

1. Diferencovatelná varieta, tečné vektory, tečný prostor, vektorové pole a jeho int. křivky, Lieova algebra vekt. poli, tečné zobrazení

Def: M je topologická varieta dimenze $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ M je Hausdorffův topologický prostor

Topologický prostor: $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, ii) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$, iii) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

2) M má spočetnou topologickou bázi
3) M je lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^n$, tj. $(\forall p \in M) (\exists U \text{ okolo } p) (\exists \varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n) (\varphi \text{ homeomorfismus})$

Mapa je uspořádaná dvojice (U, φ) taková, že U je otevřen v M a $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ je homeomorfismus

z definice každý bod je v definičním oboru nějaké mapy

$\varphi \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \forall p \in U$

Atlas top. variety M je kolekce map, jejichž definiční obory pokrývají celé M

Atlas je hladký $\Leftrightarrow \forall (U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ je hladké zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$

Atlas je maximální $\Leftrightarrow$ není obsažen v nějakém jiném hladkém atlasu

Hladkou variety rozumíme topologickou varietu vybavenou maximálním hladkým atlasem (hladkou strukturou)

Def: Řekneme, že zobrazení $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$, kde $k \in \mathbb{N}$ je **hladké** $\Leftrightarrow \forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ je $f \circ \varphi^{-1}: (\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^k$

Řekneme, že křivka $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow (a, b) \rightarrow M$ je **hladká** $\Leftrightarrow \forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ je $\varphi \circ \gamma: (\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$

Řekneme, že zobrazení $F: M \rightarrow M'$ je **hladké** $\Leftrightarrow \forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (U', \varphi') \in \mathcal{A}'$ je $\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1}: (\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$

Hladké funkce: $C^\infty(M)$

Tečné vektory a prostory a zobrazení:

Def: Tečný vektor V_p v varietě M v bodě $p \in M$ je derivace v bodě p , tj.

- i) $V: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$
- ii) V je lineární
- iii) $\forall f, g \in C^\infty(M)$ $V(fg) = (Vf)(g(p)) + f(p)(Vg)$

Množinu všech tečných vektorů k varietě M v bodě p nazýváme **tečný prostor** k M v p a značíme $T_p M$.

$T_p M$ je vektorový prostor dimenze $\dim M$

Def: Necht $F: M \rightarrow N$ hladké Tečné zobrazení F v bodě $p \in M$: $F_{*p}: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$

$\forall v \in T_p M$ $(F_{*p} v) f := V(f \circ F)$

F_{*p} je lineární

$(\text{id}_M)_{*p} = \text{id}_{T_p M}$

$(F^{-1})_{*p} = F_{*p}^{-1}$

$(G \circ F)_{*p} = G_{*p} \circ F_{*p}$

F je difeomorfismus $\Rightarrow F_{*p}$ je izomorfismus

• Baze $T_p M$: $\partial_j|_p := (\varphi_* p)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(p)} \right) \Rightarrow \partial_j|_p = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(p)}$
 $\Rightarrow v \in T_p M = v^j \partial_j|_p$

• $F: M \rightarrow N, (U, \varphi) = (U, (x^1, \dots, x^m))$
 $\hat{F} := \varphi_* \circ F \circ \varphi^{-1} (V, \gamma) = (V, (y^1, \dots, y^n))$
 $F_* p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial \hat{F}^k}{\partial x^j} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{F(p)}$

• Změna souřadnic $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \frac{\partial x^{i'k}}{\partial x^{ij}}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i'k}} \Big|_p$
 $v^{i'k} \frac{\partial}{\partial x^{i'k}} \Big|_p = v^{i'k} \frac{\partial x^{i'k}}{\partial x^{ij}} \frac{\partial}{\partial x^{i'k}} \Big|_p \Rightarrow v^{i'k} = \frac{\partial x^{i'k}}{\partial x^{ij}} v^j$

Křivky:

• rychlost křivky $\gamma: J \rightarrow M$ v bodě $t_0 \in J$: $\dot{\gamma}(t_0) := \gamma_* t_0 \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{\gamma(t_0)} M$

$\dot{\gamma}(t_0) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'(t_0) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^j} (\varphi(\gamma(t_0))) \frac{d \hat{\gamma}^j}{dt}(t_0)$
 $\varphi \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

tvrzení: $\forall p \in M, \forall v \in T_p M \exists \gamma: J \rightarrow M$ taková, že $p \in \gamma(J)$ a že $v = \dot{\gamma}(t_0)$

• pro libovolný $v \in T_p M$ $F_* p v = \dot{\gamma}(t_0)$, kde γ je libovolná taková, že $\gamma(t_0) = p$

• $T_p M$ lze chápat jako třídu ekvivalence křivek začínajících v p , tj. $\gamma(0) = p$
 $\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \exists \varphi \in C^\infty(M) (f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \gamma')'(0)$

Vektorové pole:

Def: Necht M je hladká varieta. Libovolnou derivaci algebry $C^\infty(M)$ nazýváme vektorovým polem

• Derivace spolu s Lieovou závkou $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ tvoří Lieovu algebru

Def: Necht M je hladká varieta a $X \in \mathfrak{X}(M)$. Křivku $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ nazýváme integrační křivkou vektorového pole X vycházející z bodu $p \in M$

$p \in M \Leftrightarrow X|_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t) \quad \forall t \in (a, b) \quad \text{a} \quad \gamma(0) = p$

v souřadnicích $X^j(\gamma(t)) = \frac{d \hat{\gamma}^j}{dt}(t)$
 $X|_{\gamma(t)} = X^j(\gamma(t)) \partial_j|_{\gamma(t)}$
 $\dot{\gamma}(t) = \frac{d \hat{\gamma}^j}{dt}(t) \partial_j|_{\gamma(t)}$
 $\hat{\gamma}^j(t) = X^j(\gamma(t))$

Push-forward: (difeomorfismus)
 $\gamma(F_* X)|_{F(p)} = F_* X_p$
 $F_*[X, Y] = [F_* X, F_* Y]$

• Vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ je úplné $\Leftrightarrow$ každou jeho integrační křivku lze rozšířit na integrační křivku zobrazující celé $\mathbb{R}$ do M

• Tok vektorového pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ je zobrazení $\Psi^X: U \rightarrow M$, kde $U \subseteq \mathbb{R} \times M$ a $\{0\} \times M \subset U$ takové, že
 i) $\Psi^X(0, p) = p$
 ii) $\Psi^X(t, p) = \gamma(t)$, kde $\gamma: J \rightarrow M$ je integrační křivka X vycházející z bodu p .

• Je-li $U = \mathbb{R} \times M$: $\Psi^X \circ \Psi^X_t = \Psi^X_{t+s}$ (akce grupy $(\mathbb{R}, +)$)

2. Vnější algebra diferenciálních forem, vnější a Lieova derivace, Poincarého lemma Pullback forem

Def. Kotečný prostor $T_p^*M := (T_p M)^*$, kovektory jsou lineární funkcionály na $T_p M$

• Duální báze vektorů $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p) : (dx^1|_p, \dots, dx^n|_p) : \partial_i|_p = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) \partial_j|_p \Rightarrow dx^i|_p = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) dx^j|_p \Rightarrow \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \omega_i|_p$

kovektorové pole $\omega : \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ je $C^\infty(M)$ -lineární zobrazení, $\Omega^1(M)$
(Diferenciální 1-forma)

Def. Necht' $\omega \in \bigwedge^k T_p^*M$. k -forma je k -~~linear~~ lineární ~~totalně~~ antisymetrické zobrazení na $T_p M \times \dots \times T_p M$. Značíme $\Delta_p^k M$, $\dim \Delta_p^k M = \binom{n}{k}$
 k -krat.

Báze: $(dx^{i_1}|_p, \dots, dx^{i_k}|_p) : (\partial_{j_1}|_p, \dots, \partial_{j_k}|_p) := \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn}(\pi) \partial_{j_{\pi(1)}} \dots \partial_{j_{\pi(k)}}$
 $\omega = \omega_{j_1, \dots, j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \Rightarrow \omega_{j_1, \dots, j_k} = \omega_{j_{\pi(1)}, \dots, j_{\pi(k)}}$

Def. Diferenciální k -forma je $C^\infty(M)$ - k -lineární totalně antisymetrické zobrazení

$$\omega : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{k\text{-krat}} \rightarrow C^\infty(M), \Omega^k(M)$$

Def. Vnější součin $\wedge : \Delta_p^k M \times \Delta_p^l M \rightarrow \Delta_p^{k+l} M$

$$\omega \wedge \tau := \frac{(k+l)!}{k!l!} (\omega \otimes \tau)_A$$

$$F_A(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

$$(\omega \otimes \tau)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) = \omega(x_1, \dots, x_k) \tau(x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$$

VLASTNOSTI: i) Bilinearita

ii) Asociativita

iii) Antikomutativita $\omega \in \Delta_p^k M, \tau \in \Delta_p^l M \Rightarrow \omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$

Def. Vnitřní součin $\forall x \in T_p M \quad i_x : \Delta_p^k M \rightarrow \Delta_p^{k-1} M$

$$\forall v_1, \dots, v_{k-1} \in T_p M \quad (i_x \omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \omega(x, v_1, \dots, v_{k-1})$$

VLASTNOSTI

• Vnější součin i vnitřní součin Diferenciálních k -forem potobové

Def. Vnější derivace $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ tak, že:

i) d je $\mathbb{R}$ -lineární

ii) $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau$, $\omega \in \Omega^k(M), \tau \in \Omega^l(M)$

iii) $d^2 = 0$

iv) $(df)(x) = Xf \quad \forall x \in \mathcal{X}(M)$

Speciálně:

$$d\omega(x, y)$$

"

$$X(\omega(y))$$

$$-Y(\omega(x))$$

$$-\omega([X, Y])$$

Věta: Vnější derivace existuje a je právě jedna jednoznačně

• ω je uzavřená $\Leftrightarrow d\omega = 0$ • ω je exaktní $\Leftrightarrow \exists \tau \in \Omega^{k-1}(M) \quad \omega = d\tau$

$$d\omega(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \omega(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{k+1}) + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^{k+1} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{k+1})$$

CARTANOV VZOREC

Pullbacky:

Def: Kotečné zobrazení: $F^*_p: T^*_{F(p)}N \rightarrow T^*_pM$ $\forall p \in M$ (pro formy: $F^*_p: \Delta^k_{F(p)}N \rightarrow \Delta^k_pM$)
 $(F: M \rightarrow N \text{ je hladké})$
 $(F^*_p \omega)(x) := \omega(F_* p x)$ | $(F^*_p \omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(F_* p v_1, \dots, F_* p v_k)$
 $\forall \omega \in T^*_{F(p)}N$
 $\forall x \in T_pM$
Pullback: $(F^* \omega)_p := F^*_p(\omega_{F(p)})$ (není potřeba difeo)

VLASTNOSTI:

- F^* je $\mathbb{R}$ -lineární
- $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$
- $F^*(\omega \wedge \tau) = (F^* \omega) \wedge (F^* \tau)$
- $F^* f = f \circ F$ $\forall f \in C^\infty(N)$
- $F^* \circ d = d \circ F^*$
- $F^*(i_{F_* p} \omega) = i_p(F^* \omega)$

(pro formy: $(F^*_p dy^j|_p)(v) = dy^j|_{F(p)}(F_* p v)$)
 $= dy^j|_{F(p)}(v^k \frac{\partial F^j}{\partial x^k}(p)) \frac{\partial x^k}{\partial y^j}|_p(v)$
 $= v^k \frac{\partial F^j}{\partial x^k}(p) dx^k|_p(v)$
 $\Rightarrow F^*_p dy^j|_{F(p)} = \frac{\partial F^j}{\partial x^k}(p) dx^k|_p$

