s, s') = +\infty. \end{cases}$$

Pro konečné $m(s, s')$ platí $\sin\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right) \neq 0$. □

Pro každé $s \in S$ definujeme lineární zobrazení $\varrho(s) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ vztahem

$$\varrho(s)x = x - 2B(x, e_s)e_s.$$

Přímo z definice se určí, že $\varrho(s) \neq 1$, $\varrho^2(s) = 1$ a

$$B(\varrho(s)x, \varrho(s)y) = B(x, y).$$

Věta 7.1. Existuje jednoznačně určený homomorfismus $\varrho : W \rightarrow GL(\mathbb{V})$, který rozšiřuje zobrazení $\varrho : S \rightarrow GL(\mathbb{V})$ a pro prvky grupy $\varphi \in \varrho(W)$ a všechna $x, y \in \mathbb{V}$ platí

$$B(\varphi x, \varphi y) = B(x, y),$$

B je tzv. **W -invariantní**. Navíc řád prvků $\varrho(s)\varrho(s') \in GL(\mathbb{V})$ a také $ss' \in W$ je $m(s, s')$.

Důkaz. Určeme nejprve řád prvků $\varrho(s)\varrho(s') \in GL(\mathbb{V})$. Pro $\varrho(s)$ i $\varrho(s')$ je podprostor $V_{s, s'}$ invariantní vzhledem k těmto operátorům a je tedy invariantní i vůči $\varrho(s)\varrho(s')$. Pro $s = s'$ je řád prvku $\varrho(s)\varrho(s) = \varrho^2(s) = 1$ roven 1; uvažujme $s \neq s'$:

- (a) $(s, s') \in S_{fin}^2$. Protože B je nede degenerovaná na $V_{s, s'}$ platí pro ortogonální doplněk, že $\mathbb{V} = V_{s, s'}^\perp \oplus V_{s, s'}$. Pak zúžení $\varrho(s)\varrho(s')$ na $V_{s, s'}^\perp$ je identita a řád zúžení $\varrho(s)\varrho(s')$ na $V_{s, s'}$ je tedy roven řádu $\varrho(s)\varrho(s')$ na $\mathbb{V}$. Protože B je na $V_{s, s'}$ pozitivně definitní, tzn. skalární součin a $B(e_s, e_{s'}) = -\cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right)$, platí Tvrzení 6.1 a řád zúžení $\varrho(s)\varrho(s')$ na $V_{s, s'}$ je $m(s, s')$.

- (b) Pro $m(s, s') = +\infty$ indukci platí $[\varrho(s)\varrho(s')]^k e_s = 2k(e_s + e_{s'}) + e_s$, $k \in \mathbb{N}$ a řád $\varrho(s)\varrho(s')$ je tedy nekonečný.

Protože je nyní splněno $(\varrho(s)\varrho(s'))^{m(s, s')} = 1$, $(s, s') \in S_{fin}^2$ existuje jednoznačně určené rozšíření a navíc homomorfismus $\varrho : W \rightarrow GL(\mathbb{V})$. Pokud platí $\varrho(s) = \varrho(s')$, pak prvek $\varrho(s)\varrho(s')$ má řád 1 a je tedy $m(s, s') = 1$, tzn. $s = s'$. Zobrazení ϱ je tedy prosté a platí $W \cong \varrho(W)$. Prvky ss' a $\varrho(ss') = \varrho(s)\varrho(s')$ mají tedy stejný řád. $\square$

Důsledek 7.2. Radikál $\mathbb{V}^\perp$ je invariantní podprostor věrné **Titsovy (geometrické) reprezentace** ϱ .

Důsledek 7.3. Dva izomorfní Coxeterovy systémy mají stejný Coxeterův graf.

7.2 Konečné ireducibilní Coxeterovy systémy

Uvažujme konečný ireducibilní Coxeterův systém (W, S) , pro který je značení množiny konečné množiny S zvoleno jako $S = \{s_1, \dots, s_l\}$. Prvkům množiny generátorů S odpovídá báze $\{e_1, \dots, e_l\}$ vektorového prostoru $\mathbb{V}$.

Tvrzení 7.4. Pro konečný ireducibilní Coxeterův systém (W, S) platí

- (a) každý netriviální invariantní podprostor U reprezentace ϱ je obsažen v radikálu, $U \subset \mathbb{V}^\perp$,
- (b) pokud B je degenerovaná, pak ϱ není úplně reducibilní,
- (c) pokud B je nedegenerovaná, pak ϱ je ireducibilní,
- (d) jediná zobrazení, které komutují s ϱ jsou násobky identity.

Důkaz. (a) Zkonstruuje diskjuktní rozklad $S = S_1 \cup S_2$ označením

$$S_1 = \{s_i \mid e_i \in U\}, \quad S_2 = \{s_j \mid e_j \notin U\}.$$

Protože U je netriviální vlastní podprostor, platí $S_2 \neq \emptyset$. Pokud je nějaké $e_i \in U$ pak pro všechna $e_j \notin U$ platí

$$2B(e_i, e_j)e_j = e_i - \varrho(s_j)e_i \in U$$

a tedy musí být $B(e_i, e_j) = 0$. Pak by e_i bylo v jiné komponentě souvislosti Coxeterova grafu než všechna $e_j \notin U$ a systém by nebyl ireducibilní, tzn. $S_1 = \emptyset$. Pak pro všechna $x \in U$ a všechna e_i , $i \in \{1, \dots, l\}$ platí

$$2B(x, e_i)e_i = x - \varrho(s_i)x \in U$$

a musí být $B(x, e_i) = 0$.

- (b) Pokud B je degenerovaná, je $\mathbb{V}^\perp$ netriviální vlastní invariantní podprostor U reprezentace ϱ , a podle (a) nemůže existovat netriviální invariantní podprostor, který by v direktním součtu s $\mathbb{V}^\perp$ se rovnal $\mathbb{V}$.
- (c) Pokud je B nedegenerovaná, pak $\mathbb{V}^\perp = 0$ a neexistuje netriviální invariantní podprostor.
- (d) Uvažujme $A \in \text{End}(\mathbb{V})$ takové, že pro všechna $\varphi \in \varrho(W)$ platí komutativita $A\varphi = \varphi A$. Pro $\varphi = \varrho(s)$, $s \in S$ platí, že vlastní podprostor $\{e_s\}_{lin}$ operátoru $\varrho(s)$ je vlastní podprostor operátoru A s nějakým vlastním číslem a . Pak jádro $\ker(A - a)$ je nenulový invariantní podprostor reprezentace ϱ obsahující $\{e_s\}_{lin}$, které není podprostorem $\mathbb{V}^\perp$; musí podle (a) platit $\ker(A - a) = \mathbb{V}$. $\square$

Lemma 7.5. Necht $\varrho : G \rightarrow GL(\mathbb{E})$ je reprezentace *konečné* grupy G . Pak

- (a) existuje pozitivně definitní G –invariantní symetrická bilineární forma na $\mathbb{E}$,
- (b) ϱ je úplně reducibilní,
- (c) pokud jediná zobrazení, které komutují s ϱ jsou násobky identity, pak každé dvě nedege-
nerované symetrické bilineární G –invariantní formy jsou násobky jedna druhé.

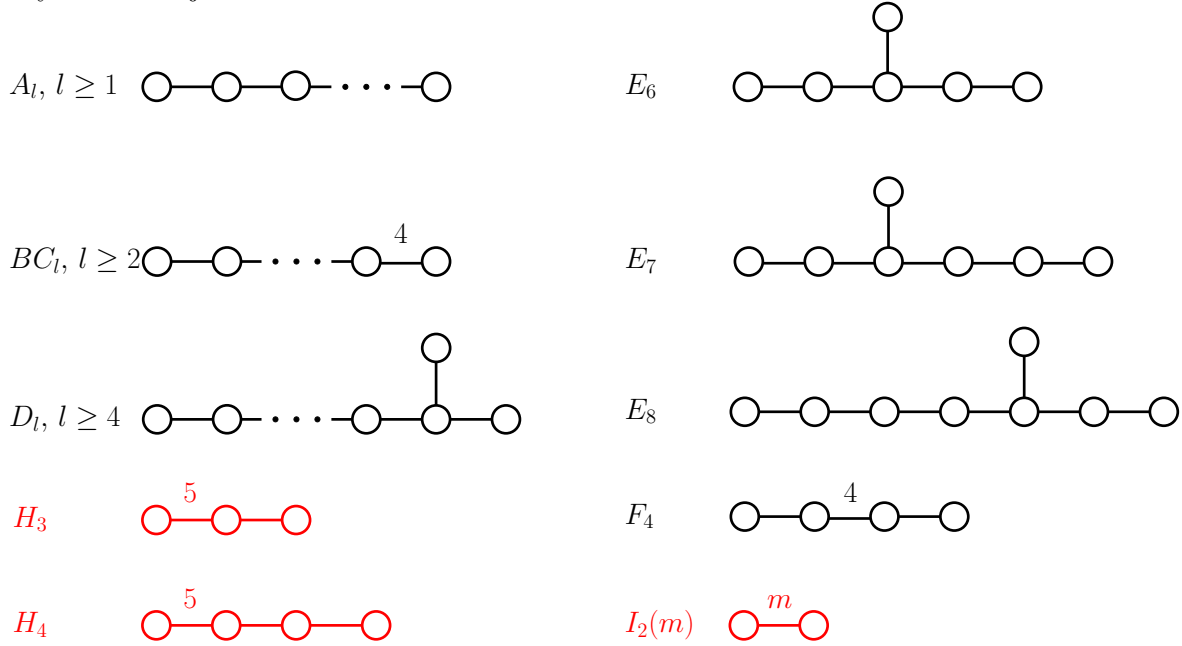
Věta 7.2. Pro konečný ireducibilní Coxeterův systém (W, S) je geometrická reprezentace ϱ ireducibilní a bilineární forma B pozitivně definitní.

Důkaz. Z bodu (b) Lemmatu 7.5 je geometrická reprezentace ϱ úplně reducibilní. Z bodu (b) Tvzení 7.4 musí být B nedegenerovaná a z (c) musí být ireducibilní a z (d) jediná zobrazení, které komutují s ϱ jsou násobky identity. Z bodu (c) Lemmatu 7.5 je každá bilineární symetrická W –invariantní forma násobkem B ; z bodu (a) existuje pozitivně definitní W –invariantní symetrická bilineární forma B' na $\mathbb{V}$ a musí platit $B = kB'$. Protože $B(e_s, e_s) = 1$ je $k > 0$. $\square$

Důsledek 7.6. Pro každý konečný Coxeterův systém (W, S) je forma B pozitivně definitní.

