

1. Popis stavu v QM

- Hilbertův prostor; ON báze; Stav; pozorovatelné

Fyzikální význam stavu

- de Broglie; Born; souřadnicové, hybnostní a energ. rep.

Jednoduché Q-systemy

- op. polohy a hybnosti, princip korespondence, LHO a báze v. stavů H

OPIS STAVU QM:

Postulát 1 (o matematickém rámci)

- Každému kvantovému systému přísluší komplexní Hilbertův prostor, který nazýváme stavovým prostorem daného systému
- Každému stavu odpovídá statistický operátor na $\mathcal{H}$
- Každé pozorovatelné veličině odpovídá nějaký samosdružený operátor na $\mathcal{H}$

Def: Hilbertův prostor je vektorový prostor vybavený skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, který je úplný vzhledem k indukované metrice $\rho(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$.

- ON báze na $\mathcal{H}$ je libovolná ON množina $B \subseteq \mathcal{H}$ tak, že $B^\perp = \{0\}$.

$$M \subseteq \mathcal{H}, M = \overline{M} \Rightarrow \mathcal{H} = M \oplus M^\perp$$

$$B \text{ je ON báze} \Leftrightarrow \overline{\text{span } B} = \mathcal{H} \quad \forall \mathcal{H} \text{ existuje spočetná ON báze}$$

$$\text{báze} \Leftrightarrow \mathcal{H} \text{ je separabilní}$$

tj. má spčet. top. bázi, nebo

$\exists H \subseteq \mathcal{H}$ spčetná množina v $\mathcal{H}$

Stavy: Pro každé $\psi \in \mathcal{H} \exists \tilde{\psi} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$

Def: $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ zobrazuje omezené množiny na prekompaktní

$\bullet \psi(A) \subseteq \mathbb{C}$ je omezená množina

$\Leftrightarrow$ zobrazuje sladěné konverg. posl. na konver. posl.

$\bullet \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \overline{\text{ker}(A - \lambda I)}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ posl. ψ_n s $\|\psi_n\| = 1$ a $\psi_n(A) \rightarrow \lambda$

$\bullet A$ je komp. a herm. $\Rightarrow A$ má reálné bodové spektrum, tj. existuje ON báze z v. vlastních

Def: $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je jaderný $\Leftrightarrow A$ je kompaktní a $\|A\|_1 := \sum_j \langle e_j | |A| e_j \rangle < +\infty$

$\bullet A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $|A|$ je jediný omezený a pozitivní op. tak, že $|A|^2 = A^*A$

$\bullet \sigma(|A|) \subseteq [0, +\infty)$, $|A|$ je hermiteovský, A je komp. $\Rightarrow |A|$ je komp.

$\bullet \text{Tr } A := \sum_j \langle e_j | A e_j \rangle$ $\bullet |\text{Tr } A| \leq \text{Tr } |A| = \|A\|_1$ $\bullet A$ je jaderný $\Rightarrow \text{Tr } A < +\infty$

Def: $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je statistický $\Leftrightarrow$ i) je jaderný, ii) je pozitivní, iii) $\text{Tr } A = 1$

pozitivní $\Rightarrow$ hermiteovský

$\bullet$ komp. $\oplus$ herm. $\Rightarrow$ diskr. bodové spektrum $\bullet$ komp. $\oplus$ poz. $\Rightarrow$ nezáp. v. řada, spočetné množ.

herm. $\Rightarrow$ v. podprostory vejm. ortog.

$$\text{Tr } A = 1 \Rightarrow \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = 1 \quad (\text{účetně hmotnost})$$

Zvolím si ON bázi z v. vektorů (e_j) a ozn. $E_j: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ projektor na $\text{span } \{e_j\}$,

Pak statistický op. W lze psát jako

$$W = \sum_j w_j E_j$$

Korespondence z jiným přístupem:

$$\psi \in \mathcal{H} \mapsto E_\psi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$\psi \mapsto E_\psi$$

$$E_\psi \mapsto \psi$$

vektory $\psi \in \mathcal{H}$ lze přiřadit

$$E_\psi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \forall \varphi \in \mathcal{H} \quad E_\psi \varphi := \frac{\langle \varphi | \psi \rangle}{\|\psi\|^2} \varphi$$

OG projektor

Pozorovatelné

• op. je uzavřený $\Leftrightarrow$ $x_1 \rightarrow x_2 \wedge A x_1 = y \Rightarrow A x_2 = y$ = uzavřený a lineární def. op. $\Rightarrow$ $\exists z \in Y$
 • vlastnost def. op. $\Rightarrow$ $\text{Dom } A \subseteq X \Rightarrow \text{Dom } A = X$ ($L(Y, Y)$)