Lieova derivace:

Def: Lieova derivace $\mathcal{L}_X: \mathcal{X}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$, $(\mathcal{L}_X \omega)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi_{t, p}^{X*} \omega - \omega_p)$

$$\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X$$

VLASTNOSTI:

- $\mathcal{L}_X f = Xf$
- $d \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X d$
- $\mathcal{L}_X \omega \wedge \tau = \mathcal{L}_X \omega \wedge \tau + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \tau)$
- $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \tau + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \tau)$
- $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ (Cartanova magická formule)
- $\mathbb{R}$ -bilineární

(pro vekt. pole: $(\mathcal{L}_X Y)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi_{t, p}^{X*} Y - Y_p)$)
 $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = [\mathcal{L}_{[X, Y]}, \mathcal{L}_X Y = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$
 $\Rightarrow \mathcal{L} = \text{ad}$ pro $g = \mathbb{R}(M)$

Poincarého Lemma:

Věta: $H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \{0\} & k>0 \end{cases}$

$\text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1} = \text{uzavřené } k\text{-formy} / \text{exaktní } k\text{-formy}$

$$d_k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

Otevřená koule v $\mathbb{R}^n$ je deformací retracts $\mathbb{R}^n$

Důsledek: $\forall p \in M$ existuje U okoli p takže $\forall \omega \in \Omega^k_{cl}(M)$ $\omega|_U \in \Omega^k_{ex}(U)$

- každý bod má okolí difeomorfni s koulí v $\mathbb{R}^n$
- Difeomorfismy zachovávají de-Rhamovu kohomologii

3. Fibrováný prostor - def., přech. zob., Hopf

(FIBROVANÝ PROSTOR, KONSTRUKCE, TEČNÝ, KOTEČNÝ, Fázový PROSTOR JAKO KOTEČ, HOPF)

Def. Necht' $\pi: E \rightarrow M$ je hladké zobrazení hladké variety E na hladkou varietu M .
Lokaální trivializací uspořádané trojice (E, M, π) nazveme uspořádanou trojici $(F, \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I})$, kde

i) F je hladká varieta

ii) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí M

iii) $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce zobrazení, $\forall \alpha \in I \quad \phi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$

takovou, že

1) $\forall \alpha \in I \quad \phi_\alpha$ je diffeomorfismus
2) $\forall \alpha \in I \quad \pi \circ \phi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$ je projekce na 1. složku

Trojici (E, M, π) nazveme **fibrováný prostor** $\Leftrightarrow$ existuje nějaká lokaální trivializace

Fibrováný prostor se značí $E \xrightarrow{\pi} M$. Hladká varieta E se nazývá **lokální prostor** fibrovaneho prostoru, M se nazývá **bázevka** varieta FP , π projekce FP . Varieta F nazýváme **typickým vláknem** FP .

$\forall m \in M$ definujeme $E_m := \pi^{-1}(\{m\})$ **vláknem nad bodem m**

$\forall p \in E_m$

$\phi_\alpha^{-1}(p)$

$(m, \pi_\alpha^{-1}(p))$

$\forall m \in M \quad E_m$ je vložená podvarieta $\hookrightarrow E$ a je diffeomorfní F ($E_m = \phi_\alpha(m, F)$)

Fibrováný prostor je **triviální** $\Leftrightarrow$ existuje globální trivializace
 $\Leftrightarrow E \cong M \times F$

$\phi_\alpha(m, \cdot)$ je difeo

Def. Necht' $E \xrightarrow{\pi} M$ je hladký fibrováný prostor s lokaální trivializací $(F, \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I})$. Necht' dále $\{U_\alpha, U_\beta\}_{\alpha, \beta \in I}$ tak, že $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.
Pak $\forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$ definujeme **přechodové zobrazení**

$g_{\alpha\beta}(m): F \rightarrow F$

$f \mapsto [g_{\alpha\beta}(m)](f) := \pi_2(\phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m, f))) \Leftrightarrow \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m, f)) = (m, [g_{\alpha\beta}(m)](f))$

$\forall m \in M \quad g_{\alpha\beta}(m)$ je hladké

$[g_{\alpha\beta}(m) \circ g_{\beta\gamma}(m)](f) = \pi_2(\phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m, \pi_2(\phi_\beta^{-1}(\phi_\gamma(m, f)))))) = f \Leftrightarrow (g_{\alpha\beta}(m) \circ g_{\beta\gamma}(m)) = g_{\alpha\gamma}(m)$

$\Rightarrow g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$

$\hookrightarrow$ je "hladké" $\Leftrightarrow \forall f \in F$ je zobrazení $m \in U_\alpha \cap U_\beta \mapsto [g_{\alpha\beta}(m)](f) \in F$ je hladké (což platí)

~~• Nejmenší podgrupa generovaná podmnožinou $\{g_{\alpha\beta}(U_\alpha \cap U_\beta) \in \text{Diff}(F) \mid \alpha, \beta \in I\} \subset \text{Diff}(F)$~~
~~• Je nějaká strukturní grupa fibrovaneho prostoru $E \xrightarrow{\pi} M$~~

• evidentně platí: $g_{\alpha\alpha}(m) = \text{id}_F$, $g_{\alpha\beta}(m) = g_{\beta\alpha}(m)^{-1}$, $g_{\alpha\beta}(m) \circ g_{\beta\gamma}(m) = g_{\alpha\gamma}(m)$

$\hookrightarrow$ kcyklová podmínka

$[g_{\alpha\beta}(m) \circ g_{\beta\gamma}(m)](f) = \pi_2(\phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m, \pi_2(\phi_\beta^{-1}(\phi_\gamma(m, f)))))) = \pi_2(\phi_\alpha^{-1}(\phi_\gamma(m, f))) = [g_{\alpha\gamma}(m)](f)$

Strukturní grupa: (není dána jednoznačně) $\phi_\beta^{-1}(m, \phi_\gamma(m, f))$

• Je taková podgrupa $\mathcal{G} \subset \text{Diff}(F)$, že $\forall \alpha, \beta \in I \quad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ je $\forall m \in M \quad g_{\alpha\beta}(m) \in \mathcal{G}$

Konstrukce:

Věta: Necht' $\pi: E \rightarrow M$ je zobrazení množiny E na hladkou varietu M a necht' F je hladká varieta. Mějme dále otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ variety M a $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ kolekci množinových bijekcí $\phi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ takových, že $\pi \circ \phi_\alpha = \text{id}_{U_\alpha}$.

Pokud jsou všechna přechodová zobrazení $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$ „hladká“ potom existuje unikátní topologie a hladká struktura na E taková, že:

i) $\pi: E \rightarrow M$ je hladké

ii) $\{F, \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in I}\}$ je lokální trivializace (E, M, π)

Věta: Necht' M, F jsou hladké variety a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí M . Necht' dále $\forall \alpha, \beta \in I$ $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $\exists g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$ „hladké“ tak, že:

$$i) \forall m \in U_\alpha \quad g_{\alpha\alpha}(m) = \text{id}_F$$

$$ii) \forall m \in U_\alpha \cap U_\beta \quad g_{\alpha\beta}(m) = g_{\beta\alpha}(m)$$

$$iii) \forall m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \quad g_{\alpha\beta}(m) \circ g_{\beta\gamma}(m) = g_{\alpha\gamma}(m)$$

Pak existuje fibrováný prostor $E \xrightarrow{\pi} M$ s lokální trivializací $(F, \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in I})$

taková, že $g_{\alpha\beta}$ jsou příslušná přechodová zobrazení. Taková E je dáno jednoznačně až na diffeomorfismus. • Morfismus $E \xrightarrow{\pi} M, E' \xrightarrow{\pi'} M'$ je hladkých zobr. (φ, f) tak, že $\pi' \circ \varphi = f \circ \pi$ je hladkých zobr. $\varphi: E \rightarrow E', f: M \rightarrow M'$

VEKTOROVÝ BANDL:

Def: Necht' $E \xrightarrow{\pi} M$ je fibrováný prostor s typickým vláknem V , jež má strukturu konečně rozměrného vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$. Řekneme, že

$E \xrightarrow{\pi} M$ je vektorový bandl $\Leftrightarrow$ ~~pro každé $\alpha, \beta \in I$ existuje zobrazení $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(V)$~~

~~mažna $g_{\alpha\beta}(m) \in \text{Diff}(V)$~~

$$\bigcup_{\alpha, \beta \in I} g_{\alpha\beta}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \text{Aut}(V) \cong \text{GL}(V) \subset \text{Diff}(V),$$

Strukturální podgrupa

je podgrupa $\text{GL}(V)$

~~mažna $g_{\alpha\beta}(m) \in \text{Diff}(V)$~~ , tj. $\forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$ $g_{\alpha\beta}(m): V \rightarrow V$ je izomorfismus VP

• Každé vlákno má unikátní strukturu vektorového prostoru taková, že

$$\forall m, \phi_\alpha(m, \cdot): V \rightarrow E_m \text{ je izomorfismus VP}$$

• Alternativně $\bigoplus_{m \in M} E_m$ jsou vektorové prostory, $E \xrightarrow{\pi} M$ je VB $\Leftrightarrow \phi_\alpha(m, \cdot): V \rightarrow E_m$ jsou

Def: Necht' $\pi: E \rightarrow M$ je fibrováný prostor. Řekneme, že hladké zobrazení

$$\sigma: U \rightarrow E$$

$$\text{lok. chvění } M$$

$$m \mapsto \sigma(m)$$

je lokální řez fibrovaneho prostoru $E \xrightarrow{\pi} M \Leftrightarrow \pi \circ \sigma = \text{id}_U$

Množina lokálních řezů $\Gamma_U(E)$. Speciálně pokud $U=M$ globální řez, $\Gamma(E)$.

• $E \xrightarrow{\pi} M$ je VB $\Rightarrow \Gamma_U(E)$ je $C^\infty(U)$ -modul

okruh Abelská grupa $\oplus$
($\Delta, +$) Monoid (Asoc + id) $\odot$
LP-distributivita

Modul: Abelská grupa $\oplus$ Asociativita $\odot$,
($\Delta, +$) LP-distributivita $\forall \sigma, \tau \in \Gamma_U(E) \quad \lambda \Delta = \Delta$

SYMPLEKTICKÁ GEOMETRIE:

Def. Necht' V je ~~vektorový~~ vektorový prostor. Antisymetrickou nede degenerovanou bilineární 2-formu na V nazýváme symplektickou.

• ω je symplektická 2-forma na $V \Rightarrow V$ je sudorozměrný

Def. Necht' M je hladká varieta. $\omega \in \Omega^2(M)$ nazýváme symplektickou formou

$\Leftrightarrow i) d\omega = 0$ (ω je uzavřená)

ii) $\forall p \in M$ je ω_p nede degenerovaná ($\Leftrightarrow i_x \omega : T_x(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ je $\cong$)

Varietu vybavenou symplektickou formou nazýváme symplektická (M, ω) .