8 Klasifikace konečných Coxeterových systémů a grup zrcadlení

Věta 8.1. Necht (W, S) je konečný ireducibilní Coxeterův systém. Pak jeho Coxeterův graf je některý z následujících:



Důkaz. Důkaz se provádí za použití kritéria pozitivní definitnosti formy B (nebudeme předvádět). $\square$

Pro kořenový systém Δ s fundamentálním systémem $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Delta$ a množinou fundamentálních zrcadlení $S = \{s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_l}\}$ jsme označili pro $s, s' \in S$ číslo $m(s, s')$ řád prvku $ss' \in W(\Delta)$ a z Věty 6.1 víme, že dvojice $(W(\Delta), S)$ je konečný Coxeterův systém a platí

$$W(\Delta) = \langle S \mid (ss')^{m(s, s')} = 1, (s, s') \in S^2 \rangle.$$

Zkonstruuje nyní Coxeterův graf Coxeterova systému $(W(\Delta), S)$. Vrcholy jsou prvky z S a z Tvzení 6.1 víme, že $m(s_{\alpha_i}, s_{\alpha_j})$, $i, j \in \{1, \dots, l\}$ se vypočte jako

$$m(s_{\alpha_i}, s_{\alpha_j}) = \frac{\pi}{\arccos\left(-\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\|\|\alpha_j\|}\right)}.$$

Ukažme nyní, že lze zkonstruovat kořenové systémy Δ a tak, aby výsledné Coxeterovy grafy vyčerpaly všechny možnosti z Věty 8.1. Coxeterovy grafy pro grupy zrcadlení s kořenovými systémy A_l , B_l , C_l , D_l a $I_2(m)$ z Příkladů 9, 10, 11, 12 a 13 odpovídají příslušným grafům z Věty 8.1, kde B_l i C_l vedou na stejný graf BC_l . Zbývá sestavit kořenové systémy E_6 , E_7 , E_8 , H_3 , H_4 a F_4 .

E_8 :

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \lambda_i e_i \mid \lambda_i = \pm 1, \prod_{i=1}^8 \lambda_i = 1 \right\}$$

$$\Sigma = \left\{ e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5, e_5 - e_6, e_6 - e_7, e_6 + e_7, -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i \right\}$$

Pro zajímavost: $|\Delta| = 240$, $|W(\Delta)| = 696\,729\,600$

E_7 :

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 2 \leq i < j \leq 7\} \cup \{\pm(e_1 + e_8)\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \lambda_i e_i \mid \lambda_i = \pm 1, \lambda_1 = \lambda_8 = 1, \prod_{i=1}^8 \lambda_i = 1 \right\}$$

$$\Sigma = \left\{ e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5, e_5 - e_6, e_6 - e_7, e_6 + e_7, -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i \right\}$$

E_6 :

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 3 \leq i < j \leq 7\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \lambda_i e_i \mid \lambda_i = \pm 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_8 = 1, \prod_{i=1}^8 \lambda_i = 1 \right\}$$

$$\Sigma = \left\{ e_3 - e_4, e_4 - e_5, e_5 - e_6, e_6 - e_7, e_6 + e_7, -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i \right\}$$

F_4 :

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\}$$

$$\Sigma = \left\{ e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \right\}$$

H_3 : $\beta = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$$\Delta = \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 3\} \cup \left\{ \left(\pm \left(\beta + \frac{1}{2} \right), \pm \beta, \pm \frac{1}{2} \right), \left(\pm \beta, \pm \frac{1}{2}, \pm \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \right), \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \left(\beta + \frac{1}{2} \right), \pm \beta \right) \right\}$$

$$\Sigma = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \beta, \beta, -\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2} - \beta, \beta, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \beta, \beta \right) \right\}$$

H_4 :

$$\Delta = \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\} \cup \left\{ \left(\pm \left(\frac{1}{2} + \beta \right), \pm \beta, \pm \frac{1}{2}, 0 \right), +\text{sud.perm.sou.} \right\}$$

$$\Sigma = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \beta, \beta, -\frac{1}{2}, 0 \right), \left(-\frac{1}{2} - \beta, \beta, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \beta, \beta, 0 \right), \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} - \beta, \beta \right) \right\}$$

Věta 8.2. Množina tříd stabilně izomorfních konečných grup zrcadlení a množina tříd izomorfních konečných Coxeterových grup jsou ekvivalentní.

Důkaz. Uvažujme pouze ireducibilní prvky těchto množin - reducibilní vzniknou jako direktní součiny z ireducibilních. Z třídy stabilně izomorfních konečných grup zrcadlení vybereme reprezentanta a přiřadíme mu Coxeterův systém podle Věty 6.1. Z Věty 6.2 plyne, že dvěma stabilně izomorfním konečným grupám zrcadlení odpovídají dva izomorfní Coxeterovy systémy, takže toto přiřazení je dobře definované zobrazení z množiny tříd stabilně izomorfních konečných grup zrcadlení do množiny tříd izomorfních konečných Coxeterových grup. Z platnosti i obrácené implikace Věty 6.2 plyne, že toto zobrazení je prosté. Protože se podařilo zkonstruovat kořenové systémy takové, které při tomto zobrazení pokryjí celou klasifikaci z Věty 8.1, je toto zobrazení na, a tedy bijekcí. $\square$

9 Weylovy grupy

9.1 Kořenová mříž

Mříž $\mathcal{L}$ v prostoru $\mathbb{E}$ je $\mathbb{Z}$ –lineární obal některé báze $\mathbb{E}$. Konečná grupa zrcadlení $W(\Delta) \subset O(\mathbb{E})$ je **Weylova grupa**, pokud existuje mříž $\mathcal{L}$ taková, že $W\mathcal{L} = \mathcal{L}$, tzv. $W(\Delta)$ –**ekvivariantní mříž**.

Tvrzení 9.1. Pokud grupa zrcadlení $W(\Delta)$ je Weylova grupa, pak pro $\alpha, \beta \in \Sigma$, $\alpha \neq \beta$ platí

$$m(s_\alpha, s_\beta) \in \{2, 3, 4, 6\}.$$

Důkaz. Uvažujme bázi, jejíž $\mathbb{Z}$ –lineární obalem je mříž $\mathcal{L}$. Matice operátorů $\varphi \in W(\Delta)$ v této bázi mají koeficienty ze $\mathbb{Z}$ a tedy stopa $\text{tr } \varphi \in \mathbb{Z}$. Stopa operátoru $s_\alpha s_\beta$ je podle Tvrzení 6.1 a Příkladu 2 rovna

$$\text{tr}(s_\alpha s_\beta) = \dim \mathbb{E} - 2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)} \right).$$

Takže $\cos(2\pi/m(s_\alpha, s_\beta)) \in \{-1, -1/2, 0, 1/2\}$. □

Nechť $\Delta \subset \mathbb{E}$ je esenciální krystalografický systém. Kořenová mříž Q je definována jako $\mathbb{Z}$ –lineární obal množiny Δ . Označme pro všechna $x, y \in \mathbb{E}$ také

$$\langle x, y \rangle = \frac{2(x, y)}{(x, x)}.$$

Tvrzení 9.2. Pro kořenovou mříž esenciálního krystalografického systému Q platí

- (i) $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l$
- (ii) Q je $W(\Delta)$ –ekvivariantní.

Důkaz. Označme $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l$. Protože $\{s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_l}\}$ generují $W(\Delta)$ a $s_{\alpha_i}\alpha_j = \alpha_j - \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \alpha_i$, pro $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \in \mathbb{Z}$, je $\mathcal{L}$ mříž $W(\Delta)$ –ekvivariantní. Z Věty 3.1 platí, že pro všechna $\alpha \in \Delta$ existují $\varphi \in W(\Delta)$ a $\alpha_i \in \Sigma$ takové, že $\alpha = \varphi\alpha_i$ a tedy $\alpha \in \mathcal{L}$. Pak tedy platí $Q \subset \mathcal{L}$. □

Pro každé $\alpha \in \Delta$ definujeme duální kořen vztahem

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

Tvrzení 9.3. Množina duálních kořenů esenciálního krystalografického systému

$$\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathbb{E} \mid \alpha \in \Delta\}$$

je krystalografický systém.

Důkaz. Z axiomu (B-1) kořenového systému plyne, že $\lambda\alpha^\vee \in \Delta^\vee$ právě když $\lambda = \pm 1$. Z rovnosti

$$\frac{2(\alpha^\vee, \beta^\vee)}{(\alpha^\vee, \alpha^\vee)} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$$

plyne, že $\langle \alpha^\vee, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ a tedy platí krystalografický axiom (B-3). Identita

$$s_{\alpha^\vee}\beta^\vee = s_\alpha\beta^\vee = \frac{2s_\alpha\beta}{(\beta, \beta)} = \frac{2s_\alpha\beta}{(s_\alpha\beta, s_\alpha\beta)} = (s_\alpha\beta)^\vee$$

implikuje axiom (B-2), $s_{\alpha^\vee}\beta^\vee \in \Delta^\vee$. □

Tvrzení 9.4. Pro fundamentální systém $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ kořenového systému Δ je $\Sigma^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee\}$ fundamentální systém $\Delta^\vee$.

Důkaz. Každé $\alpha \in \Delta$ lze napsat jako $\alpha = \sum_{i=1}^l \lambda_i \alpha_i$ s nezápornými nebo nekladnými koeficienty λ_i . Pak každé $\alpha^\vee$ lze zapsat ve tvaru

$$\alpha^\vee = \sum_{i=1}^l \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{(\alpha, \alpha)} \lambda_i \alpha_i^\vee.$$

□

Platí $W(\Delta^\vee) = W(\Delta)$. Pro systémy B_l a C_l platí, že $\Delta(B_l)^\vee = \Delta(C_l)$ a opačně $\Delta(B_l) = \Delta(C_l)^\vee$. Pro ostatní ireducibilní esenciální krystalografické systémy platí $\Delta^\vee = \Delta$. Duální kořenová mříž je definovaná jako $\mathbb{Z}$ –lineární obal z $\Delta^\vee$. Pak platí

- (i) $Q^\vee = \mathbb{Z}\alpha_1^\vee \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l^\vee$,
- (ii) $Q^\vee$ je $W(\Delta)$ –ekvivariantní.

9.2 Váhová mříž

Pro danou mříž $\mathcal{L}$ je $\mathbb{Z}$ –**duální mříž** $\mathcal{L}^\perp$ definovaná jako

$$\mathcal{L}^\perp = \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathcal{L}\}.$$

Pokud $\mathcal{L} = \mathbb{Z}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}x_l$, pak $\mathcal{L}^\perp = \mathbb{Z}y_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}y_l$, kde $(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Pro esenciální krystalografický kořenový systém Δ je **váhová mříž** P definována jako $\mathbb{Z}$ –duální mříž k $Q^\vee$. Podmínka krystalografického systému (B-3) implikuje $Q \subset P$. Pro daný fundamentální systém $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ jsou **fundamentální váhy** $\{\omega_1, \dots, \omega_l\}$ dány vztahy $(\alpha_i^\vee, \omega_j) = \delta_{ij}$ a platí

$$P = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_l.$$

Duální fundamentální váhy $\{\omega_1^\vee, \dots, \omega_l^\vee\}$ dány vztahy $(\alpha_i, \omega_j^\vee) = \delta_{ij}$ a platí

$$P^\vee = \mathbb{Z}\omega_1^\vee \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_l^\vee.$$

Protože je $Q^\vee$ mříž $W(\Delta)$ –ekvivariantní, platí pro dané $p \in P$, $y \in Q^\vee$ a $\varphi \in W(\Delta)$, že $(\varphi p, y) = (p, \varphi^{-1}y) \in \mathbb{Z}$, a tedy $\varphi p \in P$, tzn. P a $P^\vee$ mříže jsou $W(\Delta)$ –ekvivariantní.