Tvrzení:

Nechť $A \in L(Y)$. Pak $\forall y \in Y$ existuje nejvýše jedno $z \in Y$ tak, že

$$\forall x \in \text{Dom } A \quad \langle z, x \rangle = \langle y, Ax \rangle.$$

Zavádíme sdružený operátor A^* tak, že $y \in \text{Dom } A^* = \{ \text{takové vektory } y, \text{ pro něž existuje } z \}$
 tj. $A^* y := z \quad \forall y \in \text{Dom } A^*$

$$\Rightarrow \forall x \in \text{Dom } A, \forall y \in \text{Dom } A^* \quad \langle A^* y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

Def:

$A \in L(Y)$ je samosdružený $\Leftrightarrow A = A^*$
 je hermitovský $\Leftrightarrow A \in B(Y) \wedge A = A^*$

FYZIKÁLNÍ VÝZNAM STAVU:

de Broglieho hypotéza:

- poznámky o ~~elektronu~~ (záření AČT, fotoefekt, Comptonův rozptyl) $\Rightarrow$ EM-záření se přestává chovat jako vlna a začíná být částice
- de Broglie: také to musí platit i naopak!
- kvantová částice := fyzikální objekt vyskytující se na subatomární úrovni
- volná kvantová částice s hybností $\vec{p}$ a energií E není bod v prostoru, ale rovinná monochromatická vlna

$$\psi_{\vec{p}, E}(\vec{x}, t) := A e^{i \hbar^{-1} (\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}, \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

$$\rightarrow \lambda \approx 1 \text{ nm} \text{ pro } p \approx 10^{-24} \text{ kg m/s}$$

• ψ je neznámá vlnová rovnice, je ψ $E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow$ Schrödingerova rovnice
 $-\hbar \frac{\partial^2 \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\vec{x}, t) \psi$

Bornova interpretace:

Rěšení Schrödingerovy rovnice udává časový vývoj pravděpodobnosti nalezení částice v různých oblastech prostoru.

• ψ řeší Schrödingera $\Rightarrow |\psi(x, y, z, t)|^2$ v pravděpodobnost nalezení částice v okamžiku t na místě (x, y, z)

nalezení v oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \int_G |\psi(x, y, z, t)|^2 d\vec{x}$

$$\Rightarrow W_t(\vec{x}) := \frac{|\psi(\vec{x}, t)|^2}{\|\psi\|_2^2}$$

$\hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3, d\vec{x})$ -norma

Reprezentace:

- x-ová, jakožto vektor $\in L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$
- $\vec{p}$ ová hybnostní, vztahovaná k x-ové Fourierovou tr. $f \in L^1 \cap L^2 \quad f(\vec{p}) = [Ff](\vec{p})$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p}} f(\vec{x}) d\vec{x}$$
- energetická jako LN kombinace vln. vektorů $\hat{H}$
 $f \in L^2 \cap L^1 \quad f(\vec{p}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p}} f(\vec{x}) d\vec{x}$
- Separabilní $Y, \dim Y = \infty \Rightarrow$ cyklický vektor
 $\exists \psi \in Y$ takový, že $\{A^n \psi : n \in \mathbb{N}\}$ je hustý v Y
 $\Rightarrow \left(\int_0^1 dE \right) \rho : L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_p) \rightarrow Y$ je izometrie
 $\hookrightarrow$ lineární rovnice pro $\hat{H}$ a $\hat{A}$

JEDNODUCHÉ Q-SYSTEMY:

Operátor polohy a hybnosti:

• operátor polohy: $Q: \text{Dom } Q \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dx)$, $\text{Dom } Q = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}, dx) \mid x\psi \in L^2(\mathbb{R}, dx) \}$
 $\psi \mapsto x\psi$ $\sigma(Q) = \sigma_c(Q) = \mathbb{R}$

• operátor hybnosti: $P: \text{Dom } P \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dx)$, $\text{Dom } P = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}, dx) \mid \psi \text{ je absolutně spojitý a } \psi' \in L^2(\mathbb{R}, dx) \}$
 $\psi \mapsto -i\hbar \psi'$

~~schrodingera rovnice~~

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

P je unitárně ekvivalentní s Q

$$P = F^{-1} Q F$$

Princip korespondence: zbylé pozorovatelné: klasický - funkce na fázovém prostoru $F = F(q, p)$
 $\Rightarrow$ kvantově - $F = F(Q, P)$