• (M, ω) je symplektická $\Rightarrow M$ je sudorozměrná

Věta: Necht' (M, ω) je symplektická varieta. Pak ~~pro každou~~ ~~existuje~~ ~~lokalizace~~

~~so~~ $\forall p \in M \exists (U, (x^1, \dots, x^{\frac{\dim M}{2}}, p_1, \dots, p_{\frac{\dim M}{2}}))$ mapa tak, že $p \in U$ taková že

$$\omega|_U = dp_i \wedge dx^i \text{ (Darbouxovy souřadnice)}$$

Def. Necht' (M, ω) je symplektická varieta. $X \in \mathfrak{X}(M)$ nazveme.

i) lokálně Hamiltonovské $\Leftrightarrow i_x \omega$ je uzavřená ($d i_x \omega = 0$)

ii) Hamiltonovské $\Leftrightarrow i_x \omega$ je exaktní

pro Hamiltonovské vekt pole $\exists f \in C^\infty(M)$ tak, že $i_x \omega = -df$

$\Rightarrow$ značení: X_f

1-parametrická grupa tr: $\phi: (U \subset \mathbb{R} \times M) \rightarrow M$ i) $\phi(0, p) = p$ ii) $\phi(s, \phi(t, p)) = \phi(s+t, p)$

• $X \in \mathfrak{X}(M)$ je lok. Hamiltonovské $\Leftrightarrow \mathcal{L}_X \omega = 0$ Poissonova závorka: $\{f, g\} := i_{X_f} i_{X_g} \omega$

• $X \in \mathfrak{X}(M)$ je lok. Hamiltonovské $\Leftrightarrow \exists f$ je 1-parametrická lok. grupa kanonických tr. • Kanonické zobrazení: $\phi^* \omega = \omega$ ($\phi: M \rightarrow M$)

Fázový prostor:

• Necht' M je hladká varieta, $(T^*M, d\lambda)$ je příkladem symplektické variety,

• λ je tzv. Kanonická 1-forma: $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ $\forall \alpha \in T^*M \lambda_\alpha := \pi_\alpha^* d(\lambda_{\pi(\alpha)}) = \pi_\alpha^* d\lambda$

$$\begin{aligned} \pi(T^*(T^*M)) &= T^*M \rightarrow M \\ \lambda &= T^*M \rightarrow T^*(T^*M) \\ \forall v \in T_\alpha T^*M &= \lambda_\alpha v = (\pi_\alpha^* d\lambda)(v) = d(\pi_\alpha^* \lambda)(v) \in T_{\pi(\alpha)} M \end{aligned}$$

• Darbouxovy souřadnice: $\{x^i, p_j\}_{i,j=1}^{\dim M}$ (na T^*M) $\rightarrow$ souřadnice na M

$$\begin{aligned} X^j(\alpha) &:= X^j(\pi(\alpha)) \\ p_j(\alpha) &:= p_j(d\pi_\alpha^{-1}(\alpha)) := d_j \end{aligned}$$

$$\lambda_\alpha = \pi_\alpha^* (d_j dx^j|_{\pi(\alpha)}) = d_j dx^j|_{\alpha} = p_j(\alpha) dx^j|_{\alpha} \Rightarrow \boxed{\lambda = p_j dx^j}$$

• Kanonická symplektická forma: $\boxed{\omega = d\lambda = dp_j \wedge dx^j}$

• ~~Pro každou~~ kolečkový bandl I^*M je vhodný pro popis fázového prostoru s konfiguračním prostorem M , $H \in C^\infty(T^*M) \Rightarrow$ int. křivky X_H jsou řešení Hamiltonových pohybových rovnic

TEČNÝ BANDL:

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M, \pi: TM \rightarrow M, F = \mathbb{R}^n, n = \dim M$$

• Necht $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je hladký atlas na M

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$\phi_\alpha(m; \vec{x}) := \lambda^j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_m \quad \forall m \in M, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Definováno pomocí ϕ_α

• jisté platí $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_\alpha$

• množinová bijekce?

surjektivní jisté ✓

injektivní jisté ✓

• Před Hledkost přechodových zobrazení?

$$g_{\alpha\beta}(m): F \rightarrow F$$

$$\begin{aligned} [g_{\alpha\beta}(m)](\vec{x}) &= (\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m, \vec{x})) = (\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta^{-1})(\lambda^j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_m) \\ &= (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\lambda^j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_m \frac{\partial x^k}{\partial x^l} \Big|_m) \\ &= (\lambda^j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_m, \dots, \lambda^j \frac{\partial x^j}{\partial x^n} \Big|_m) \end{aligned}$$

to je jisté $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ hladké

protože $[g_{\alpha\beta}(\cdot)]\vec{x}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow$ je to vekt. bundl.

• vektorová pole $\equiv$ řezy tečného bundlu

KOTEČNÝ BANDL:

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M, F = \mathbb{R}^n, \pi: T^*M \rightarrow M, n = \dim M$$

• Necht $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je hladký atlas na M

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$\phi_\alpha(m; \vec{x}) := \lambda_j dx^j \Big|_m$$

Definované skrz ϕ

• jisté $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_\alpha$ a ϕ_α je bijekce

$$\begin{aligned} [g_{\alpha\beta}(\cdot)]\vec{x} \Big|_m &= (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m, \vec{x})) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\lambda_j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_m dx^k \Big|_m) \\ &= (\lambda_j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_m, \dots, \lambda_j \frac{\partial x^j}{\partial x^n} \Big|_m) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ je to vekt. bundl

• Kovektorová pole $\equiv$ řezy kotečného bundlu

FÁZOVÝ PROSTOR:

Necht M je varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$, $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ je kotečný bundl. Definujeme

$$\lambda \in S^1(T^*M)$$

Hopfova fibrace: $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ s typickým vláknem $S^1 \subset U(1)$, není triviální

• umožňuje globálně definovat potenciál Diracova monopólu

$$U(2) \cong U(1) \times SU(2)$$

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

4. Hlavní Fibrovací prostor, struk. grupa, ex. G Ě

~~Role HFP v Kalib. teoriích, Frame bundle~~ TRIVIALIZATELNOST

Def. Necht $P \xrightarrow{\pi} M$ je fibrovací prostor s typickým vláknem G , kde G je Lieova grupa.
Necht $R: P \times G \rightarrow P$ je pravá akce Lieovy grupy G na P a necht platí:

- i) R je volná a působí po vlákních, tj. $\pi \circ R_g = \pi$
- ii) Zřetězení $R|_{P_m}$ je tranzitivní $\forall m \in M$
- iii) Existuje princip. lok. trivializace, tj. ~~Existuje~~ lokální trivializace jsou ekvivariantní, tj.

$$\forall m \in U_\alpha, \forall g, h \in G \quad \forall x \in \pi^{-1}(m) \quad \phi_\alpha(m, gh) = \phi_\alpha(m, g) \cdot h$$

(Principální lok. trivializace)

Pak $P \xrightarrow{\pi} M$ s vybranou trivializací $(G, \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I})$ a pravou akcí R nazýváme hlavní fibrovací prostor (Principální G -bandl).

• $P_m \cong G$

↳ Diffeomorfismus (platí obecně)
↳ Grupaový izomorfismus (nejednoznačný)

$$\forall p_1, p_2 \in P_m \quad p_1 \circ p_2 := \phi_\alpha(m, g_1 g_2) \text{ , kde } p_1 = \phi_\alpha(m, g_1) \quad p_2 = \phi_\alpha(m, g_2)$$

$$p^{-1} = \phi_\alpha(m, g^{-1}) \quad e = \phi_\alpha(m, e)$$

"protože pokud $m \in U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow e$ nemusí být dáno stejně

• Orbity $\in$ Vlákná

Uvědomění: Přechodová zobrazení principální lokální trivializace mají hodnoty v $G \subseteq \text{diff}(G)$, tj. strukturní podgrupa lze brát jako podgrupu G

$$\forall \alpha, \beta \in I \quad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \quad [g_{\alpha\beta}(m)] g = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m, g)) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m, e) \cdot g)$$

$$= (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m, e)) g$$

$$= [g_{\alpha\beta}(m)](e) g$$

$$= \hat{g}_{\alpha\beta}(m) g \Rightarrow g_{\alpha\beta}(m) = L_{\hat{g}_{\alpha\beta}(m)}$$

$$\phi_\alpha^{-1}(p \cdot g) = \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(m, h) \cdot g) = (m, hg)$$

$$= (m, \pi_2(\phi_\alpha^{-1}(p))g)$$

• Máme-li Fibrovací prostor $P \xrightarrow{\pi} M$ s typickým vláknem G tak, že přechodová zobrazení působí levou translací $\Rightarrow \exists$ pravá akce G na P volná po vlákních tranzitivní, kde $e \in$ dané lok. trivializaci principální, pak $P \xrightarrow{\pi} M$ hlavní fibrovací prostor

• Příklad: $P = M \times G$

$$R = ((m, g), h) \mapsto (m, gh), \phi = \pi_M, U = M$$

Uvědomění: Necht $P \xrightarrow{\pi} M$ je hlavní fibrovací prostor a necht $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí M , a necht $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce lokálních řezů P , kde $G_\alpha \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Pak $(\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I})$ kde $\phi_\alpha: U_\alpha \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ je definované jako $\phi_\alpha(m, g) := G_\alpha(m) \cdot g$ je principální ~~fibrovací~~ lok. trivializace

$\forall p \in \pi^{-1}(U_\alpha) \exists! g_\alpha \in G$ tak, že $p = \phi_\alpha(\pi(p), g_\alpha(p)) \equiv \phi_\alpha(\pi(p), e) \cdot g_\alpha(p)$
Tranzitivita kovarianční

$g_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow G$ je hladké

Důsledek: Hlavní fibrace je trivializovatelná $\Leftrightarrow \exists$ globální hladký řez
 $\Leftarrow$: předchozí věta $\Rightarrow \phi: M \times G \rightarrow P$ je diffeomorfismus

$(m, g) \mapsto \phi(m, g)$
 $\Rightarrow \exists \phi: M \times G \rightarrow P$ diffeomorfismus, $\pi \circ \phi = \pi_1 \Rightarrow \forall m \in M \quad \mathcal{G}(m) := \phi(m, e) \in \Gamma(P)$

$M \xrightarrow{\pi} P$ Prostor orbit Leovy grupy G , působící na M volnou akcí $G \Rightarrow$ hl. fibrace existuje-li hladká struktura na M/G tak, že $\pi: M \rightarrow M/G$ je surjektivní submerze

Hlavní fibrace repérů (Frame bundle)

M je hladká varieta $n = \dim M$

Totální prostor: $F(M) := \bigsqcup_{m \in M} \mathcal{E}(T_m M)$

$\hookrightarrow$ množina všech bází $T_m M$ (kde vybrat

projece: přirozeně (vždy nějaká báze existuje $\Rightarrow \pi$ je surjektivní) hladkou strukturu)

Typické vlákno $GL(n, \mathbb{R})$

"Lokální trivializace": Atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I} \Rightarrow \forall m \in M$ máme $\mathcal{O}^{(\alpha)}|_m := \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_m \right\} \in \mathcal{E}(T_m M) \subseteq F(M)$

Trivializace: $\phi_\alpha: U_\alpha \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$

$(m, A) \mapsto \mathcal{O}^{(\alpha)}|_m \cdot A \quad (A \cdot A^{-1})_j = \delta_{jk}$
 $\hookrightarrow \pi \circ \phi_\alpha = \pi_1$
 $\hookrightarrow$ množina bází

přechodové zobrazení: $\mathcal{O}^{(\beta)}|_m = \mathcal{O}^{(\alpha)}|_m \cdot J(m)$

$\forall f \in F \quad [g_\alpha \beta(-)] f: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow F$ hladké?