Příklad 14 (Systém A_l). Vezměme ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_{l+1}\}$ prostoru $\mathbb{R}^{l+1}$ a definujeme $\mathbb{E} = \{c_1 e_1 + \dots + c_{l+1} e_{l+1} \mid c_i \in \mathbb{R}, c_1 + \dots + c_{l+1} = 0\}$. Kořenový systém

$$\Delta = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$$

je pak esenciální a krystalografický a fundamentální váhy jsou dány vztahy

$$\omega_k = e_1 + \dots + e_k - \frac{k}{l+1}(e_1 + \dots + e_{l+1})$$

Příklad 15 (Systém B_l). Vezměme ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_l\}$ prostoru $\mathbb{E} = \mathbb{R}^l$ a máme kořenový systém

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm e_i\}$$

s fundamentálními vahami

$$\begin{aligned} \omega_k &= e_1 + \dots + e_k, \quad 1 \leq k < l \\ \omega_l &= \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_l). \end{aligned}$$

Příklad 16 (Systém C_l). Vezměme ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_l\}$ prostoru $\mathbb{E} = \mathbb{R}^l$ a máme kořenový systém

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm 2e_i\}.$$

s fundamentálními vahami

$$\omega_k = e_1 + \dots + e_k, \quad 1 \leq k \leq l$$

Příklad 17 (Systém D_l). Vezměme ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_l\}$ prostoru $\mathbb{E} = \mathbb{R}^l$ a máme kořenový systém

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\}.$$

s fundamentálními vahami

$$\begin{aligned} \omega_k &= e_1 + \dots + e_k, \quad 1 \leq k \leq l-2 \\ \omega_{l-1} &= \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_{l-1} - e_l) \\ \omega_l &= \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_{l-1} + e_l) \end{aligned}$$

Věta 9.1. Necht $W \subset O(\mathbb{E})$ je konečná esenciální grupa zrcadlení a $\mathcal{L}$ je W -ekvivariantní mříž. Pak existuje esenciální krystalografický kořenový systém $\Delta \subset \mathcal{L}$ takový, že

$$(i) \quad W = W(\Delta),$$

$$(ii) \quad Q \subset \mathcal{L} \subset P.$$

Důkaz. (bez důkazu)

□

10 Klasifikace krystalografických kořenových systémů

Dva kořenové systémy $\Delta \subset \mathbb{E}$ a $\Delta' \subset \mathbb{E}'$ jsou **izomorfní**, pokud existuje izomorfismus $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ takový, že

- (i) $f(\Delta) = \Delta'$,
- (ii) $\langle f\alpha, f\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle, \forall \alpha, \beta \in \Delta$.

Tvrzení 10.1. Pro kořenový systém $\Delta \subset \mathbb{E}$ a pro všechny $\alpha, \beta \in \Delta$ s úhlem θ platí

$$(D-1) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = 2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \theta,$$

$$(D-2) \quad \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta.$$

Tvrzení 10.2. Pro dva esenciální kořenové systémy $\Delta \subset \mathbb{E}$ a $\Delta' \subset \mathbb{E}'$ a lineární zobrazení $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ takové, že $f(\Delta) = \Delta'$ jsou následující tvrzení ekvivalentní

- (i) $\langle f\alpha, f\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle, \forall \alpha, \beta \in \Delta$,
- (ii) $s_{f\alpha}f = fs_{\alpha}$.
- (iii) f zachovává úhly mezi vektory a podíly délek $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ pro všechny $\alpha, \beta \in \Delta$.

Důkaz. Protože je kořenový systém Δ esenciální je lineární obal z $\Delta_{lin} = \mathbb{E}$ a tvrzení (ii) je ekvivalentní se vztahem $s_{f\alpha}f\beta = fs_{\alpha}\beta$ platným pro všechna $\beta \in \Delta$. Pak z rovností

$$\begin{aligned} fs_{\alpha}\beta &= f(\beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha) = f(\beta) - \langle \alpha, \beta \rangle f\alpha \\ s_{f\alpha}f\beta &= f(\beta) - \langle f\alpha, f\beta \rangle f\alpha \end{aligned}$$

plyne ekvivalence mezi (i) a (ii). Z (D-1) plyne implikace (iii) na (i). Necht platí (i) a θ, θ' jsou úhly mezi α, β a $f\alpha, f\beta$. Z (D-2) plyne, že $\cos \theta = \pm \cos \theta'$. Vzhledem k (D-1) musí mít tyto kosiny stejné znaménko a tedy $\cos \theta = \cos \theta'$ a tedy $\theta = \theta'$. Pak znovu z (D-1) plyne zachování podílu $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$. $\square$

Pro daný esenciální krystalografický systém Δ s fundamentálním systémem $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ je **Cartanova matice** definována jako $l \times l$ matice se složkami $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. Jiné pořadí vektorů v Σ implikuje řádkovou a sloupcovou permutaci v Cartanově matici, takové matice se ztotožňují. V tomto smyslu protože každé dva fundamentální systémy jsou konjugované, nezávisí Cartanova matice Δ na volbě fundamentálního systému Σ .

Věta 10.1. Pokud mají dva esenciální kořenové systémy $\Delta \subset \mathbb{E}$ a $\Delta' \subset \mathbb{E}'$ stejnou Cartanovu matici, pak jsou izomorfní.

Důkaz. (bez důkazu) $\square$

Protože platí $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ mohou díky (D-2) nastat pouze možnosti

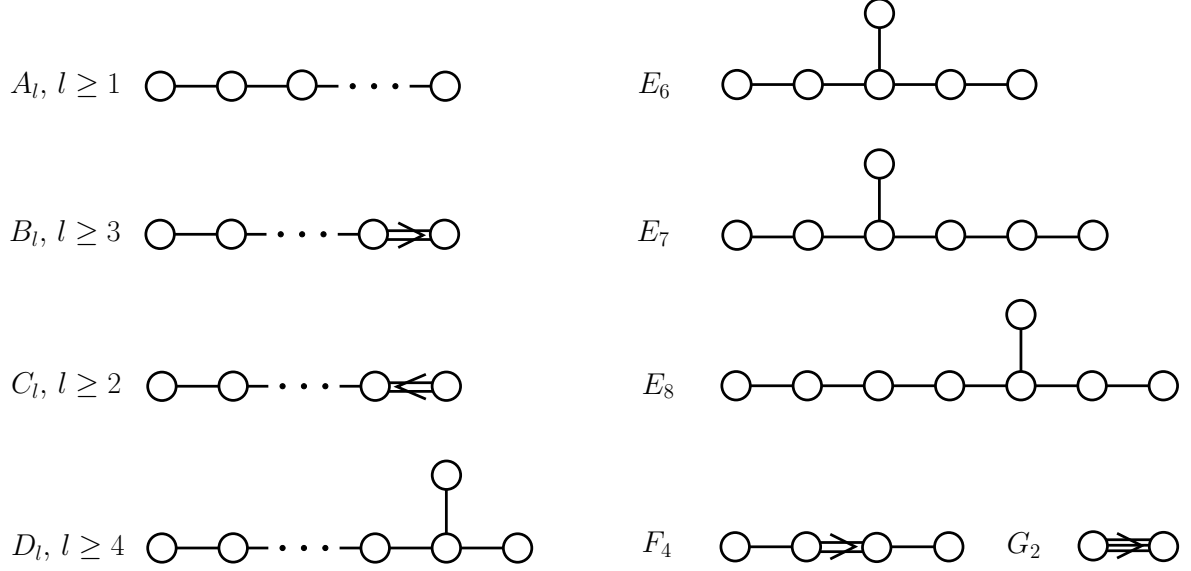
$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \quad (3)$$

Případ $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4$ vede z (D-2) na $\cos \theta = \pm 1$ a tedy $\alpha = \pm \beta$. Pokud předpokládáme, že $\|\alpha\| \geq \|\beta\|$, pak z (D-1) plyne, že $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |\langle \beta, \alpha \rangle|$. Pokud dále $\alpha, \beta \in \Sigma$, pak z Tvrzení 3.2 plyne, že $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ a tedy také $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$. Následující Tabulka 1 zachycuje všechny možnosti.

Tvrzení 10.3. Každý ireducibilní kořenový systém Δ může mít nejvíce dvě délky kořenů.

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\ \alpha\ ^2 / \ \beta\ ^2$
0	0	$\pi/2$	?
-1	-1	$2\pi/3$	1
-1	-2	$3\pi/4$	2
-1	-3	$5\pi/6$	3

Tabulka 1: Hodnoty $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\langle \beta, \alpha \rangle$, úhlu θ a podíly kvadrátů velikostí prostých kořenů krystalografických kořenových systémů.



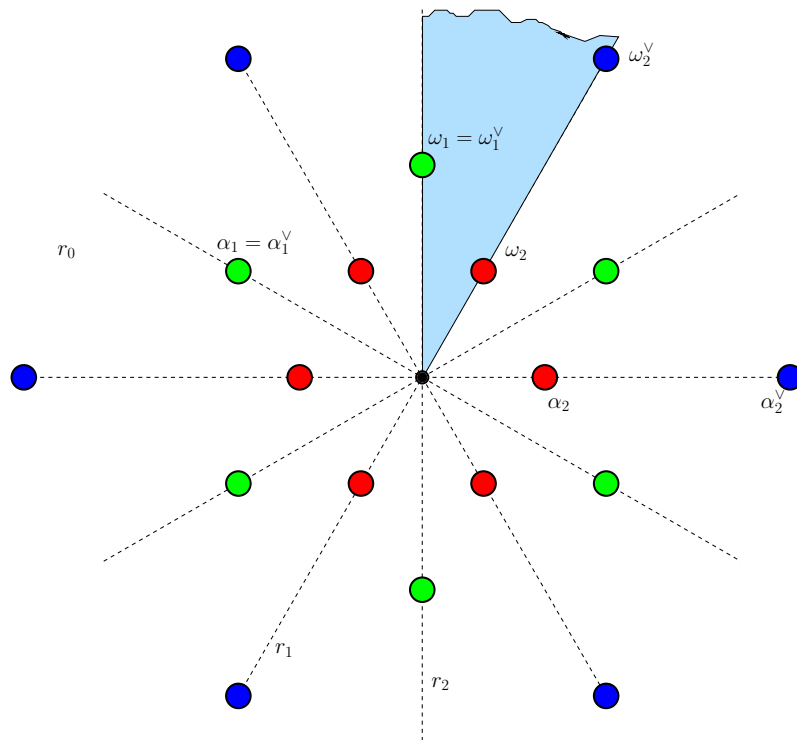
Obrázek 1: Dynkinovy diagramy ireducibilních krystalografických kořenových systémů.