LHO: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x$$

$$\text{vl. číslo: } \hat{H}\psi = E\psi$$

a) Řešení LDR 2. řádu s nekonečnými koeficienty (spektrum se objeví jako podmínka na to aby existovalo řešení z $L^2(\mathbb{R}, dx)$)

b) Posunovací operátory

Def: Operátor $\hat{A}$ je posunovacím operátorem k operátoru $\hat{B}$ s posunem $\Delta \in \mathbb{C} \Leftrightarrow [\hat{B}, \hat{A}] = \Delta \hat{A}$

• λ je vl. číslo $\hat{B}$: $\hat{B}\hat{A}|\lambda\rangle = \hat{A}\hat{B}|\lambda\rangle + \Delta\hat{A}|\lambda\rangle = (\lambda + \Delta)\hat{A}|\lambda\rangle \Rightarrow \hat{A}|\lambda\rangle = 0$ v $(\lambda + \Delta)$ je vl. číslo $\hat{B}$ s vl. $\hat{A}|\lambda\rangle$

• $\hat{A}$ je posunovací k $\hat{B}$ s posunem $\Delta \Rightarrow \hat{A}^*$ je posunovací k $\hat{B}^*$ s posunem $-\Delta$

$$\hat{\alpha}_{\pm} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} \left(\hat{q} \mp \frac{i}{\hbar\omega} \hat{p} \right) \text{ (kreační / anihilační op.)}$$

$$[\hat{H}, \hat{\alpha}_{\pm}] = \pm \hbar\omega \hat{\alpha}_{\pm}$$

~~Číslo~~

$$\sigma(\hat{H}) = \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}, \text{ základní stav: } \frac{\hbar\omega}{2}$$

excitované stavy: zbytek

• čisté bodové spektrum, ON báze tvořená (Hermitovými polynomy)

2. Lineární operátory v kvantové mechanice

- samosdružené, unitární, projektory, jaderné,

Spektrální teorém, Dom a vl. hodnoty, Projekt. míra, měření pozorovatelných s bod. a spoj. spektrem

Direktní součet a tenzorový součin, ÚSKO

Tvrzení: Necht' $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pak $\forall y \in \mathcal{H}$ existuje nejvýše jedno $z \in \mathcal{H}$ tak, že

$$\forall x \in \text{Dom } A \quad \langle z, Ax \rangle = \langle y, Ax \rangle.$$

Sdružený operátor A^* : i) $\text{Dom } A^* = \{y \in \mathcal{H} \mid \text{existuje } z \in \mathcal{H} \text{ tak, že } \forall x \in \text{Dom } A \langle z, Ax \rangle = \langle y, Ax \rangle\}$
 ii) $A^*y = z$

$$\forall x \in \text{Dom } A, \forall y \in \text{Dom } A^* \quad \langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

Def: Lineární operátor A na $\mathcal{H}$ nazveme i) hermitovským $\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \wedge A = A^*$

- $\lambda \in \mathcal{B}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_{\mathcal{H}})$ není bijekce $\text{Dom } A \rightarrow \mathcal{H}$ ii) Symetrickým $\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \wedge A = A^*$
 $\Leftrightarrow \text{Ran}(A - \lambda I) \neq \mathcal{H} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{v} \text{ ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ iii) Samosdruženým $\Leftrightarrow A = A^* \wedge A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
- $\lambda \in \mathcal{B}_p(A) \Leftrightarrow \text{ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ iv) normálním $\Leftrightarrow A$ je uzavřený $\wedge A^*A = AA^*$
 $\lambda \in \mathcal{B}_c(A) \Leftrightarrow \text{ker}(A - \lambda I) = \{0\} \wedge \text{Ran}(A - \lambda I) \neq \mathcal{H}$ v) unitárním $\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \wedge A^* = A^{-1}$
 $\lambda \in \mathcal{B}_r(A) \Leftrightarrow -1 \wedge 1 \in \text{Ran}(A - \lambda I) \neq \mathcal{H}$ vi) Projektorem $\Leftrightarrow A^2 = A, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$
 vii) OG-projektorem $\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \wedge A^2 = A \wedge \text{ker } A = (\text{Ran } A)^\perp$
 viii) v podstatě samosdruženým $\Leftrightarrow \bar{A}$ je samosdružený $\wedge A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

OPERÁLNÍ TEORÉM A PD

VLASTNOSTI: • Sdružení: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Rightarrow T^*$ existuje

• $T, T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Rightarrow T^{**}$ existuje

• T^{**} existuje $\Rightarrow T^{**} \circ T, T^{**} = \bar{T}$

• T je uzavíratelný $\Leftrightarrow T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

• $S \subset T \Rightarrow T^* \subset S^*$

• $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

• $(S+T)^* \subset S^* + T^*$

• $TS \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Rightarrow (TS)^* \supset S^* T^*$

• $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Rightarrow (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