$\frac{\partial}{\partial x^i}|_m = \frac{\partial}{\partial x^k}|_m \frac{\partial x^k}{\partial x^i}|_m \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$

$[g_\alpha \beta(m)] A = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m, A))$
 $= (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\mathcal{O}^{(\beta)}|_m \cdot A)$
 $= (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\mathcal{O}^{(\alpha)}|_m \cdot J(m) \cdot A)$
 $= J(m) A$

$\Rightarrow$ Fibrace je hladká

Pravá akce: $R: (A) \mapsto \ell \cdot A$

je akce?

i) je hladká jako $F(M) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow F(M)$

ii) volná, působí po vlákních

iii) po vlákních tranzitivní

iv) ϕ_α jsou kovariantní

$\mathcal{F}_U(F(M))$ množina lokálních polí repérů nad U

$F(M)$ je trivializovatelná $\Leftrightarrow$ existuje globální pole repérů

Licová grupa má globální pole repérů

$(x_1^k, \dots, x_n^k)$, kde $(k_1, \dots, k_n)$ je báze $\mathfrak{g}$

$\Rightarrow F(M) \cong G \times GL(n, \mathbb{R})$

Fundamentalni vektorova pole:

• Necht' P je hladká varieta a $R: P \times G \rightarrow G$ je pravá akce Lieovy grupy G na P .

Def: $\forall p \in P, \forall x \in g_p: \#_m x := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} m \cdot \exp(tx) \in R_* \otimes x \in T_m P$

Fundamentální vektorevé pole: $\#x \in \mathbb{R}(P)$, $\forall x \in P$ $(\#x)_m := \#_m x$

• Stejně čně: zobrazení $\Psi^{\#x} : \mathbb{R} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ^{průřez} $(t, m) \mapsto m \cdot \exp(ax)$ je hladké a $\Psi^{\#x}(0, m) = m \cdot e = m$

$$\begin{aligned}\Psi^{\#x}(t, \Psi^{\#x}(s, m)) &= m \cdot \exp(sx) \cdot \exp(tx) \\ &= m \cdot \exp((s+t)x) = \Psi^{\#x}(s+t, m)\end{aligned}$$

- $\#x$ je úplné

Zobrazení $\# : g \rightarrow \mathbb{K}(P)$ nazýváme infinite simální generátor akce R

VLASTNOSTI: $\gamma \# : g \rightarrow \mathcal{E}(P)$ je lineární

i) $\#m \in P$ $\#m = g \rightarrow T_m P$ je lineární monomorfismus $\leftarrow R$ je volná $\Rightarrow$ Pro P^M hl. fibrový prostor.
 ii) $\exists$ Uokoli $m \in P$ tak, že $R|_U$ je transitivní $\Rightarrow \#m$ je epimorfismus $\Rightarrow \#P \#g \rightarrow T_g P$ je izomorfismus

iv) $\# : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(P)$ je homomorfismus Lieových algebren

$$v) R_{g^*} \# X = \#(\text{Ad}_{g^{-1}} X) \quad \forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}$$

Def. Necht' $P \xrightarrow{\pi} M$ je hlavní fibrovací prostor. $\forall p \in P$ vertikální tečný prostor

$$\text{Ver}_p P := \ker(\pi_{*p}) = T_p P_{\pi(p)}$$

π je lokalizaci submerze $\Rightarrow \forall p \in P$ $\text{rank } \pi_x p = \dim M \Rightarrow \forall p \in P$ $\dim \text{Ver}_p P = \dim P - \dim M$
(pro každý fibrarovný prostor) $\Rightarrow \pi_p(P_m) = \ker T_{\pi, p}$ (o implicitní funkci)
 $\in \text{Ker } P_1 \quad \text{Ker } P_2 \quad \text{Ker } P_3 \quad \text{Ker } P_4 \quad \text{Ker } P_5$
 $\pi^{-1}(\{m\})$

Def. Plati: $\forall p \in P, \forall g \in G$ von $Rg * \text{Ver}_p P = \text{Ver}_{p \cdot g} P$

Tvrzení: Ver je hladká integrabilní distribuce $\in$ ^{ulokálná} integrálními podvariety

5. Přidružené vektorové fibrovací prostory

(≡ Asociovaná fibrace)

- Vstupní data: j hl. fibrovací prostor $P \xrightarrow{\pi} M$ s typickým vláknem G a pravou akci R (1)
- ii) Reprezentace (kon-dim) (V, ρ) grupy G

I) Vytvořím triviální vektorový bundl $E = P \times V$ a zavedu pravou akci $R_g: E \rightarrow E$ $g: E \rightarrow P$ (projekce) na 1. složku

$$R_g: E \times G \rightarrow E, \quad \forall g \in G, \forall (p, v) \in E \quad R_g(p, v) := (p \cdot g, \rho_g(v))$$

a) $\forall g \in G$ je (R_g, R_g) automorfismus vektorového bundlu $E \xrightarrow{g} P$,

$$R_g: E \rightarrow E$$

$$R_g: P \rightarrow P$$

neboť R_g je diffeomorfismus P a je navíc
 1) oboustranný inverz $R_{g^{-1}}$
 2) inverz je lineární

ii) R_g je ~~lineární~~ izomorfismus

$$R_g: E_p \rightarrow E_{p \cdot g}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V \quad R_g(p, \lambda v_1 + v_2) = (p \cdot g, \rho_g(\lambda v_1 + v_2))$$

3) má oboustranný inverz $R_{g^{-1}}$

$$= (p \cdot g, \lambda \rho_g(v_1) + \rho_g(v_2))$$

$$= \lambda (p \cdot g, \rho_g(v_1)) + (p \cdot g, \rho_g(v_2)) = \lambda R_g(p, v_1) + R_g(p, v_2)$$

$$\therefore R_g \circ R_g = R_g \circ R_g$$

$$R_g \circ P = (R_g \circ \pi)(p, v)$$

$$(R_g \circ \pi)(p, v) = p \cdot g = \pi(R_g(p, v))$$

b) existuje ~~triviální~~ sdružená ekvivalentní lokální trivializace

pro $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ principální fibraci $P \rightarrow M$, $U_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha)$

$$\psi_\alpha(p, v) := (p, \rho_{g_\alpha(p)}^{-1}(v))$$

$$\psi_\alpha: U_\alpha \times V \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$g_\alpha: U_\alpha \rightarrow G \text{ tak, že } R_{g_\alpha}(\pi(p), g_\alpha(p))$$

$\Rightarrow (E, R)$ je ekvivalentní vektorový bundl

II) Získáváme přidružený vektorový bundl $q: P \times V / G \rightarrow M$

a) $P \times V / G \xrightarrow{q} M$ je izomorfní s ~~$P \times V$~~ $P \times V / G$, izomorfismem je (ψ, π) ψ přiřazuje příslušnou orbitu

Přidružený vektorový bundl přidružený hl. fibraci $P \rightarrow M$ a reprezentaci (V, ρ) , značíme $P \times_\rho V$

III) Kanonický izomorfismus $C^\infty(M)$ -modulů $\Gamma(P \times_\rho V) \cong \Omega^0_\rho(P, V)$

Formy s hodnotami ve vekt. prostoru $\Omega^k_\rho(M, V)$ jsou $C^\infty(M)$ - k -lineární ~~totálně~~ antisymetrické zobrazení

$$\omega: \underbrace{X(M) \times \dots \times X(M)}_{k\text{-krát}} \rightarrow C^\infty(M, V)$$

$$\omega \in \mathfrak{m}^k(M)\text{-modul hl. zobrazení } F: M \rightarrow V$$

$$(f \cdot F)(m) := f(m) F(m)$$

$P \rightarrow M, G, R$ je hl. fibrace a (V, ρ) kon-dim reprezentace G

$$k\text{-formy typu } \rho, \Omega^k_\rho(P, V) \subseteq \Omega^k(P, V) \Leftrightarrow \forall g \in G \quad R_g^* \omega = \rho_{g^{-1}} \circ \omega$$

Speciálně $\Omega^0_\rho(P, V) \rightarrow V$ velikosti typu ρ jsou

$$\text{není } C^\infty(P) \text{ modul } C^\infty(P, V) \text{ ale } C^\infty(M) \text{ modul}$$

$$\omega \in C^\infty(P) \text{ modul}$$

$$F: P \rightarrow V \text{ takové, že } \forall g \in G \quad F \circ R_g = \rho_{g^{-1}} \circ F$$

$$(F \circ R_g)(p) = F(p \cdot g) = \rho_{g^{-1}}(F(p)) = \rho_{g^{-1}}(F(p))$$

$$\neq \rho_{g^{-1}}(F(p \cdot g))$$

• Pr: $F(M) \times \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ je kanonická reprezentace na $GL(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$

$$\pi(F(M) \times_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n) \simeq \Omega_0^2(F(M), \mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{X}(M) \equiv \pi(\pi M)$$

$$\pi: F(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\underline{\Phi}(e \cdot A) = A^{-1} \underline{\Phi}(e)$$

$$\Gamma(\Phi) := X_\Phi \quad (X_\Phi)_m := \Phi(e) \quad \text{handle states} \quad \text{je dobre def}$$

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(x) &:= \Phi_x = \Phi(e \cdot A)^j (e \cdot A)_i = (A^{-1} \Phi(e))^j A^k_j e_k \\ &= A^{-1} e^j \Phi(e) e^k A^k_j e_k \\ &= \Phi(e)^k e_k \end{aligned}$$

$$\Phi_x(\mathbb{Q}) := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$X_{\pi(\mathcal{Q})} \equiv X^i e_i$$

$\Rightarrow$ isomorphism vekt. bundl $F(\psi(m)) := [\pi^* \psi]_m \Rightarrow F(M) \times_{\mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n \cong TM$

Dr. F. H. H.

Ames

Wagner na Pridunském nábožném banditu

Obecný set-up :

Def: Necht $P \rightarrow M, G, R$ je hlavní fibrace a necht $E \rightarrow P, V$ je vektorový bundle.

Nechť dále $R: E \times G \rightarrow E$ je akce na E . Řekneme, že E je G -ekvivariantní vektorový bundl $\Leftrightarrow$ i) $\forall g \in G$ (R_g, R_g) je auto morfismus VB $E \rightarrow E$

ii) Proč existuje π -saturovaná ekvivariantní lok. triv.

$$\{(u_i, \psi_i)\}_{i \in I}, t \in \mathbb{N}.$$

c) $\forall \alpha \in I \exists U_\alpha = U_\alpha^\circ \subseteq M$ $t \in U_\alpha \Rightarrow U_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$

b) $\forall d \in I, \forall g \in G, \forall p \in \mathcal{P}_d, \forall v \in V$

$$\psi_2(RgP, v) = Rg\psi_2(P, v)$$

Proster Orbit

tvrzení: $E \rightarrow P$ je G-ekvivalentní VB $\Rightarrow$ existuje unik struktura vektorového bundlu $E/G \rightarrow M$

takova, če (ϕ, π) je izomorfizmus VB a $\phi: E \rightarrow E/G$ je indeks surjektivni
submorfizem

submerge

Twzení: $C^\infty(M)$ -moduly $\Gamma(E/G)$ a $\Gamma_G(E)$ jsou kanonicky izomorfní

↳ G-invariantni rezult.

$$\psi \in \Gamma_G(E) \subseteq \Gamma(E) \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall p \in P \quad \psi(R_g p) = (R_g \psi)_p$$

Pr: Redukce tečného bandlu:

$$TP \xrightarrow{\pi_P} P, R_g(v) := R_{g \circ \pi_P(v)} v \quad \forall g \in G, v \in V, \quad R_{g \circ \pi_P(v)} : T_{\pi_P(v)} P \rightarrow T_{\pi_P(v) \circ g} P$$

Splines vse $\Rightarrow \pi^G$
 $TP/G \rightarrow M \quad \alpha \quad \Gamma(TP/G) \simeq \mathcal{E}_G(P)$

↳ pravouhlé vektorové pole

↳ Abiyahav vektorový
bandl

6. Konexe v hl. fibrovaném prostoru

(Abstraktní geom. definice, souřadnicové vyjádření)

Formy s hodnotami ve vektorovém prostoru:

- $\forall \omega \in \Omega^k(M, V)$ můžeme zohlednit bázi V , $\{e_j\}_{j=1}^{\dim V}$: $\omega = \omega^j e_j$, kde $\forall j \in \dim V$ $\omega^j \in \Omega^k(M)$
 $\rightarrow$ komponentní k -formy
- $\forall \omega \in \Omega^k(M, V)$ $d\omega := (d\omega^j) e_j$
- $\forall x \in \mathcal{X}(M)$ $i_x \omega := (i_x \omega^j) e_j$
- $\forall A \in \text{End}(V)$ $\mathcal{L}_x \omega := (\mathcal{L}_x \omega^j) e_j$
- $\forall \tau \in \Omega^l(M, V)$ $A(\omega) := \omega^j A(e_j)$
- Je-li V navíc algebra
 $\forall \omega, \tau \in \Omega^k(M, V)$ $\omega \wedge \tau := (\omega^j \wedge \tau^k) e_j \otimes e_k$
 $\forall \tau \in \Omega^l(M, V)$
- Je-li V Lieova algebra

$$[\omega \wedge \tau]_g := (\omega^j \wedge \tau^k) [e_j, e_k]_g$$

$$[\omega \wedge \tau]_g = (-1)^{kl} [\tau \wedge \omega]_g$$

$$[\omega \wedge (\tau \wedge \sigma)]_g = ([\omega \wedge \tau]_g \wedge \sigma)_g + (-1)^{kl} [\tau \wedge (\omega \wedge \sigma)]_g$$

Def: Necht $P \rightarrow M, \mathbb{R}$ je hl. fibrovaný prostor. 1-formu $A \in \Omega^1(P, g)$ nazýváme formou konexe na hl. fibrovaném prostoru $(\Rightarrow)$

$$i) \forall x \in g \quad A(\#x) = x$$

$$ii) A \text{ je Ad-ekvariantní, tj. } \forall g \in G \quad R_g^* A = \text{Ad}_{g^{-1}}(A)$$

vždy alespoň jedna existuje

Tvrzení: Necht $\{x_j\}_{j=1}^{\dim g}$ je báze g a $A \in \Omega^1(P, g)$ je forma konexe. Pak $(A^1_p, \dots, A^{\dim g}_p)$ tvoří LN soubor v $T_p^* P$ $\forall p \in P$, kde $A = A^j x_j$.

Afinní konexe:

- Lokální 1-formy afinní konexe: $\hat{\omega}^c \in \mathcal{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$, $\hat{\omega}^c_b(x) := e^c(\nabla_x e_b)$

(pole repérů $(U, e_1, \dots, e_n)$)

$$[\hat{\omega}^c_b]_a = e^c(\nabla_{e_a} e_b) = e^c(\Gamma^d_{ba} e_d) = \Gamma^c_{ba} \Rightarrow \hat{\omega}^c_b = \Gamma^c_{ba} e^a$$

Afinní konexe $\Rightarrow$ $\forall$ pole repérů $(U, e_1, \dots, e_n)$ definuje sadu n^2 1-form $\hat{\omega}^c_b \in \Omega^1(U)$, c, b $\in \hat{n}$

Naopak máme-li $\forall$ pole repérů $(U, e_1, \dots, e_n)$ sadu n^2 -forem 1-form $\hat{\omega}^c_b \in \Omega^1(U)$; c, b $\in \hat{n}$ splňujících $\forall$ pole repérů $(U, e_1, \dots, e_n), (U', e'_1, \dots, e'_n)$ $U \cap U' \neq \emptyset$ transformační vztah:

$$[\hat{\omega}'^c_b] = \Gamma'^c_{ba} e'^a$$

$$= A^{-1c}_k A^e_b \hat{\omega}^k_e + (dA^e_b) A^{-1c}_k$$

definují tím afinní konexe

$$(\nabla_x Y) := (x Y^j) e_j + Y^j \hat{\omega}^k_j(x) e_k$$

A lze interpretovat jako prvek $\Omega^0(U \cap U', GL(n, \mathbb{R})) \Rightarrow A = A^j_k E^k_j$

$\rightarrow$ jednička na jik-tém místě

Definujeme LOKÁLNÍ FORMU AFINNÍ KONEXE $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, gl(n, \mathbb{R}))$ jinak 0

transformující se podle vztahů

$$\hat{\omega}' = A^{-1} \hat{\omega} A + A^{-1} dA \quad (\nabla \xrightarrow{1:1} \text{sadou } \hat{\omega})$$

Lokální formy křivosti a torze: $\hat{\Omega}^c_d: \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathbb{C}^\infty(U)$
(zadané ∇ a $(U, e_1, \dots, e_n)$) $\hat{\Omega}^c_d(x, Y) := e^c(R(x, Y)e_d)$

$$[\hat{\Omega}^c_d]_{ab} = R^c_{dab} = \hat{\Omega}^c_d = \frac{1}{2} R^c_{dab} e^a \wedge e^b \quad \hat{T}^c_d: \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathbb{C}^\infty(U)$$

$$[\hat{T}^c]_{ab} = T^c_{ab} \Rightarrow \hat{T}^c = \frac{1}{2} T^c_{ab} e^a \wedge e^b \quad \hat{T}^c(x, Y) := e^c(T(x, Y))$$

$$\hat{\Omega} := \hat{\Omega}^c_d E^d_c, \hat{T} := \hat{T}^c_c E_c$$

$$\hat{\Omega} \in \Omega^2(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})), \hat{T} \in \Omega^2(U, \mathbb{R}^n)$$

$$\text{Transformace: } \hat{\Omega}' = A^{-1} \hat{\Omega} A$$

$$\hat{T}' = A^{-1} \hat{T}$$

$$A \in \Omega^0(U \cap U', GL(n, \mathbb{R}))$$

Cartanovy strukturální rovnice: i) $\hat{\Omega}^a_b = d\hat{\omega}^a_b + \hat{\omega}^a_c \wedge \hat{\omega}^c_b \Leftrightarrow \hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}$

$$\text{ii) } \hat{T}^a = de^a + \hat{\omega}^a_b \wedge e^b \Leftrightarrow \hat{T} = de^\# + \hat{\omega} \wedge e^\#$$

$$e^\# := e^a E_a$$

Bianchiho identity: i) $d\hat{\Omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \wedge \hat{\omega} = 0$ (Geom.)

$$\text{ii) } \hat{\Omega} \wedge e^\# - \hat{\omega} \wedge \hat{T} = d\hat{T} \quad (\text{Alg})$$

Frame bundle:

$$(f_1, \dots, f_n)$$

• Pro libovolný $m \in M$ vyberme $f \in \Gamma_U(F(M))$ tak, že U je ob. okolí $m \in M$ a afinní konex: ∇ na M .

• zavedeme funkci $y: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ vztahem: $y = f \circ \pi|_U$ (volnost akce) a transitivity akce $y \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\text{pro } (f_1, \dots, f_n)$$

$\Rightarrow$ Máme záves lok. formu afinní konexe $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$

• Definujeme lok. 1-formy konexe $\omega^a_b \in \Omega^1(\pi^{-1}(U))$

$$\omega^a_b(e) := [y^{-1}(e)]^a_c (\pi^* \hat{\omega}^c_d)(e) [y(e)]^d_b + [y^{-1}(e)]^a_c [y(e)]^c_b$$

$$\omega^a_b(e) := [y^{-1}(e)]^a_c (\pi^* \hat{\omega}^c_d)(e) [y(e)]^d_b + [y^{-1}(e)]^a_c [y(e)]^c_b$$

• Globální 1-forma konexe: $\omega(e) := \omega^a_b(e) E^b_a, \omega \in \Omega^1(\pi^{-1}(U), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$

Tvrzení: Necht $(f'_1, \dots, f'_n) \in \Gamma_{U'}(F(M))$ je ine pak repéra tak, že $U \cap U' \neq \emptyset$ a ω' přísluší lok. 1-forma konexe

Pak

$$\omega|_{\pi^{-1}(U \cap U')} = \omega'|_{\pi^{-1}(U \cap U')}$$

$\Rightarrow$ globální forma konexe $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$.

• Zvolíme-li $\sigma := (f_1, \dots, f_n) \in \Gamma_U(F(M))$ a máme-li globální 1-formu konexe ω příslušející afinní konexi ∇ . Pak $\hat{\omega} := \sigma^* \omega$ je právě lok. 1-forma afinní konexe příslušející $(f_1, \dots, f_n)$ a ∇_a $\mathbb{R}^n$ splňuje (i), (ii)

Věta: Necht $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ splňuje i) $\text{tr} \omega(X) = X$, $\omega^a_b(X) = X^a_b$

$$\text{ii) } \forall A \in GL(n, \mathbb{R}) \quad R_A^* \omega = \text{Ad}_{A^{-1}} \omega = A^{-1} \omega A$$

Pak ω jednoznačně definuje afinní konexi na M skrz lok. 1-formy afinní konexe $\hat{\omega} := \sigma^* \omega$

7. Forma křivosti konexe, Cartanova struktura

Máme P, M, G, R vybavený 1-formou konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$

rovnice

Def: Necht $\omega \in \Omega^k(P, V)$. Zavedeme horizontální část formy

$$(\text{hor } \omega)(X_1, \dots, X_k) := \omega(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_k) \quad \forall X_1, \dots, X_k \in \ker \pi^*(P)$$

$\omega \in \Omega^k(P, V)$ je horizontální k -forma $\Leftrightarrow \omega = \text{hor } \omega \Leftrightarrow \omega \in \Omega^k_{\text{hor}}(P, V)$

VLASTNOSTI: i) $\text{hor} : \Omega^k(P, V) \rightarrow \Omega^k_{\text{hor}}(P, V)$ je projektor

$\hookrightarrow C^\infty(P)$ -modul

ii) hor je ekvariantní, tj. $\forall g \in G, \forall \omega \in \Omega^k(P, V) \quad R_g^*(\text{hor } \omega) = \text{hor}(R_g^* \omega)$

iii) $\text{hor}(\Omega^k_{\mathfrak{g}}(P, V)) \subset \Omega^k_{\mathfrak{g}}(P, V)$

iv) $\forall \omega \in \Omega^k_{\mathfrak{g}}(P, V), \forall \beta \in \Omega^l_{\mathfrak{g}}(P, V) \quad \text{hor}(\omega \wedge \beta) = (\text{hor } \omega) \wedge (\text{hor } \beta)$

v) $\omega \in \Omega^k(P, V) \Leftrightarrow \forall W \in \ker \pi^*(P) \quad i_W \omega = 0$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{g} \quad i_{\#x} \omega = 0$

Def: Vnější kovariantní derivace $D := \text{hor } \circ d$
 $D : \Omega^k(P, V) \rightarrow \Omega^{k+1}_{\text{hor}}(P, V)$

VLASTNOSTI: i) $\mathbb{R}$ -lineární

ii) D je ekvariantní, tj. $\forall g \in G \quad R_g^* \circ D = D \circ R_g^*$

iii) $D(\Omega^k_{\mathfrak{g}}(P, V)) \subset \Omega^{k+1}_{\mathfrak{g}}(P, V)$

iv) $D(\omega \wedge \beta) = D\omega \wedge \text{hor } \beta + (-1)^k \omega \wedge D\beta$
 $\forall \omega \in \Omega^k_{\mathfrak{g}}(P, V), \forall \beta \in \Omega^l_{\mathfrak{g}}(P, V)$

v) Necht $U = U^0 \subseteq M$ a $\Phi \in \Omega^0_{\mathfrak{g}}(P, V)$. $(D\Phi)|_{\pi^{-1}(U)} = 0 \Rightarrow \Phi$ je autoparalelní podél

$$(\mathfrak{g}^h \Phi)(\gamma^h(t)) = [D\Phi(\gamma^h)](\gamma^h(t)) = [D\Phi(\gamma^h)](\gamma^h(t)) = 0$$