Důkaz. Protože každý kořen je konjugovaný s nějakým kořenem z Σ , stačí dokázat tvrzení pro Σ . Pokud sestojíme konečnou grupu zrcadlení $W(\Delta)$, tak se musí nacházet v klasifikaci Věty 8.1. Uvažujme podgraf daného grafu tvořený stejnými vrcholy a pouze nečíslovanými hranami. Každý takový podgraf jakéhokoliv grafu z Věty 8.1 se rozpadá na maximálně dvě komponenty souvislosti. Víme, že pro kořeny spojené nečíslovanou hranou je $m(s_\alpha, s_\beta) = 3$ a tedy $\theta = 2\pi/3$ a z předchozí tabulky plyne, že $\|\alpha\| = \|\beta\|$. Všechny fundamentální kořeny nacházející se v jedné komponentě souvislosti tedy musí mít stejnou délku. $\square$

Dynkinův diagram krystalografického kořenového systému Δ má vrcholy fundamentálního systému Σ , a jednu, dvě nebo tři hrany podle hodnoty $\|\alpha\|^2 / \|\beta\|^2$ v tabulce. Dále obsahuje šipku od delšího ke kratšímu kořeni.

Věta 10.2. Každý ireducibilní esenciální krystalografický kořenový systém má svůj Dynkinův diagram tvaru na Obrázku 1.

Věta 10.3. Existují krystalografické kořenové systémy, které mají Dynkinovy diagramy z předchozí věty.



Obrázek 2: Ireducibilní krystalografický kořenový systém G_2 , duální kořenový systém, váhy, duální váhy a fundamentální Weylova komora.

11 Afinní Weylovy grupy

11.1 Afinní zrcadlení

Nechť $\Delta \subset \mathbb{E}$ je krystalografický kořenový systém. Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ a $\alpha \in \Delta$ definujeme nadrovinu

$$H_{\alpha,k} = \{t \in \mathbb{E} \mid (\alpha, t) = k\}.$$

Nadrovina $H_{\alpha,k}$ je zobecnění H_α a platí $H_{\alpha,0} = H_\alpha$. Zrcadlení $s_{\alpha,k}$ je definováno jako zrcadlení vzhledem k nadrovině $H_{\alpha,k}$ a tedy je dáno vztahem

$$s_{\alpha,k}x = x - (\alpha, x)\alpha^\vee + k\alpha^\vee.$$

Afinní Weylova grupa $W^{\text{aff}}(\Delta)$ je generována zrcadleními $s_{\alpha,k}$, $k \in \mathbb{Z}$ a $\alpha \in \Delta$.

Tvrzení 11.1. Platí $W^{\text{aff}}(\Delta) = Q^\vee \rtimes W(\Delta)$.

Důkaz. Protože generátory $s_{\alpha,0}$ generují $W(\Delta)$, je $W(\Delta)$ podgrupa $W^{\text{aff}}(\Delta)$. Translace $T(d)$, $d \in Q^\vee$ dané vztahem $T(d)x = x + d$ tvoří podgrupu, protože $T(d)T(d') = T(d + d')$, $T(0) = I$, $T^{-1}(d)x = x - d$. Generátory této podgrupy jsou obsaženy v $W^{\text{aff}}(\Delta)$, protože ze vztahu $s_{\alpha,1} = T(\alpha^\vee)s_\alpha$ plyne $T(\alpha^\vee) = s_{\alpha,1}s_\alpha \in W^{\text{aff}}(\Delta)$. Protože platí

$$s_{\beta_1,k_1} \cdots s_{\beta_r,k_r} = T(k_1\beta_1^\vee + s_{\beta_1}k_2\beta_2^\vee + \cdots + s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_{r-1}}k_r\beta_r^\vee)s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r},$$

platí $W^{\text{aff}}(\Delta) = Q^\vee W(\Delta)$. Všechna zobrazení $T(d)$ jsou pro $d \neq 0$ nekonečného řádu, takže žádný neleží v konečné podgrupě $W(\Delta)$ a platí $Q^\vee \cap W(\Delta) = \{I\}$. Protože platí

$$\varphi T(d)\varphi^{-1} = T(\varphi d)$$

je podgrupa $Q^\vee$ normální. □

11.2 Nejvyšší kořen

Tvrzení 11.2. Pro kořeny krystalografického systému $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \pm\beta$ platí

$$(i) \quad (\alpha, \beta) > 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in \Delta,$$

$$(ii) \quad (\alpha, \beta) < 0 \Rightarrow \alpha + \beta \in \Delta.$$

Důkaz. Pokud $(\alpha, \beta) > 0$, pak platí $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ a z podmínky (3) plyne, že buď $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ nebo $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$. Pokud $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, pak platí

$$\alpha - \beta = \alpha - \langle \beta, \alpha \rangle \beta = s_\beta \alpha \in \Delta.$$

Pokud $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, pak platí

$$\beta - \alpha = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha = s_\alpha \beta \in \Delta.$$

Navíc dále platí že $-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Delta$. Bod (ii) se ukáže podobně. □

Nechť $\Delta \subset \mathbb{E}$ je ireducibilní krystalografický kořenový systém a $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ je jeho systém prostých kořenů. Definujeme

$$Q^+ = \{x_1\alpha_1 + \cdots + x_l\alpha_l \mid x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0\}$$

Definujeme částečné uspořádání $\geq$ na $\mathbb{E}$ vztahem $x \geq y$, pokud $x - y \in Q^+$.

Věta 11.1. Existuje právě jedno $\xi \in \Delta$ takové, že $\xi \geq \alpha$ a $\|\xi\| \geq \|\alpha\|$, pro všechna $\alpha \in \Delta$.

Důkaz. Ukažme nejprve, že platí $(\xi, \alpha_i) \geq 0$ pro všechna $i \in \{1, \dots, l\}$ a existuje nějaké $i \in \{1, \dots, l\}$ tak, že

$$(\xi, \alpha_i) > 0. \quad (4)$$

Vezměme nějaké $\xi \in \Delta$ maximální, tzn. takové, že neexistuje větší element než $\xi \in \Delta$. Pokud by platilo pro nějaké $i \in \{1, \dots, l\}$, že $(\xi, \alpha_i) < 0$, pak z bodu (ii) Tvzení 11.2 plyne spor $\xi < \xi + \alpha_i \in \Delta$. Protože nenulové $\xi \in \Delta$ je vyjádřeno v bázi α_i , $i \in \{1, \dots, l\}$ nemohou být všechny skalární součiny (ξ, α_i) nulové.

Ukažme dále, že všechny koeficienty $h_i \in \mathbb{Z}$ v kombinaci

$$\xi = \sum_{i=1}^l h_i \alpha_i \quad (5)$$

jsou kladné. Protože z definice platí pro jakékoliv $\alpha \in \Delta^+$ a $\beta \in \Delta^-$ že $\alpha > \beta$, musí být $\xi \in \Delta^+$ tzn. $h_i \geq 0$. Rozložme nyní disjunktně $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ vztahy,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\alpha_i \mid h_i > 0\}, \\ \Sigma_2 &= \{\alpha_i \mid h_i = 0\}. \end{aligned}$$

Protože z Tvzení 3.2 platí pro všechna $\alpha \in \Sigma_1$ a $\beta \in \Sigma_2$, že $(\alpha, \beta) \leq 0$, musí existovat takové dva kořeny $\alpha \in \Sigma_1$ a $\beta \in \Sigma_2$ s vlastností $(\alpha, \beta) < 0$, jinak by systém nebyl ireducibilní. Pro takové $\beta \in \Sigma_2$ by pak platilo $(\xi, \beta) < 0$ a tedy $\xi < \xi + \beta \in \Delta$ by nebylo maximální.

Pokud jsou $\xi \in \Delta^+$ a $\xi' \in \Delta^+$ dva maximální elementy, pak musí ze vztahů (4) a (5) platit

$$(\xi, \xi') > 0. \quad (6)$$

Pak podle (i) Tvzení 11.2 musí buď platit $\xi' = \xi$ nebo $\xi - \xi' \in \Delta$. Pokud by platilo $\xi - \xi' \in \Delta$ pak buď $\xi - \xi' \in \Delta^+$ tzn. $\xi > \xi'$ nebo $-\xi + \xi' \in \Delta^+$ tzn. $\xi' > \xi$. $\square$

Tvzení 11.3. Pro $\xi \in \Delta$ takové, že $\xi \geq \alpha$ platí navíc pro všechna $\alpha \in \Delta$, že $\|\xi\| \geq \|\alpha\|$.

Důkaz. Z Věty 4.4 existuje pro každé $\alpha \in \Delta$ prvek $\varphi \in W(\Delta)$ a kořen $\beta \in \Delta$ tak, že

$$\beta = \varphi\alpha \in \overline{\mathcal{C}_0}.$$

Protože platí, že $\xi - \beta \in Q^+$ musí také pro všechna $t \in \overline{\mathcal{C}_0}$ platit

$$(\xi - \beta, t) \geq 0. \quad (7)$$

Pokud dosadíme do (7) postupně $t = \xi \in \overline{\mathcal{C}_0}$ a $t = \beta \in \overline{\mathcal{C}_0}$ dostaneme následující vztahy,

$$(\xi, \xi) \geq (\xi, \beta) \geq (\beta, \beta) = (\varphi\alpha, \varphi\alpha) = (\alpha, \alpha).$$

$\square$

Pro všechny ireducibilní kořenové systémy lze **nejvyšší kořen** ξ , který je vždy dlouhý, vyjádřit jako kombinaci

$$\xi = h_1 \alpha_1 + \dots + h_l \alpha_l, \quad h_i \in \mathbb{N}.$$

Coxeterovo číslo m je rovno $m = 1 + h_1 + \dots + h_l$.

Pro fundamentální systém $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ a kořen $\alpha_0 = -\xi$ označme $s_i \equiv s_{\alpha_i, 0}$ a $s_0 \equiv s_{-\alpha_0, 1}$ a pro $0 \leq i, j \leq l$ čísla m_{ij} řady prvků $s_i s_j$.

Věta 11.2. Dvojice $(W^{\text{aff}}(\Delta), \{s_0, \dots, s_l\})$ je Coxeterův systém a platí

$$W^{\text{aff}}(\Delta) = \langle \{s_0, \dots, s_l\} \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle.$$

Důkaz. (bez důkazu) $\square$

11.3 Afinní kořenové systémy

Pro ireducibilní krystalografický systém Δ je **afinní kořenový systém** Δ_{aff} definován jako

$$\Delta_{\text{aff}} = \Delta \times \mathbb{Z}.$$

Akce $W^{\text{aff}}(\Delta)$ na Δ_{aff} je pro $\Psi = T(d)\varphi \in W^{\text{aff}}(\Delta)$ definovaná vztahem

$$\Psi(\beta, k) = (\varphi\beta, k + (\varphi\beta, d)).$$

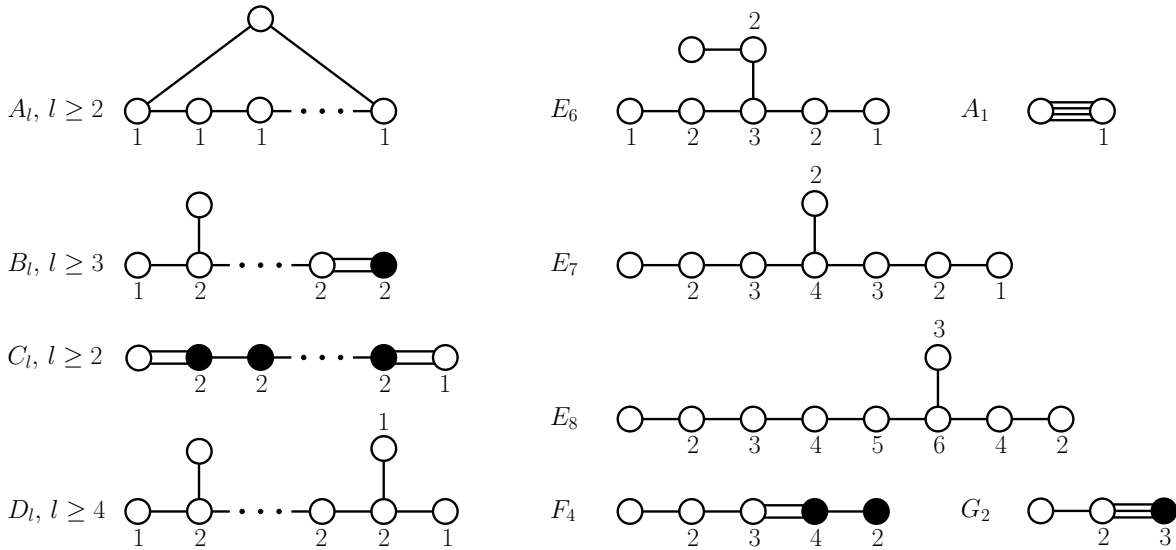
Pak platí

$$\begin{aligned}\Psi s_{\beta, k} \Psi^{-1} &= s_{\Psi(\beta, k)}, \\ \Psi H_{\beta, k} &= H_{\Psi(\beta, k)}.\end{aligned}$$

Pro fundamentální systém $\Sigma = \{\alpha_1 \dots, \alpha_l\} \subset \Delta$ je **afinní fundamentální systém** $\Sigma_{\text{aff}} \subset \Delta_{\text{aff}}$ zaveden vztahem

$$\Sigma_{\text{aff}} = \{(\alpha_1, 0), \dots, (\alpha_l, 0), (\alpha_0, 1)\}.$$

Afinní Dynkinův diagram vznikne přidáním vektoru α_0 ke kořenům Σ podle stejných pravidel. Afinní Dynkinův diagram je možné společně s Coxeterovými grafy sloučit do jednotného **Coxeterova–Dynkinova diagramu**. Coxeterovy–Dynkinovy diagramy afinních Weylových grup ireducibilních krystalografických kořenových systémů jsou na Obrázku 3.



Obrázek 3: Coxeterovy–Dynkinovy diagramy afinních Weylových grup ireducibilních krystalografických kořenových systémů.

Coxeterův graf Coxeterovy grupy $W^{\text{aff}}(\Delta)$ vznikne vynecháním černé výplně u krátkých kořenů a záměnou dvojitých, resp. trojitých hran za číslovanou hranu čísly 4, resp. 6. V případě A_1 je čtyřnásobná hrana nahrazena číslovanou hranou z symbolem $+\infty$. Afinní Dynkinův diagram vznikne vynecháním černé výplně a přidáním k dvojitým nebo trojitým hranám šipek ve směru krátkých kořenů. Číslo u každého vrcholu prostého kořenu α_i v afinním Dynkinově diagramu symbolizuje koeficient h_i v rozvoji nejvyššího kořene ξ . Vrcholy bez čísel symbolizují generátor s_0 v Coxeterově grafu, resp. kořen α_0 v afinním Dynkinově diagramu.

Rozklad afinního systému Δ_{aff} na množiny kladných a záporných afinních kořenů Δ_{aff}^+ a Δ_{aff}^- je definován vztahem

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{aff}}^+ &= \{(\alpha, n) \mid (n \geq 1) \vee (n = 0 \wedge \alpha \in \Delta^+)\}, \\ \Delta_{\text{aff}}^- &= \{(\alpha, n) \mid (n \leq -1) \vee (n = 0 \wedge \alpha \in \Delta^-)\}.\end{aligned}$$

Platí, že všechny prvky Δ_{aff}^+ lze vyjádřit jako lineární kombinace prvků z Σ_{aff} s nezápornými koeficienty a všechny prvky Δ_{aff}^- lze vyjádřit jako lineární kombinace prvků z Σ_{aff} s nekladnými koeficienty.

Výška h afinního kořenu $(\alpha, n) \in \Delta_{\text{aff}}$ je definována

$$h(\alpha, n) = h(\alpha) + n(h(\xi) + 1),$$

Označme $W_0 \subset W^{\text{aff}}(\Delta)$ podgrupu generovanou $\{s_0, \dots, s_l\}$.

Tvrzení 11.4. Pro $\lambda \in \Delta_{\text{aff}}^+$, $\lambda \notin \Sigma_{\text{aff}}$ existuje $\varphi \in W_0$ tak, že

- (i) $\varphi\lambda \in \Delta_{\text{aff}}^+$
- (ii) $h(\varphi\lambda) < h(\lambda)$.

11.4 Afinní Weylova komora

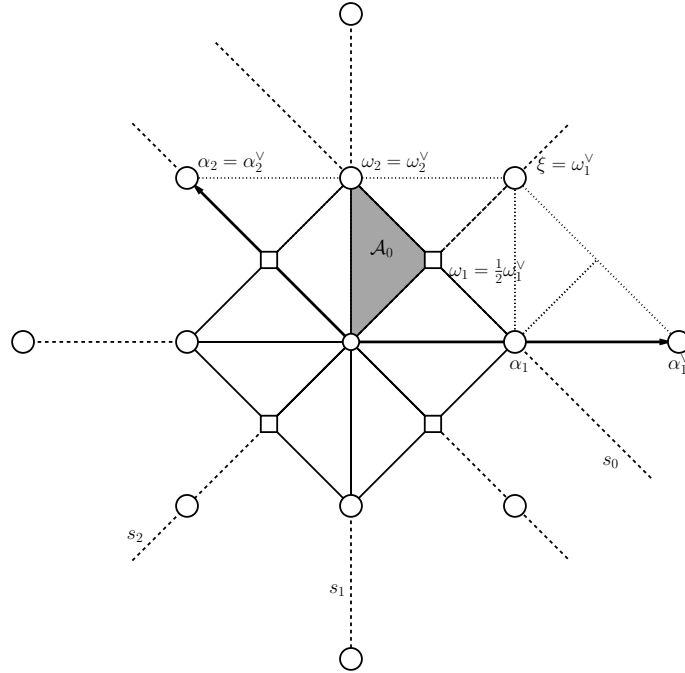
Afinní Weylova komora je komponenta souvislosti množiny $\mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta, k \in \mathbb{Z}} H_{\alpha, k}$. Pro daný fundamentální systém $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ je **fundamentální afinní Weylova komora** $\mathcal{A}_0$ dána vztahem

$$\mathcal{A}_0 = \{t \in \mathbb{E} \mid 0 < (t, \alpha) < 1, \alpha \in \Delta^+\}, \quad (8)$$

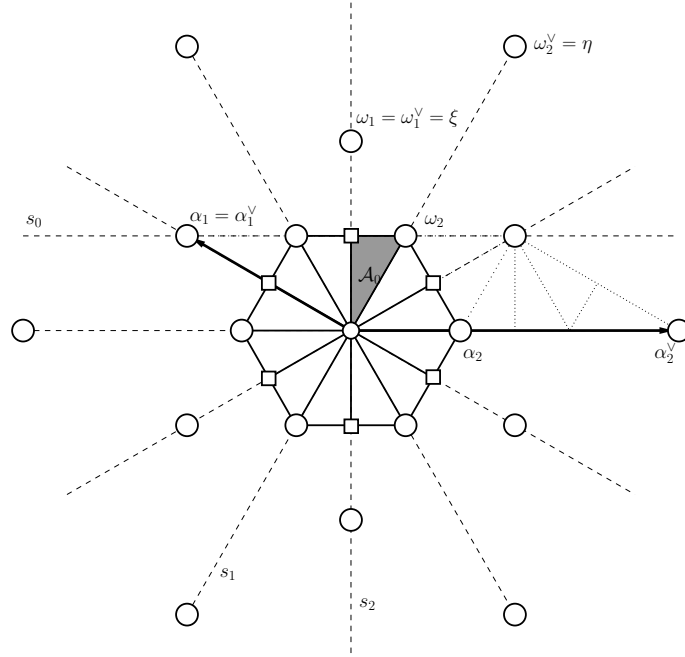
$$= \{t \in \mathbb{E} \mid (t, \alpha_i) > 0, (t, \xi) < 1\} \quad (9)$$

a její **stěny** jsou nadroviny $\{H_{\alpha_1, 0}, \dots, H_{\alpha_l, 0}, H_{-\alpha_0, 1}\}$. Uzávěr fundamentální afinní Weylovky komory $\overline{\mathcal{A}_0}$ lze přímo přepsat pomocí duálních fundamentálních vah $\omega_i^\vee$ jako následující l -simplex

$$\overline{\mathcal{A}_0} = \left[0, \frac{1}{h_1}\omega_1^\vee, \dots, \frac{1}{h_l}\omega_l^\vee\right]_\kappa.$$



Obrázek 4: Ireducibilní krystalografický kořenový systém C_2 , duální kořenový systém, váhy, duální váhy a fundamentální afinní Weylova komora.



Obrázek 5: Ireducibilní krystalografický kořenový systém G_2 , duální kořenový systém, váhy, duální váhy a fundamentální afinní Weylova komora.

Rozklad prvku $\varphi \in W^{\text{aff}}(\Delta)$ na generátory $\varphi = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ je **redukovaný**, pokud neexistuje rozklad s menším počtem prvků, $\varphi = s_{j_1} \dots s_{j_m}$, $m < k$; délka k redukovaného rozkladu $\varphi = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ je **délka** prvku $l(\varphi) = k$. Označme množinu $\Delta_{\text{aff}}(\varphi)$ kladných kořenů, které $\varphi \in W^{\text{aff}}(\Delta)$ zobrazuje na záporné kořeny,

$$\Delta_{\text{aff}}(\varphi) = \Delta_{\text{aff}}^+ \cap \varphi^{-1} \Delta_{\text{aff}}^-,$$

a $\gamma_{\text{aff}}(\varphi) = |\Delta_{\text{aff}}(\varphi)|$.