"hor" γ^h "hor" $\gamma^h(t)$ libovolné křivky $\gamma : I \rightarrow U$
 $\in \pi^{-1}(U)$

FORMA KŘIVOSTI:

Def: $\Omega := DA$ Forma křivosti konexe A

$$\Omega \in \Omega^2_{\mathfrak{g}}(P, \mathfrak{g}) \cap \Omega^2_{\text{hor}}(P, \mathfrak{g})$$

Věta: Horizontální distribuce je integrabilní $\Leftrightarrow \Omega = 0 \Leftrightarrow$ konexe je plochá

$$\forall \omega \in \Omega^k_{\mathfrak{g}}(P, \mathfrak{g}), \forall x \in \mathfrak{g} \quad \mathcal{L}_{\#x} \omega = -\mathfrak{g}(x) \omega$$

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \quad \forall X, Y \in \ker \pi^*(P) \quad [\alpha \wedge \beta]_g(X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)]_g + [\beta(X), \alpha(Y)]_g$$

Věta: $\Omega = dA + \frac{1}{2} [A \wedge A]_g$ (Cartanova strukturní rovnice)

$$D\Omega \equiv D^2 A = 0 \quad (\text{Bianchiho identita}) \quad D^2 \neq 0$$

Pr: Maurer-Cartan $\theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ $\gamma d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta]_g = 0$ (Maurer-Cartan rovnice)

$$\forall x \in g \quad \theta_L(xL) = x \quad \text{i) } L_g^* \theta_L = \theta_L, R_g^* \theta_L = \text{Ad}_g^{-1} \theta_L \quad \forall g \in G$$

$$\Rightarrow \theta_L \in \Omega^1_{\text{Ad}}(G, \mathfrak{g})$$

Pr: $P = M \times G$: konexe: $A_{(m,g)} = \text{Ad}_g^{-1}(\pi_1^* A')|_{(m,g)} + (\pi_2^* \theta_L)|_{(m,g)}$, kde $A' \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$

$$h\text{-zdvih: } X_{(m,g)}^h = (X_m, -[A'(X)]_{(m)}^R)_g$$

$$\text{krivost: } [\Omega(X, Y)]_{(m,g)} = \text{Ad}_g^{-1} \left[\left(dA' + \frac{1}{2}[A' \wedge A']_g \right) (X, Y) \right]_{(m)} \\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(P)$$

$$\text{je plocha} \Leftrightarrow dA' + \frac{1}{2}[A' \wedge A']_g = 0$$

$$\text{kanonická volba: } A' = 0 \Rightarrow A = \pi_2^* \theta_L$$

$\hookrightarrow$ kanonická plocha konexe

Pr: $P = F(M)$ $\theta_L \in \Omega^1(GL(n, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$

$$\forall \varphi \in M \rightarrow GL(n, \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\varphi^* \theta_L = \varphi^* d\varphi \in \Omega^1(M, GL(n, \mathbb{R}))$$

$$C^\infty(M, GL(n, \mathbb{R}))$$

$$\Omega = \gamma^*(\pi^* \hat{\Omega})_g, \hat{\Omega} \text{ lze získat pull-backem vezm } \zeta \in \pi_0^*(F(M))$$

$$\hat{\Omega} = G^* \Omega$$

Kovariantní derivace vektorů typu 1:

Věta: Necht $\alpha \in \Omega_g^k(P, V) \cap \Omega_{\text{hor}}^k(P, V)$, $P_A \in D\alpha = d\alpha + \mathcal{G}_*(A) \lrcorner \alpha$

Výsledek: $\mathcal{G}_*(A) \lrcorner \alpha$

$$\bullet \text{ Speciálně pro } \Phi \in \Omega_g^0(P, V) \quad D\Phi = d\Phi + \mathcal{G}_*(A) \lrcorner \Phi$$

$$\text{Děslebek: } d\Omega + [A \wedge \Omega]_g = 0$$

(Bianchiho identita)

Kov. derivace na M lze vyjádřit pomocí vnější kov. derivace $D = \mathcal{G}_*(F(M), \mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega_{\text{hor}}^1(F(M), \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{X}(M) = \Omega_g^0(F(M), \mathbb{R}^n) \quad \Phi_{\mathcal{X}Y} = [D\Phi_Y](X)$$

Věta: (Ricciho identita)

$$\forall \alpha \in \Omega_g^k(P, V) \cap \Omega_{\text{hor}}^k(P, V) \quad D^2 \alpha = \mathcal{G}_*(\Omega) \lrcorner \alpha$$

$$\forall \Phi \in \Omega_g^0(P, V)$$

speciálně:

$$D^2 \Phi = \mathcal{G}_*(\Omega) \lrcorner \Phi$$

$$\bullet P = F(M): R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z$$

8. Paralelní Přenos

Nechť $\omega_1, \dots, \omega_g \in \Omega^1(M)$ je soubor 1-formů tak, že $\forall p \in M$ $(\omega_1(p), \dots, \omega_g(p))$ je LN soubor v T_p^*M . Pak D je hladká $(n-g)$ -rozměrná distribuce na M , kde

$$\forall p \in M \quad D_p := \bigcap_{j=1}^g \text{Ker}(\omega_j|_p) \subseteq T_p M$$

D je involutivní $\Leftrightarrow \forall j \in \hat{g} \quad \omega_j \wedge d\omega_j|_{\text{lok. řez distribuce}} = 0$

Def: Nechť $P \xrightarrow{\pi} M, R, G$ je hl. fibrování prostor, A 1-forma konexe.

$$\text{Hor}_p P := \{ v \in T_p P \mid A_p(v) = 0 \} \subseteq T_p P \quad \forall p \in P$$

Horizontální tečný prostor v bodě p

VLASTNOSTI: i) $\text{Hor}_p P$ je $\dim M \equiv \dim P - \dim g$ - rozměrná hladká distribuce na P

$$\text{ii) } \forall p \in P \quad T_p P = \text{Ver}_p P \oplus \text{Hor}_p P$$

$$\text{Projektor: } \text{ver}_p: T_p P \rightarrow \text{Ver}_p P, \text{ hor}_p: T_p P \rightarrow \text{Hor}_p P$$

$$\text{iii) } \forall g \in G \quad \forall p \in P \quad R_{g*} \text{Hor}_p P = \text{Hor}_{p \cdot g} P$$

Věta: Nechť D je hladká $\dim M$ -rozměrná distribuce na P splňující:

$$\text{i) } T_p P = \text{Ver}_p P \oplus D_p, \quad \text{ii) } R_{g*} D_p = D_{p \cdot g}$$

Pak existuje právě jedna 1-forma konexe $A \in \Omega^1(P, g)$ tak, že $D = \text{Hor}_P$.

P^* : Nechť h je Riemannská metrika na P splňující $\forall g \in G \quad R_{g*} h = h$. Pak

$$\text{Hor}_P = \text{Ver}_P^\perp$$

je konexe na $P \xrightarrow{\pi} M$. Taková h vždy existuje $\Rightarrow$ konexe na HFP existuje

Def: Nechť $P \xrightarrow{\pi} M, G, R$ je HFP a $A \in \Omega^1(P, g)$ je 1-forma konexe. Na P vektor $v_p^h \in \text{Hor}_p P$ nazveme Horizontální zdvihem vektora v do bodu p . $\Leftrightarrow \pi_{*p} v_p^h = v$

Tvrzení: Zobrazení $\pi_{*p}: T_p P \rightarrow T_p M$ je lineární izomorfismus.

$$v \mapsto v_p^h$$

VLASTNOSTI: i) $v_{p \cdot g}^h = R_{g*} v_p^h \quad \forall g \in G, \forall v \in T_{\pi(p)} M$

ii) X^h je horizontální zdvih vekt. pole $\rightarrow$ Horizontální zdvih vekt. pole
 $(X^h)_p = (X_{\pi(p)})_p^h$

iii) Horizontální zdvih je pravouhlo-vektorové pole a $\pi_* [X^h, Y^h] = [\pi_* X, \pi_* Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

iv) $\partial_j^h|_p := \partial_j|_p - A_j^i(p) (\# e_i)|_p$ je báze $\text{Hor}_p P$, kde $(x^1, \dots, x^{n-m})$ je část souřadnic na P

Věta: Nechť $\gamma: I \rightarrow M$ je křivka na M a $m := \gamma(0) \in M$ a $p \in P_m$. Pak $\exists!$ $\gamma^h: I \rightarrow P$ tak, že

$$\text{i) } \pi \circ \gamma^h = \gamma, \quad \text{ii) } \gamma^h(0) = p, \quad \text{iii) } \forall t \in I \quad \dot{\gamma}^h(t) \in \text{Hor}_{\gamma^h(t)} P$$

γ^h se nazývá horizontální zdvih křivky γ . Proces rekonstrukce γ^h z γ nazýváme paralelní přenos

• Paralelní přenos = Řešení DIFR $\dot{g}^h(t) = (g^h)'(t)$ s poč. podmínkami $g^h(0) = p$

$$= \frac{d}{dt} \left[X^j(g^h(t)) \left(\partial_j g^h(t) - A_j^i(g^h(t)) X^i(g^h(t)) \right) \right]$$

VLASTNOSTI: i) $g^h := g^h \circ \sigma$, kde $\sigma: I \rightarrow I$ tak, že $\sigma'(t) \neq 0 \forall t \in I \Rightarrow g^h = g^h \circ \sigma$
 ii) g^h je n -zob. křivky $\uparrow$ startující z $p \Rightarrow g^h(\cdot) \cdot g$ je n -zob. křivky g startující z $p \cdot g \forall g \in G$

Paralelní přenos na $F(M)$: je skutečně paralelní přenos ve smyslu, že zob. křivky g^h vlastně určuje v každém bodě g výběr báze, tj. předepisuje jak vypadá zvolený vektor v v $T_g(M)$ v každém bodě $T_{g^h(t)}(M)$, tj. jakožto vektor v $T_{g^h(t)}(M)$

$$\nabla_{g^h} X = 0$$

VL. Formy typu 2: • A 1-forma konexe je 1-forma typu Ad

Def. Necht $\Phi \in \Omega^2_g(P; V)$ a necht $f: I \rightarrow M$ je hladká křivka. Řekneme, že Φ je autoparalelní veličina podél $f \Leftrightarrow \Phi \circ g^h: I \rightarrow V$ je konstantní zobrazení,
 tj. $\frac{d}{dt} (\Phi(g^h(t))) \equiv 0$,
 kde g^h je libovolná zob. f

• $\Omega^2_g(F(M), \mathbb{R}^n) \simeq \mathfrak{X}(M)$

$\hookrightarrow$ std. akce $GL(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$

• Φ je autoparalelní veličina podél $f \Leftrightarrow X_\Phi$ je autoparalelní ve std. smyslu

INTEGRABILITA P.P.