Věta 11.3. Délka $\varphi \in W^{\text{aff}}(\Delta)$ je rovna počtu kladných kořenů, které $\varphi \in W^{\text{aff}}(\Delta)$ zobrazuje na záporné kořeny,

$$\gamma_{\text{aff}}(\varphi) = l(\varphi).$$

Věta 11.4 (Vlastnost výměny; Matsumoto Exchange Property). Pokud $\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_k} \in W^{\text{aff}}(\Delta)$ má délku $l(\varphi) < k$, pak existují $1 \leq i < j \leq k$ tak, že

$$s_{a_i} \dots s_{a_{j-1}} = s_{a_{i+1}} \dots s_{a_j}.$$

Věta 11.5. Počet nadrovin $H_{\alpha, k}$ oddělujících $\overline{\mathcal{A}_0}$ a $\varphi(\mathcal{A}_0)$ je roven délce prvku $l(\varphi)$.

Věta 11.6. Akce grupy $W^{\text{aff}}(\Delta)$ na množině afinních Weylových komor je regulární.

Věta 11.7. Každá $W^{\text{aff}}(\Delta)$ –orbita obsahuje právě jeden prvek z $\overline{\mathcal{A}_0}$.

Pro dané $I \subset \{0, 1, \dots, l\}$ definujeme množinu $\mathcal{A}_I \subset \overline{\mathcal{A}_0}$ podmínkou, že $t \in \mathcal{A}_I$ právě když

$$\begin{aligned} (\alpha_0, t) &= 1, & 0 \in I \\ (\alpha_0, t) &< 1, & 0 \notin I \\ (\alpha_i, t) &= 0, & i \in I, 1 \leq i \leq l \\ (\alpha_i, t) &> 0, & i \notin I, 1 \leq i \leq l. \end{aligned}$$

Rozklad

$$\overline{\mathcal{A}_0} = \bigcup_{I \subset \{0,1,\dots,l\}} \mathcal{A}_I$$

je disjunktní. **Podgrupa stability (stabilizátor)** množiny $\Gamma \subset \mathbb{E}$ se označuje $W_\Gamma^{\text{aff}} \subset W^{\text{aff}}(\Delta)$

$$W_\Gamma^{\text{aff}} = \{ \varphi \in W^{\text{aff}}(\Delta) \mid \varphi x = x, x \in \Gamma \}.$$

Parabolická podgrupa $W_I^{\text{aff}} \subset W^{\text{aff}}(\Delta)$ **vzhledem k** Σ_{aff} je grupa generovaná s_i , $i \in I$.

Věta 11.8. Pro každé $x \in \mathcal{A}_I$ platí $W_x^{\text{aff}} = W_I^{\text{aff}}$.

11.5 Řád Weylovy grupy

Vyjádření fundamentálních kořenů α_i , $i \in \{1, \dots, l\}$ v bázi fundamentálních vah ω_i a duální verze tohoto vztahu mají tvar

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{j=1}^l (\alpha_i, \alpha_j^\vee) \omega_j \\ \alpha_i^\vee &= \sum_{j=1}^l (\alpha_i^\vee, \alpha_j) \omega_j^\vee. \end{aligned}$$

Tvrzení 11.5. Pro řády faktorgrup P/Q a $P^\vee/Q^\vee$ platí

$$|P/Q| = |P^\vee/Q^\vee| = \det C.$$

Důkaz. Matice R_α s vektory α_i ve sloupcích ve standardní bázi $\mathbb{R}^l$ určuje základní buňku I_α mříže Q , matice R_ω s vektory ω_i ve sloupcích ve standardní bázi $\mathbb{R}^l$ určuje základní buňku I_ω mříže P ,

$$I_\alpha = \{c_1\alpha_1 + \dots + c_l\alpha_l \mid 0 \leq c_i \leq 1\}, \quad (10)$$

$$I_\omega = \{c_1\omega_1 + \dots + c_l\omega_l \mid 0 \leq c_i \leq 1\}. \quad (11)$$

Podobně jsou definovány matice $R_{\alpha^\vee}$, $R_{\omega^\vee}$ a základní buňky $I_{\alpha^\vee}$, $I_{\omega^\vee}$. Pro Cartanovu matici $C_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j^\vee)$ platí vztahy

$$\begin{aligned} R_\alpha &= CR_\omega, \\ R_{\alpha^\vee} &= C^T R_{\omega^\vee}. \end{aligned}$$

Podíl absolutních hodnot determinantů R matic určují podíly objemů příslušných základních buněk a tedy řády faktorgrup P/Q a $P^\vee/Q^\vee$. Navíc platí $\det C \in \mathbb{N}$, protože matice

$$\frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{2} \dots \frac{(\alpha_l, \alpha_l)}{2} C$$

je pozitivně definitní Gramova matice α -báze. □

Hodnoty determinantů Cartanových matic jsou uvedeny v Tabulce 2.

Tvrzení 11.6. Pro objem fundamentální afinní Weylovy komory $\mathcal{A}_0$ platí

$$\text{vol}(\mathcal{A}_0) = \frac{1}{l! h_1 \dots h_l} |\det R_{\omega^\vee}|.$$

	$A_l \ (l \geq 1)$	$B_l \ (l \geq 3)$	$C_l \ (l \geq 2)$	$D_l \ (l \geq 4)$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$ W(\Delta) $	$(l+1)!$	$2^l l!$	$2^l l!$	$2^{l-1} l!$	$2^7 3^4 5$	$2^{10} 3^4 5 \cdot 7$	$2^{14} 3^5 5^2 7$	$2^7 3^2$	12
$\det C$	$l+1$	2	2	4	3	2	1	1	1
m	$l+1$	$2l$	$2l$	$2l-2$	12	18	30	12	6

Tabulka 2: Determinanty Cartanových matic, řady Weylových grup a Coxeterova čísla.

Důkaz. Absolutní hodnota Jacobiánu (lineárního) zobrazení, které zobrazuje standardní (kanonický) simplex tvořený vektory standardní báze $[0, e_1, \dots, e_l]_\kappa$ na simplex $\left[0, \frac{1}{h_1} \omega_1^\vee, \dots, \frac{1}{h_l} \omega_l^\vee\right]_\kappa$ je rovna $\frac{1}{h_1 \dots h_l} |\det R_{\omega^\vee}|$. Protože objem standardního simplexu je roven $1/l!$ tvrzení plyne z věty o substituci v objemovém integrálu. $\square$

Rozšířená afinní Weylova grupa $\widehat{W}^{\text{aff}}(\Delta)$ je definována vztahem

$$\widehat{W}^{\text{aff}}(\Delta) = P^\vee \rtimes W(\Delta).$$

Podgrupa $\Omega \subset \widehat{W}^{\text{aff}}(\Delta)$ rozšířené afinní Weylovy grupy je definována vztahem

$$\Omega = \left\{ \varphi \in \widehat{W}^{\text{aff}}(\Delta) \mid \varphi \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 \right\}.$$

a platí rozklad na polopřímý součin

$$\widehat{W}^{\text{aff}}(\Delta) = W^{\text{aff}}(\Delta) \rtimes \Omega.$$

Tvrzení 11.7. Pro řád podgrupy Ω platí

$$|\Omega| = \det C.$$

Důkaz. Máme následující vztahy pro faktorgrupy,

$$P^\vee / Q^\vee \cong \widehat{W}^{\text{aff}}(\Delta) / W^{\text{aff}}(\Delta) \cong \Omega.$$

$\square$

Věta 11.9. Pro podíly objemů platí

$$\frac{\text{vol}(I_{\omega^\vee})}{\text{vol}(\mathcal{A}_0)} = \frac{|W(\Delta)|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}.$$

Důkaz. Označme množinu $U \subset \widehat{W}^{\text{aff}}(\Delta)$

$$U = \left\{ \Psi \in \widehat{W}^{\text{aff}}(\Delta) \mid \Psi \mathcal{A}_0 \subset I_{\omega^\vee} \right\}.$$

Uvažujme $\Psi = T(d)\varphi \in U$, tzn. platí pro $t \in \mathcal{A}_0$ a pro $i \in \{1, \dots, l\}$, že

$$0 \leq (\Psi t, \alpha_i) \leq 1,$$

což je ekvivalentní vztahu

$$0 \leq (t, \varphi^{-1} \alpha_i) + (d, \alpha_i) \leq 1.$$

Protože mříže $P^\vee$ a Q jsou $\mathbb{Z}$ -duální, platí $(d, \alpha_i) \in \mathbb{Z}$. Pokud $\varphi^{-1} \alpha_i \in \Delta^+$, pak $0 < (t, \varphi^{-1} \alpha_i) < 1$ a tedy musí být $(d, \alpha_i) = 0$. Pokud $\varphi^{-1} \alpha_i \in \Delta^-$, pak $-1 < (t, \varphi^{-1} \alpha_i) < 0$ a tedy musí být $(d, \alpha_i) = 1$. Pro každé $\varphi \in W(\Delta)$ tedy existuje právě jedno $d \in P^\vee$ tak, že $T(d)\varphi \in U$. Platí tedy

$$|W(\Delta)| = |U|.$$

Pokud $\Psi \in U$, pak pro každé $\tau \in \Omega$ platí $\Psi \tau \in U$ a $\Psi \mathcal{A}_0 = \Psi \tau \mathcal{A}_0$. Opačně, pokud $\Psi, \Psi' \in U$ a $\Psi \mathcal{A}_0 = \Psi' \mathcal{A}_0$, pak $\Psi \Psi'^{-1} \in \Omega$. $\square$

Věta 11.10 (Weyl). Pro ireducibilní esenciální krystalografický kořenový systém Δ s Cartanovou maticí C a nejvyšším kořenem $\xi = h_1 \alpha_1 + \dots + h_l \alpha_l$ je řád Weylovy grupy

$$|W(\Delta)| = l! h_1 \dots h_l \det C.$$

12 Kořenové podsystemy

Kořenový podsystem $\Delta' \subset \Delta$ krystalografického systému Δ je **uzavřený**, pokud pro všechna $\alpha, \beta \in \Delta'$, takové že $\alpha + \beta \in \Delta$, platí $\alpha + \beta \in \Delta'$. Kořenové podsystemy $\Delta', \Delta'' \subset \Delta$ jsou **ekvivalentní**, pokud existuje $\varphi \in W(\Delta)$ takové, že $\Delta' = \varphi\Delta''$. Pro každé $t \in \mathbb{E}$ definujeme podmnožinu $\Delta(t) \subset \Delta$

$$\Delta(t) = \{\alpha \in \Delta \mid (\alpha, t) \in \mathbb{Z}\}.$$

Tvrzení 12.1. Pro každé $t \in \mathbb{E}$ je $\Delta(t)$ uzavřený kořenový podsystem.

Důkaz. Pro $\alpha \in \Delta(t)$ platí, že $-\alpha \in \Delta(t)$, tím je splněn axiom (B-1). Pro $\alpha, \beta \in \Delta(t)$ platí z krystalografičnosti kořenového systému, že $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ a tedy $(s_\alpha \beta, t) = (\beta, t) - \langle \alpha, \beta \rangle(\alpha, t) \in \mathbb{Z}$, tzn. (B-2) je splněno. Pokud $\alpha + \beta \in \Delta$, pak $(\alpha + \beta, t) = (\alpha, t) + (\beta, t) \in \mathbb{Z}$ a $\alpha + \beta \in \Delta(t)$. $\square$

Tvrzení 12.2. Necht $\Delta' \subset \Delta''$ jsou kořenové podsystemy s kořenovými mřížemi Q' a Q'' a Δ' je uzavřený. Pak $\Delta' = \Delta''$ právě když $Q' = Q''$.

Důkaz. Stačí ukázat implikaci, že pokud $Q' = Q''$, pak $\Delta'' \subset \Delta'$. Každý kořen $\alpha \in \Delta'' \subset Q''$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m, \quad \alpha_i \in \Delta'.$$

Soubor vektorů $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \Delta'$ lze volit lineárně nezávislý, a navíc lze volit mezi α_i a $-\alpha_i$ tak, aby platilo $\lambda_i \in \mathbb{N}$. Nyní postupujeme indukcí na součet $\lambda_1 + \dots + \lambda_m$. Pokud $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$, pak $\alpha = \alpha_i \in \Delta'$. Pokud $\lambda_1 + \dots + \lambda_m > 1$, musí pro nějaké $i \in \{1, \dots, m\}$ platit, že $(\alpha_i, \alpha) > 0$; jinak by

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\alpha, \alpha_i) \leq 0,$$

tzn. $\alpha = 0$. Pak platí podle Tvrzení 11.2, platí že $\alpha - \alpha_i \in \Delta''$. Protože podle indukčního předpokladu je $\alpha - \alpha_i \in \Delta'$ a systém Δ' je uzavřený, dostáváme $\alpha = (\alpha - \alpha_i) + \alpha_i \in \Delta'$. $\square$

Tvrzení 12.3. Pro každý vlastní maximální uzavřený kořenový podsystem Δ' existuje $t \in \mathbb{E}$ takové, že $\Delta' = \Delta(t)$.

Důkaz. Pokud máme vlastní uzavřený kořenový podsystem $\Delta' \subset \Delta$, $\Delta' \neq \Delta$, pak podle Tvrzení 12.2 musí platit $Q' \subset Q$, $Q' \neq Q$. Protože platí $(Q^\perp)^\perp = Q$, implikuje nerovnost $Q' \neq Q$ nerovnost $(Q')^\perp \neq Q^\perp$. Pak pro $t \in (Q')^\perp$ a $t \notin Q^\perp$ platí $\Delta' \subset \Delta(t)$. Protože Δ' je maximální, platí $\Delta' = \Delta(t)$. $\square$

Tvrzení 12.4. Pokud pro $x, y \in \mathbb{E}$ existuje $\Psi \in W^{\text{aff}}(\Delta)$ tak, že $x = \Psi y$, pak existuje $\varphi \in W(\Delta)$ tak, že $\Delta(x) = \varphi\Delta(y)$.

Důkaz. Pokud $x = \varphi y + d$, $d \in Q^\vee$, pak pro $\alpha \in \Delta$ platí $(\alpha, x) = (\alpha, \varphi y + d) = (\alpha, \varphi y) + (\alpha, d)$. Protože vždy $(\alpha, d) \in \mathbb{Z}$, platí $\Delta(x) = \varphi\Delta(y)$. $\square$

Věta 12.1. Pro $t \in \mathcal{A}_I$ je $\Delta(t)$ je kořenový systém s fundamentálním systémem $\{\alpha_I\}_{i \in I}$.

Důkaz. Podle rozkladu $\overline{\mathcal{A}}_0$ platí pro všechna $i \in I$, že $(\alpha_i, t) \in \mathbb{Z}$, tzn. $\{\alpha_I\}_{i \in I} \subset \Delta(t)$. Soubor vektorů $\{\alpha_I\}_{i \in I}$ je lineárně nezávislý, protože soubor prostých kořenů je lineárně nezávislý a α_0 je vyjádřen jako jeho kombinace se všemi nenulovými koeficienty. Pro $\alpha \in \Delta(t)$ z definice (8) musí platit buď $(\alpha, t) = 0$ nebo $(\alpha, t) = \pm 1$.

(i) Pokud platí $(\alpha, t) = 0$ a $\alpha \in \Delta^+$, pak

$$0 = (\alpha, t) = \sum_{i=1}^l \lambda_i (\alpha_i, t), \quad \lambda_i \geq 0$$

a musí tedy být $\lambda_i = 0$, $i \notin I$. Kořen $\alpha \in \Delta(t) \cap \Delta^+$ lze tedy vyjádřit jako kombinaci vektorů z $\{\alpha_I\}_{i \in I}$ s nezápornými koeficienty. Podobně pokud platí $(\alpha, t) = 0$ a $\alpha \in \Delta^-$, lze kořen $\Delta(t) \cap \Delta^-$ vyjádřit jako kombinaci vektorů z $\{\alpha_I\}_{i \in I}$ s nekladnými koeficienty.

(ii) Pokud $(\alpha, t) = 1$, musí být $\alpha \in \Delta^+$. Pak protože $\xi \geq \alpha$, platí $(\xi - \alpha, t) \geq 0$ a tedy

$$1 \geq (\xi, t) \geq (\alpha, t) = 1.$$

tzn. $(\xi, t) = 1$. Dále pak z vlastnosti $\xi - \alpha \in Q^+$ dostáváme

$$0 = (\xi - \alpha, t) = \sum_{i=1}^l k_i(\alpha_i, t), \quad k_i \geq 0$$

a musí být $k_i = 0$, $i \notin I$. Kořen $\alpha \in \Delta(t) \cap \Delta^+$ lze tedy vyjádřit jako

$$\alpha = -\alpha_0 - \sum_{i \in I \setminus \{0\}} k_i \alpha_i,$$

tzn. kombinaci vektorů z $\{\alpha_I\}_{i \in I}$ s nekladnými koeficienty. Podobně pokud platí $(\alpha, t) = -1$ a $\alpha \in \Delta^-$, lze kořen $\Delta(t) \cap \Delta^-$ vyjádřit jako kombinaci vektorů z $\{\alpha_I\}_{i \in I}$ s nezápornými koeficienty. $\square$

Věta 12.2 (Borel – de Siebenthal). Nechť Δ je ireducibilní krystalografický kořenový systém s fundamentálním systémem Δ a nejvyšším kořenem $-\alpha_0 = \xi = h_1\alpha_1 + \dots + h_l\alpha_l$. Pak maximální uzavřené kořenové podsystemy jsou ekvivalentní kořenovým systémům s fundamentálními systémy

- (i) $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_l\}$ pro $h_i = 1$
- (ii) $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_l\}$ pro h_i prvočíslo.

13 Formální identity

13.1 Vektory ϱ_K

Definujme vektor ϱ jako polovinu ze součtu všech kladných kořenů,

$$\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha.$$

Pro každou podmnožinu $K \subset \Delta^+$ definujme vektory

$$\varrho_K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} k_\alpha \alpha = \varrho - \sum_{\alpha \in K} \alpha,$$

kde

$$k_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha \in \Delta^+ \setminus K \\ -1, & \alpha \in K. \end{cases}$$

Protože pro $\beta \in \Delta^+$ zrcadlení s_β permutuje $\Delta^+ \setminus \{\beta\}$ a $s_\beta \beta = -\beta$, permutuje s_β vektory ϱ_K , tzn. celé $W(\Delta)$ permutuje vektory ϱ_K a platí

$$s_\beta \varrho = \varrho - \beta. \quad (12)$$

Věta 13.1. Necht $\mathcal{C}_0$ je fundamentální komora příslušná systému $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Pak platí

- (i) Pouze prvek ϱ leží z množiny všech ϱ_K v komoře $\mathcal{C}_0$.
- (ii) Každá komora $\mathcal{C} = \varphi \mathcal{C}_0$, $\varphi \in W(\Delta)$ obsahuje právě jedno ϱ_K a platí $\varrho_K = \varphi \varrho$, kde $K = \Delta(\varphi)$. Navíc platí

$$\det \varphi = (-1)^{l(\varphi)} = (-1)^{|K|}. \quad (13)$$

Důkaz. (i) Protože pro s_{α_i} , $1 \leq i \leq l$ platí, že $s_{\alpha_i} \varrho = \varrho - \alpha_i$ musí tedy platit ze vztahu pro zrcadlení (A-1), že

$$\frac{2(\alpha_i, \varrho)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = 1,$$

a tedy $(\alpha_i, \varrho) > 0$, tzn. $\varrho \in \mathcal{C}_0$. Pokud by platilo $\varrho_K = \varrho - x \in \mathcal{C}_0$, se značením $x = \sum_{\alpha \in K} \alpha$, pak

$$0 < \left(\varrho - x, \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right) = 1 - \frac{2(\alpha_i, x)}{(\alpha_i, \alpha_i)}.$$

Protože x je součet kořenů, platí $\frac{2(\alpha_i, x)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \mathbb{Z}$. Pak musí platit $(\alpha_i, x) \leq 0$, a zapíšeme-li součet nějakých kladných kořenů x ve tvaru $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i \alpha_i$, $\lambda_i \geq 0$, dostaneme

$$(x, x) = \sum_{i=1}^l \lambda_i (\alpha_i, x) \leq 0,$$

tzn. $x = 0$.

(ii) Každá komora je ve tvaru $\varphi \mathcal{C}_0$ pro jednoznačně určené $\varphi \in W(\Delta)$. Musí obsahovat právě jeden prvek ϱ_K , jinak by také dva prvky $\varphi^{-1} \varrho_K$ ležely v $\mathcal{C}_0$, a tento prvek musí být $\varrho_K = \varphi \varrho \in \varphi \mathcal{C}_0$ a z definic platí $K = \Delta(\varphi)$. Protože φ je součinem $l(\varphi) = |\Delta(\varphi)|$ generujících zrcadlení s determinanem -1 platí uvedená rovnost. $\square$

13.2 Antisymetrické formální sumy

Grupový okruh $\mathbb{Z}[\mathbb{E}]$ aditivní grupy Euklidovského prostoru $\mathbb{E}$ je množina funkcí s konečným supportem $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{Z}$ s operacemi definovanými bodově a násobením daným konvolucí,

$$f_1 \cdot f_2(y) = \sum_{x \in \mathbb{E}} f_1(x) f_2(y - x).$$

Pro účely zápisu tohoto prostoru funkcí se používá multiplikativní zápis aditivní grupy Euklidovského prostoru $\mathbb{E}$, kdy prvky v multiplikativním zápisu jsou značeny e^x , $x \in \mathbb{E}$ a tedy platí $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. Potom prvky z prostoru funkcí $f \in \mathbb{Z}[\mathbb{E}]$ jsou zapisovány jako konečný součet, tzv. **formální suma**

$$f = \sum_{x \in \mathbb{E}} f(x) e^x.$$

V tomto zápisu se konvoluční násobení $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[\mathbb{E}]$ realizuje standardním komutativním násobením závorek ve formálních sumách,

$$f_1 \cdot f_2 = \sum_{x, z \in \mathbb{E}} f_1(x) f_2(z) e^{x+z} = \sum_{y \in \mathbb{E}} \left(\sum_{x \in \mathbb{E}} f_1(x) f_2(y - x) \right) e^y.$$

Každé formální sumě f je přiřazena **komplexní funkce** $\tilde{f} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ vztahem

$$\tilde{f}(t) = \sum_{x \in \mathbb{E}} f(x) \exp(2\pi i(x, t)).$$

Pomocí lexikografického uspořádání na $\mathbb{E}$ se definuje maximální člen f jako maximální bod $x \in \mathbb{E}$ ze supportu f . Maximální člen součinu funkcí je pak součin maximálních členů součinitelů. Pro $f_1 \neq 0$ a $f_2 \neq 0$ pak tedy platí $f_1 f_2 \neq 0$, tzn. $\mathbb{Z}[\mathbb{E}]$ je obor integrity. Lze tedy uvažovat i podíly formálních sum jako prvky z podílového tělesa $\mathbb{Z}[\mathbb{E}]$.