• Paralelní přenos lze chápat jako:
 i) zvolím vlnko $P_m, P_{m'} \in P_m$; $f: I \rightarrow M, f(0) = m, f(1) = m'$
 ii) zvolím vlnko P_m a křivku $f: I \rightarrow M, f(0) = m, f(1) = m'$
 iii) Dostanu $g^h: I \rightarrow P$ tak, že $g^h(0) = p, \pi \circ g^h = f \Rightarrow g^h(1) \in P_{m'}$
 iv) Definuji zobrazení $\tau_{m, m'}^f: P_m \rightarrow P_{m'}$
 $p \mapsto g^h(1)$
 $\hookrightarrow$ je to difeomorfismus

• $\tau_{m, m'}^f$ nezávisí na volbě $f \Leftrightarrow \nabla g^h: I \rightarrow M$ uzavřenou smyčkou $g^h(0) = g^h(1) = m$ platí $\tau_{m, m}^f = \text{id}_{P_m}$

Uvědomění: A je plocha $\Rightarrow \nabla$ me $\exists U \ni m$ tak, že $\forall f, f': I \rightarrow U$ $g_1 = g_1(0) = g_1'(0)$ $g_2 = g_1(1) = g_1'(1)$ $\tau_{g_1, g_2}^f = \tau_{g_1, g_2}^{f'}$

Uvědomění: A je plocha a $f \sim f'$ jsou hladké homotopické $\Rightarrow \tau_{m, m}^f = \tau_{m, m}^{f'}$
 $f(0) = f'(0) = m_0, f(1) = f'(1) = m_1$

Def. Relace ekvivalence na $P: p_1 \sim p_2 \Leftrightarrow \exists$ po částech hladká křivka $f: I \rightarrow M$
 $f(0) = \pi(p_1), f(1) = \pi(p_2)$ a $p_2 = \tau_{\pi(p_1)\pi(p_2)}^f p_1$

Grupa Holonomie $\text{Hol}_p(A) := \{g \in G \mid p \cdot g \sim p\}$ konexe A v bodě $p \in P$

• M je souvislá $\Rightarrow \text{Hol}_p(A) \simeq \text{Hol}_{p'}(A) \forall p, p' \in P$

• $\text{Hol}_p(A)$ je Lieova grupa, její komponenta souvislosti obsahující e se nazývá REDUKOVANÁ GRUPA HOLONOMIE $\text{Hol}_p^0(A)$ kde

je nová ekvivalence

$p_1 \sim p_2 \Leftrightarrow \pi(p_1) = \pi(p_2) \wedge \exists$ po částech hladká smyčka

$P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow \exists$ po částech hladká smyčka

Věta. $\Omega = 0 \Leftrightarrow \forall p \in P \text{ Hol}_p^0(A) = \{e\}$ (důsledek $\Leftarrow$ Ambros-Singer)

$f: I \rightarrow M, f(0) = f(1) = \pi(p_1)$, $\exists p_2 = \tau_{\pi(p_1)\pi(p_1)}^f p_1$
 $\wedge f \sim h \circ \pi(p_1)$

9. Lokální forma konexe a křivosti jako kalibrační pole, kalibrační transformace

• HFP $P \rightarrow M, G, R; A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe

• volba kalibrace $\equiv$ volba $\sigma \in \Gamma_0(P)$

• Lokální formy konexe a křivosti $A \in \mathfrak{g}^* A \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$

$$F \in \mathfrak{g}^* \Omega \in \Omega^2(U, \mathfrak{g})$$

~~kalibrační transformace (transformace kalibračního pole při změně kalibrace)~~

uvážejme $U \cap U' \neq \emptyset$, a $\sigma \in \Gamma_0(P) \Rightarrow \forall m \in U \cap U' \quad \sigma(m), \sigma'(m) \in P_m \Rightarrow \exists g \in G \quad \sigma(m) \cdot g = \sigma'(m)$

$$\Rightarrow \exists \hat{g}: U \cap U' \rightarrow G \text{ takže}$$

$$\sigma(m) \cdot \hat{g}(m) = \sigma'(m)$$

zobrazení $\hat{g}$ nazýváme Lok. kalibrační transformace při změně kalibrace $\sigma \mapsto \sigma'$
hladké

TRANSFORMACE FORMY KONEXE PŘI ZMĚNĚ KALIBRACE

Trvzení: Necht' $U, U' \subset M$ jsou otevřené a $\sigma \in \Gamma_0(P), \sigma' \in \Gamma_0(P)$ a $\hat{g}: U \cap U' \rightarrow G$ je příslušná lok. kalibrační transformace. Pak pro $A' := \sigma'^* A, A := \sigma^* A$ platí

$$A' = \text{Ad}[\hat{g}(\cdot)]^{-1} A + \hat{g}^* \theta_L \quad (\text{na } U \cap U')$$

pro G maticovou

$$A' = [\hat{g}(\cdot)]^{-1} A \hat{g}(\cdot) + [\hat{g}(\cdot)]^{-1} d\hat{g} \quad (\text{na } U \cap U')$$

TRANSFORMACE HOR K-FORMY TYPU 9 PŘI ZMĚNĚ KALIBRACE

Trvzení: Necht' $\alpha \in \Omega^k_g(P, V) \cap \Omega^k_{\text{hor}}(P, V)$ a necht' jsou splněny předpoklady předchozího trvzení. Pak pro $\alpha' := \sigma'^* \alpha, \alpha := \sigma^* \alpha$

$$\alpha' = [\hat{g}(\cdot)]^{-1} \alpha \quad (\text{na } U \cap U')$$

Speciálně

$$F' = \text{Ad}[\hat{g}(\cdot)]^{-1} F$$

• Předpokládejme $\hat{x} \in \Omega^0(U \cap U', \mathfrak{g})$ a kalibrační transformaci ve tvaru $\hat{g}(m) = \exp(t\hat{x}(m)) \quad \forall m \in U \cap U'$

$$\Rightarrow A' = \text{Ad}_{\exp(t\hat{x}(\cdot))} A + \phi(t \text{ad}_{\hat{x}(\cdot)}) t d\hat{x}$$

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \phi(x) := \frac{e^x - 1}{x} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

Infinitesimální kalibrační transformace $\equiv$ rozvoj pravé strany do nejvyššího řádu v okolí $t=0$

$$A' = A + t(-\text{ad}_{\hat{x}(\cdot)} A + d\hat{x}) + O(t^2) \equiv A + t([A, \hat{x}]_{\mathfrak{g}} + d\hat{x}) + O(t^2)$$

$$\text{Ad}_{\exp(-t\hat{x}(\cdot))} = \text{Ad}_{\exp(0)} + t \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-t\hat{x}(\cdot))} + O(t^2) = \text{id}_{\mathfrak{g}} - t \text{ad}_{\hat{x}(\cdot)} + O(t^2)$$

$$F' = F + t[F, \hat{x}]_{\mathfrak{g}} + O(t^2)$$

• Jednoduše souvislé Lieovy grupy: Inf kalib tr plně určují Lok. kalib tr

Def: Lokální vnější kovariantní derivace $\forall d \in \Omega^k(P, V)$
(pro zvolenou kalibraci $\sigma \in \Gamma(U(P))$)

$$\mathcal{D}(\sigma^* d) := \sigma^*(Dd)$$

Uvězň: Necht' je zvolená kalibrace $\sigma \in \Gamma(U(P))$. Pak

$$F = \mathcal{D}A \\ = dA + \frac{1}{2} [A, A]_{\mathfrak{g}}$$

a $\forall d \in \Omega^k_{\mathfrak{g}}(P, V) \cap \Omega^k_{\text{hor}}(P, V)$, $\alpha := \sigma^* d$ platí

$$\mathcal{D}\alpha = d\alpha + \varphi_*(A) \wedge \alpha$$

Uvězň: Necht' $\mathbb{P}, M, G, R$ je HFP a $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce ^{lok} reza P taková, že jejich definiční obory tvoří otevřené pokrytí M . Pak $\forall \alpha, \beta \in I$ $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definujeme $\hat{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ tak, že

$$\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m) \cdot \hat{g}_{\alpha\beta}(m) \quad \forall m \in U_\alpha \cap U_\beta, \text{ tj. } \hat{g}_{\alpha\beta} \text{ je lok. kalib. transformace}$$

Necht' dále $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce 1-form takových, že $\forall \alpha \in I$ $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ a že $\forall \alpha, \beta \in I$ $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ na $U_\alpha \cap U_\beta$ platí:

$$A_\beta = A_\alpha [\hat{g}_{\alpha\beta}(\cdot)]^{-1} \cdot A_\alpha + \hat{g}_{\alpha\beta}^*(\theta_L)$$

Pak $\exists$ 1-forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ taková, že $A_\alpha = \sigma_\alpha^* A$.

• To samé platí pro kolekci $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ splňující $a_\beta = \hat{g}_{\alpha\beta}(\cdot)^{-1} \cdot a_\alpha \mapsto A \in \Omega^1_{\mathfrak{g}}(U_\alpha \cap U_\beta)$ tak, že $a_\alpha = \sigma_\alpha^* A$

• Máme-li okolí U SM ~~pro které existuje~~ lok. 1-forma konexe $A \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ můžeme definovat lok. op. vnější kov. der. $\mathcal{D}\alpha := d\alpha + \varphi_*(A) \wedge \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega^k(U, V)$ (POUZE LOK!)

al. pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$,
Máme-li lokální kalibraci σ_α správně se transformující kolekci $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$
a kolekci lok. 1-form konexe $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ i dostaneme kolekci $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ lok. vnějších op.

Máme-li navíc kolekci $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ $\sigma_\alpha \in \Gamma(U_\alpha(P))$ ~~pro které existuje~~ pak vše funguje i u m. it.

$$\mathcal{D}\alpha = \sigma_\alpha^*(D\alpha)$$

$$\text{use } A = \sigma_\alpha^* A_\alpha = \sigma_\alpha^* A$$

Uvězň: $\Omega = 0 \Leftrightarrow \forall p \in P \quad \text{Hol}_p(A) = \{e\}$ (Důsledek
 $\Leftarrow$ Ambrose-Singer)

$$\lambda \sim_h \mathcal{O}_{\pi(p_A)}$$

10. Kovariantní derivace v přidruženém fibrovanném prostoru, minimální EM interakce, klasické Yang-Millsovo pole

P.P. a K.D. v PPF:

- Máme HEP $P \times M, R, G$; Reprezentaci (V, ρ) grupy G , k -formu konexi $A \in \Omega_{Ad}^1(P, \mathfrak{g})$
- Vytvoříme příslušný asociovaný vektorový bundl $E = P \times_{\rho} V \xrightarrow{\pi} M$

$$\parallel$$

 $(P \times V) / G$
- Necht' $\psi \in \Gamma(E)$ a $\gamma: I \rightarrow M, m := \gamma(0), p_0 \in P_m$ a necht' $\gamma^h: I \rightarrow P$ je h -zdvih krivky γ startující z bodu p_0
- $\forall t \in I, \psi(\gamma(t)) \in P \times V / G, \zeta: P \times V \rightarrow P \times V / G$ je surjektivní $\Rightarrow \exists p \in P: \psi(\gamma(t)) = \zeta(p(t), v(t))$
 $\exists v: I \rightarrow V$ (kde ζ je klasická surj. symbolem ζ)
- ψ je řez $\Rightarrow \forall t \in I, \zeta(\psi(\gamma(t))) = \gamma(t)$

$$\parallel$$

$$\zeta(\zeta(p(t), v(t))) = (\pi \circ \zeta)(p(t), v(t)) = \pi(p(t))$$

$$\parallel$$

$$\pi_1$$

$$P \times V \xrightarrow{\zeta} P$$

$$\Rightarrow \psi(\gamma(t)) = \zeta(\gamma^h(t), v(t))$$

$$\forall t \in I, p(t) \text{ lze volit jako libovol. bod vlnka } P_{\gamma(t)} \text{ (obdobně } \exists v(t) \in V_{\gamma(t)})$$

$$\Rightarrow p(t) := \gamma^h(t)$$

Def. Necht' $\psi \in \Gamma(E)$ a $\gamma: I \rightarrow M$ je hladká krivka. Pak $\forall t \in I, \forall p_0 \in P_{\gamma(0)} \exists v: I \rightarrow V$ h.k. krivka tak, že $\psi(\gamma(t)) = \zeta(\gamma^h(t), v(t))$. Řekneme, že ψ je **autoparalelní** podél krivky $\gamma \Leftrightarrow \forall v: I \rightarrow V$ je konst. zobrazení.