Pro Weylovu grupu $W(\Delta)$ je akce $\varphi \in W(\Delta)$ na $\mathbb{Z}[\mathbb{E}]$ definována vztahem

$$\varphi f = \sum_{x \in \mathbb{E}} f(\varphi^{-1}x) e^x = \sum_{x \in \mathbb{E}} f(x) e^{\varphi x}.$$

Pokud platí pro všechna $\varphi \in W(\Delta)$, že

$$\varphi f = (\det \varphi) f,$$

nazývá se formální suma f **antisymetrická**. Pro každou podmnožinu $K \subset \Delta^+$ definujeme formální sumy $\Psi(\varrho_K)$ ve tvaru

$$\Psi(\varrho_K) = \sum_{\varphi \in W(\Delta)} (\det \varphi) e^{\varphi \varrho_K}$$

Tvrzení 13.1. Pro všechna $\varphi \in W(\Delta)$ platí

(i)

$$\varphi \Psi(\varrho_K) = (\det \varphi) \Psi(\varrho_K) = \Psi(\varphi^{-1} \varrho_K)$$

(ii) Pokud ϱ_K neleží v žádné komoře, platí $\Psi(\varrho_K) = 0$. Pokud $\varrho_K = \varphi \varrho$ leží v komoře $\varphi \mathcal{C}_0$, platí

$$\Psi(\varrho_K) = \det(\varphi) \Psi(\varrho).$$

Důkaz. (i) První rovnost se odvodí přeindexováním prvků v sumě, dalším přeindexováním vznikne druhá rovnost.

(ii) Pokud ϱ_K neleží v komoře, musí ležet na některé z nadrovin H_α a platí $s_\alpha \varrho_K = \varrho_K$, tzn. $\Psi(\varrho_K) = \Psi(s_\alpha \varrho_K) = \det(s_\alpha) \Psi(\varrho_K) = -\Psi(\varrho_K)$. $\square$

13.3 Weylova a MacDonalдова identita

Označme Ψ_0 formální sumu danou následujícím součinem,

$$\Psi_0 = e^\varrho \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha}).$$

Roznásobením závorek dostáváme ekvivalentní vyjádření Ψ_0 ve tvaru

$$\Psi_0 = e^\varrho \sum_{K \subset \Delta^+} (-1)^{|K|} e^{-\sum_{\alpha \in K} \alpha} = \sum_{K \subset \Delta^+} (-1)^{|K|} e^{\varrho_K}. \quad (14)$$

Tvrzení 13.2. Pro $\beta \in \Delta^+$ platí

$$s_\beta \Psi_0 = -\Psi_0.$$

Důkaz. Protože s_β permutuje $\Delta^+ \setminus \{\beta\}$ a platí vztah $s_\beta \beta = -\beta$ současně se vztahem (12), dostáváme

$$\begin{aligned} s_\beta \Psi_0 &= e^{s_\beta \varrho} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-s_\beta \alpha}) = e^{\varrho - \beta} (1 - e^\beta) \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \{\beta\}} (1 - e^{-\alpha}) \\ &= e^\varrho (e^{-\beta} - 1) \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \{\beta\}} (1 - e^{-\alpha}) = -\Psi_0. \end{aligned}$$

□

Důsledek 13.3. Formální suma Ψ_0 je antisymetrická.

Věta 13.2 (Weylova identita; Weyl denominator formula).

$$\Psi(\varrho) = e^\varrho \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})$$

Důkaz. Protože formální suma Ψ_0 je antisymetrická, dostáváme s využitím vyjádření (14) vztahy

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \frac{1}{|W(\Delta)|} \sum_{\varphi \in W(\Delta)} (\det \varphi) \varphi \Psi_0 = \frac{1}{|W(\Delta)|} \sum_{\varphi \in W(\Delta)} (\det \varphi) \sum_{K \subset \Delta^+} (-1)^{|K|} e^{\varphi \varrho_K} \\ &= \frac{1}{|W(\Delta)|} \sum_{K \subset \Delta^+} (-1)^{|K|} \Psi(\varrho_K). \end{aligned}$$

Vynecháním nulových sčítanců podle bodu (ii) Tvrzení 13.1 a ze vztahu (13) dostáváme

$$\frac{1}{|W(\Delta)|} \sum_{K \subset \Delta^+} (-1)^{|K|} \Psi(\varrho_K) = \frac{1}{|W(\Delta)|} \sum_{\varphi \in W(\Delta)} (-1)^{l(\varphi)} \det(\varphi) \Psi(\varrho) = \Psi(\varrho).$$

□

Důsledek 13.4. Pro komplexní funkci $\tilde{\Psi}_0 : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ tedy platí následující rozklad na součin,

$$\tilde{\Psi}_0(t) = \sum_{\varphi \in W(\Delta)} \det(\varphi) e^{2\pi i(\varphi \varrho, t)} = e^{2\pi i(\varphi \varrho, t)} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-2\pi i(\alpha, t)})$$

a tedy podle vyjádření (8) je funkce $\tilde{\Psi}_0$ nenulová na fundamentální afinní Weylově komoře $\mathcal{A}_0$ a nulová na jejích hranicích. Funkci $\tilde{\Psi}_0$ lze chápat jako zobenění funkce sinus na krystalografické kořenové systémy.

Věta 13.3 (MacDonaldova identita).

$$\sum_{\varphi \in W(\Delta)} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - te^{-\varphi\alpha}}{1 - e^{-\varphi\alpha}} = \sum_{\varphi \in W(\Delta)} t^{l(\varphi)}$$

Důkaz. Protože Ψ_0 je antisymetrická formální suma, platí všechna $\varphi \in W(\Delta)$, že

$$\varphi\Psi_0 = e^{\varphi\varrho} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\varphi\alpha}) = (\det \varphi)\Psi_0.$$

Úpravou a vynásobením $\det \varphi$ a použitím $(\det \varphi)^2 = 1$ dostaneme ekvivalentní vyjádření ve tvaru

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1}{1 - e^{-\varphi\alpha}} = \frac{(\det \varphi)e^{\varphi\varrho}}{\Psi_0}.$$

Pak upravujeme následující rovnosti

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi \in W(\Delta)} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - te^{-\varphi\alpha}}{1 - e^{-\varphi\alpha}} &= \sum_{\varphi \in W(\Delta)} \frac{(\det \varphi)e^{\varphi\varrho}}{\Psi_0} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - te^{-\varphi\alpha}) \\ &= \frac{1}{\Psi_0} \sum_{\varphi \in W(\Delta)} (\det \varphi)e^{\varphi\varrho} \sum_{K \subset \Delta^+} (-t)^{|K|} e^{-\varphi \sum_{\alpha \in K} \alpha} \\ &= \frac{1}{\Psi_0} \sum_{K \subset \Delta^+} (-t)^{|K|} \Psi(\varrho_K). \end{aligned}$$

Vynecháním nulových sčítanců podle bodu (ii) Tvrzení 13.1 a ze vztahu (13) získáme dále

$$\frac{1}{\Psi_0} \sum_{K \subset \Delta^+} (-t)^{|K|} \Psi(\varrho_K) = \frac{1}{\Psi_0} \sum_{\varphi \in W(\Delta)} (-t)^{l(\varphi)} \det(\varphi) \Psi(\varrho) = \frac{\Psi(\varrho)}{\Psi_0} \sum_{\varphi \in W(\Delta)} t^{l(\varphi)}. \quad (15)$$

Tvrzení věty pak dostaneme použitím Weylovy identity. $\square$

Důsledkem MacDonaldovy identity je následující polynomiální identita, která svazuje výšku kladných kořenů $h(\alpha)$, $\alpha \in \Delta^+$ s délkou prvků Weylovy grupy $l(\varphi)$, $\varphi \in W(\Delta)$.

Věta 13.4 (Polynomiální identita).

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - t^{h(\alpha)+1}}{1 - t^{h(\alpha)}} = \sum_{\varphi \in W(\Delta)} t^{l(\varphi)}$$

Důkaz. Homomorfismus Φ z podílového tělesa oboru integrity $\mathbb{Z}[\mathbb{E}]$ do podílového tělesa okruhu polynomů $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ je generován vztahem pro $\alpha_i \in \Sigma$, $i \in \{1, \dots, l\}$

$$e^{\alpha_i} \mapsto t^{-1},$$

tzn. $\Phi(e^\alpha) = t^{-h(\alpha)}$, $\alpha \in \Delta$. Aplikací tohoto homomorfismu na MacDonaldovu identitu dostáváme vztah

$$\sum_{\varphi \in W(\Delta)} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - t^{h(\varphi\alpha)+1}}{1 - t^{h(\varphi\alpha)}} = \sum_{\varphi \in W(\Delta)} t^{l(\varphi)}.$$

Uvažujme dále, že pro $\varphi \in W(\Delta)$, $\varphi \neq 1$ s redukováným rozkladem $\varphi = s_{a_1} \dots s_{a_k}$ platí $l(\varphi) > 0$ a tedy podle Věty 4.1 je $\beta = s_{a_k} s_{a_{k-1}} \dots s_{a_2} \alpha_{a_1} \in \Delta(\varphi)$. Máme tedy $\beta \in \Delta^+$ takové, že $\varphi\beta = s_{a_1} \alpha_{a_1} = -\alpha_{a_1}$. Pro každé $\varphi \in W(\Delta)$, $\varphi \neq 1$ tedy existuje $\beta \in \Delta^+$ takové, že $h(\varphi\beta) = -1$ a tedy platí

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - t^{h(\varphi\alpha)+1}}{1 - t^{h(\varphi\alpha)}} = 0.$$

$\square$