- nezávisí na volbě $p_0: \gamma^h_{p_0} = \gamma^h_{p_0} \circ \gamma$
- máme $\Gamma(E) \simeq \Omega_{\mathfrak{g}}^0(P, V)$

Tvrzení: Necht' $\psi \in \Gamma(E)$ a $\Phi \in \Omega_{\mathfrak{g}}^0(P, V)$ je odpovídající vektorové typy $\mathfrak{g}$.
 ψ je autoparalelní podél $\gamma \Leftrightarrow \Phi$ je autoparalelní podél γ

Def. Kovariantní derivace řezu ψ podél vektorového pole $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X \psi)_m := \zeta(\gamma^h(0), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v(t))$$

kde γ je int. krivka X startující z bodu m a γ^h je její libovolný h -zdvih

$$= (X^h \Phi) \Big|_{\gamma^h(0)}$$

(jakožto příslušná prvek $\Omega_{\mathfrak{g}}^0(P, V)$)

Φ je ziskane $\Gamma(E) \simeq \Omega_{\mathfrak{g}}^0(P, V)$ (volba $\gamma^h(t)$ jednoznačně určuje $v(t)$)

Def. Kovariantní derivace řezu ψ podél vektorového pole $X \in \mathfrak{X}(M)$

• Podskupová metrika $\equiv C^\infty(M)$ -bilineární zobrazení $(\cdot, \cdot): \Omega_{\mathfrak{g}}^0(P, V) \times \Omega_{\mathfrak{g}}^0(P, V) \rightarrow C^\infty(M)$,
 tak, že $\forall m \in M, (\cdot, \cdot)_m: E_m \times E_m \rightarrow \mathbb{R}$ je nedegenerovaná
 $(v, w)_m := (\psi_v, \psi_w)(m)$

Př. Stačí vzít libovol $\mathfrak{g}$ -inv, sym, nedeg. bilin formu na V , $\sum_{i=1}^n$ definovat

$$(\Phi, \Xi)_m := \langle \Phi(p), \Xi(p) \rangle$$

$\forall m \in M$ kde $p \in P_m$ je libovol.

Tvrzení: Necht' $\sigma \in \Gamma(P)$ a $\forall P \in \mathcal{P} \nexists \Phi, \Phi' \in \Omega^0_g(P, V)$ $\langle \sigma^* \Phi \rangle_{(m)}, \langle \sigma^* \Phi' \rangle_{(m)} \rangle = \langle \Phi(P), \Phi'(P) \rangle$
 $\forall m \in V$ kde $\sigma \in \mathcal{P}_m$ je l.v.

Tvrzení: Necht' $A \in \Omega^1_{Ad}(P, g)$ je 1-forma konexe a ∇ jí odpovídající kovariantní derivace kež přídružného vektorového bundlu. Pak ∇ je dobře zobrazení $(\nabla_X \Phi := X^h \Phi)$

$\tilde{\nabla}: \mathcal{X}(M) \times \Omega^0_g(P, V) \rightarrow \Omega^0_g(P, V)$ je j. konexe na vektorovém bundlu $P \times_g V \xrightarrow{\pi} M$

- i) $\forall X \in \mathcal{X}(M), \forall \Phi \in \Omega^0_g(P, V) \quad \nabla_X \Phi = (D\Phi)(X^h)$
 ii) Necht' $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je psulkáknova metrika na $P \times_g V$ definovaná skrz $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pak

• Pro $P = F(M), (V, g) = (R^n, \text{std. rep.})$
 $G = GL(n, R)$ skutečná afinní konexe:

$$X(\Phi, \Phi') = (\nabla_X \Phi, \Phi') + (\Phi + \nabla_X \Phi')$$

Tvrzení: Operátor křivosti je $C^\infty(M)$ -lineární ve všech závstupích a platí

$$R(X, Y)\Phi = \nabla_X(\nabla_Y \Phi) - \nabla_Y(\nabla_X \Phi) - \nabla_{[X, Y]}\Phi$$

EM Pole:

$\mathcal{P}$ - Trivialis fibrováný prostor $P = E^{1,3} \times U(1)$, tj. $M = (R^{1,3}, g)$ Minkowski

- $\omega \in \Omega^1_{Ad}(P, \mathcal{X}(U(1)))$ je forma konexe
- zvolím globální řez $\sigma: m \mapsto (m, e)$
- $A := \sigma^* \omega$ lok. 1-forma konexe na $E^{1,3}$
 $\in \Omega^1(E^{1,3}, \mathcal{X}(U(1)))$
- $\mathcal{U}(U)$ je množina anti-herm matic $1 \times 1 \Rightarrow \mathcal{U}(U) = iR$, std. báze $\chi_1 = i$

$$\Rightarrow A = A_\mu \chi_1 dx^\mu$$

• Kalibrační transformace (pro jednoduchost pouze mezi glob. řezy), lze ukázat, že $\hat{g}(tm) = e^{i\chi(m)}$ (jsou to

$$\Rightarrow A'_m = e^{-i\chi(m)} A_m e^{i\chi(m)} + ie^{-i\chi(m)} \frac{d\chi(m)}{dx^\mu} = A_m + i \frac{d\chi}{dx^\mu} \chi_1$$

$$\hat{g} \in \Omega^0(E^{1,3}, \mathcal{U}(U)) = -ie \frac{d\chi}{dx^\mu} \chi_1$$

$$\Rightarrow A' = A + d\chi$$

přesně kalibrační

• $F = dA = dA + \frac{1}{2} [A \wedge A]_{\mathcal{U}(U)} = dA \Rightarrow F = dA$ tj. komponentní tenzor lok. formy křivosti je tenzor EM-pole

$$F' = A'_\mu \chi_1 dx^\mu = F \Rightarrow F = F$$

• Reprezentace $U(1)$ na C $\rho(g)\lambda := g\lambda \quad \forall g \in U(1), \forall \lambda \in C$

• verzi na $\mathcal{X}_P$ $\rho: \Phi \in \Omega^0_g(E^{1,3} \times U(1), C)$, $\phi := \sigma^* \Phi \in \Omega^0(E^{1,3}, C)$
 rozklad do báze $C, \chi_1, i\chi_1$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \cdot i, \quad \phi_0, \phi_1 \in C^\infty(E^{1,3})$$

$\Rightarrow \phi$ je skalární komplexní pole

$$\text{Tr: } \phi' = \rho(g)^{-1} \phi = e^{-i\chi} \phi$$

$$\bullet \quad \mathcal{D}\phi = d\phi + \rho_*(A) \wedge \phi = d\phi + A \wedge \phi$$

Přesně sedí s tím, co elouk doslane snažíc se najít akci komplexním skal. polem invariantní vůči $U(1)$

(Ambrose-Singer)

$$\lambda \sim \chi \in \pi_1(U(1))$$

Kalibrační invariantní akci:

$P(M, g, \rho), G, R, \mathfrak{g}(V), A$ potřebují A, neboť je tam příklad $S^1_{\text{hor}}(P, V)$

- Ze známých $F, d \in \text{příp. hmotových polí}$ chceme získat hmotová pole vytvořit akci. Spolu se získáním tvoří kalibrační teorii
- Vezmeme libovol. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symetrickou, nedegenerovanou bilineární formu na V

$$\forall a, b \in \Omega^k_g(M, V) \quad ((a, b)) := (a^i, b^j)_g \langle e_j, e_k \rangle \quad \text{nezávisí na výběru báze } V$$

$$U \in M \quad C^\infty(U)$$

- zvolíme nyní $d, \beta \in \Omega^k_g(P, V) / \sim_{\text{hor}}$ $\sigma \in \Gamma_0(P), \sigma' \in \Gamma_0(P), \cup \cup' \neq \emptyset, a := \sigma^* d, a' := \sigma'^* d$
 $b := \sigma^* \beta, b' := \sigma'^* \beta$

$$((a', b'))_{g^{(m)}}(m) = (a^i, b^j)_g(m) \langle \zeta[\hat{g}(m)]^{-1} e_j, \zeta[\hat{g}(m)]^{-1} e_k \rangle$$

$$a'_m = \zeta[\hat{g}(m)]^{-1} a_m = a^i_m \zeta[\hat{g}(m)]^{-1} e_j$$

$$\parallel$$

$$a'^i_m e_j$$

- Je-li $\langle \cdot, \cdot \rangle$ navíc g -invariantní: $((a', b')) = ((a, b))$ KALIBRAČNĚ INVARIANTNÍ OBJEKTY

- Nechť $d, \beta \in \Omega^k_g(P, V)$. Najdeme $\exists \mu \in I$ kolekcí řezů P , jejichž domy pokrývají celé M a definujeme $\forall \mu \in I$ $a_\mu := \sigma_\mu^* d \Rightarrow ((a_\mu, b_\mu)) \in C^\infty(U_\mu)$
 $b_\mu := \sigma_\mu^* \beta$ dobře defin. díky kalibrační invariantci

a navíc na přechodech splňují
 $\Rightarrow$ globálně definovaná funkce značená $((a, b)) \in C^\infty(M)$
 $\Rightarrow$ lze ji integrovat přes celou varietu

$$\text{Pr: } (V, g) = (g, \text{Ad})$$

$\hookrightarrow$ je k dispozici pro každou kalibrační teorii (i bez hmotových polí)

- Máme $\Omega \in \Omega^2_{\text{Ad}}(P, \mathfrak{g})$, můžeme na něj hodit naši integraci

- g je poloprostá $\Rightarrow$ Killingova forma je Ad -invariantní sym. indef. bilin. forma $L(\cdot, \cdot)_g$

- Zvolím si libovol. řez $\sigma \in \Gamma_0(P)$: $A := \sigma^* A \dots$ kalibrační pole, $F := \sigma^* \Omega$

$$S_{\text{kin}}[A] := -\frac{1}{2} \int_M ((F, F))_g \text{Vol}_g$$

kinetický člen kalibrační teorie popí. svazek polem ζ

$$O(a_1, \dots, a_n) \sqrt{\det(g_{ij})} e^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e^{\lambda_n}$$

$$\text{Pr: } (V, g) = (g, \rho)$$

$$\rho(g) = g$$

$$\langle \lambda_0 + i\lambda_1, \lambda'_0 + i\lambda'_1 \rangle := \lambda_0 \lambda'_0 + \lambda_1 \lambda'_1 \quad (\text{s.d. s.s.})$$

$$\Rightarrow S_0[\phi] := \int_M [((D\phi, D\phi))_g - m^2((\phi, \phi))_g] \text{Vol}_g$$

$$\forall \phi \in \Omega^0_g(P, V)$$

$$S[A, \phi] = S_{\text{kin}}[A] + S_0[\phi]$$

Pro elektromagnetismus $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{IR}}$ s.d. s.s. na $\mathbb{R} \Rightarrow S_{\text{kin}}[A] = -\frac{1}{2} \int_M ((F, F))_{\mathbb{R}} \text{Vol}_g$

$$= -\frac{1}{2} \int_M (F, F)_g \text{Vol}_g \quad \langle i, i \rangle_{\mathbb{R}} = 1$$

$$= -\frac{1}{2} \int_M (dA, dA)_g \text{Vol}_g$$

Máme $P(M, G, R)$.

VE FYZICE: Máme prostorovou M a kalibrační pole $A \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ s předepsanou transformací G

$\Rightarrow$ kin. člen $\in$ přechází hmotových polí