• $\text{Ker } A^* = (\text{Ran } A)^\perp$

• $\bar{T}$ existuje $\Rightarrow \bar{T}^* = T^*$

• Symetrický: $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

• je uzavíratelný

• $\text{Dom } A = \mathcal{H} \Rightarrow$ hermitovský

• max Symetrický $\Rightarrow$ uzavřený

$\Rightarrow$ nejednoznačný

$\Rightarrow$ ne nutně samosdružený

• Samosdružené: • $\mathcal{G}_r(A) = \emptyset$

• $\lambda \in \mathcal{B}(A) \Leftrightarrow \exists m > 0 \forall x \in \text{Dom } A \quad \|(A - \lambda I)x\| \geq m \|x\|$

$\lambda \in \mathcal{B}_c(A) \Leftrightarrow \exists (x_n) \subset \text{Dom } A, \|x_n\| = 1$

neuzavřený $\| (A - \lambda I)x_n \| \rightarrow 0$

• $\mathcal{G}_r(A) \subset \mathbb{R}$

max. s.j.m.

• normální:

• T je norm $\Leftrightarrow T^*$ je norm

• $\lambda \in \mathcal{B}_p(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \mathcal{B}_p(T^*)$

• vl. podprostory jsou vzájemně OG

• $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{Ker}(T - \lambda I) = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I)$

• $\mathcal{G}_r(A) = \emptyset$

• Weyl

SPEKTRÁLNÍ TEOREM A PROJEKTOROVÁ MÍRA:

Projektory VLASTNOSTI: $E \geq 0$, $\text{Ran } E = \overline{\text{Ran } E}$, $E+F$ je projektor $\Leftrightarrow \text{Ran } E \perp \text{Ran } F$

Def. Necht X je množina a $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ je σ -algebra a $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor. Projektorová míra: $E: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tak, že: i) $\forall M \in \mathcal{M}$ je $E(M)$ projektor na $\mathcal{H}$

σ -algebra: i) $x \in \mathcal{M}$, ii) $\forall A \in \mathcal{M}$ $x \cap A \in \mathcal{M}$

ii) ~~...~~ + nejvýše spočetné $(M_n) \subset \mathcal{M}$, $M_n \cap M_m = \emptyset$

iii) $(A_n) \subset \mathcal{M}$, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$

platí: $E(\bigcup_n M_n) = \sum_n E(M_n)$

platí: $(A_n) \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{M}$

iii) $E(x) = \text{id}_{\mathcal{H}}$

VLASTNOSTI:

i) $E(\emptyset) = 0$

ii) $E(M \cup N) = E(M) + E(N) - E(M \cap N)$

iii) $M \subset N \Rightarrow E(M) \leq E(N)$

iv) pro $(M_n) \subset \mathcal{M}$ netles $E(\bigcup_n M_n) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} E(M_n)$

v) $E(M \cap N) = E(M)E(N)$

nerost $E(\bigcap_n M_n) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} E(M_n)$

vi) $E(M)E(N) = E(N)E(M)$

vii) $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ má zobrazení $\mu_{\varphi}: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ vlastnosti: nezáporné
: $M \mapsto \langle \varphi | E(M) \varphi \rangle$ konečné míry na X

Míra: $(X, \mathcal{M})$ je měřitelný prostor

Speciálně $\mu_{\varphi}(x) = \|\varphi\|^2$

$\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

$(M_n) \subset \mathcal{M}$, $M_n \cap M_m = \emptyset \Rightarrow \mu(\bigcup_n M_n) = \sum_n \mu(M_n)$

Def. Rozklad jednotky: $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tak, že: i) $\forall t \in \mathbb{R}$ je E_t projektor

ii) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ $s \leq t \Rightarrow E_s \leq E_t$

iii) $\forall t \in \mathbb{R}$ $s\text{-}\lim_{k \rightarrow t+} E_k = E_t$

iv) $s\text{-}\lim_{t \rightarrow -\infty} E_t = \text{id}_{\mathcal{H}}$, $s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} E_t = 0$

• jednoznačná korespondence: Projektorová míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^+)$ $\xleftrightarrow{\text{1:1}}$ Rozklad jednotky

$\xrightarrow{1:1} E_t := E((-\infty, t])$

nejméně σ -algebra, že $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}^+$

$\xleftarrow{1:1} \forall t \in \mathbb{R} \quad E((-\infty, t]) := E_t, E((-\infty, t)) := s\text{-}\lim_{k \rightarrow t-} E_k$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ $E([a, b]) := s\text{-}\lim_{k \rightarrow b-} E_k - s\text{-}\lim_{k \rightarrow a-} E_k$

$E((a, b]) := E_b - E_a$, $E([a, b]) := E_b - s\text{-}\lim_{k \rightarrow a-} E_k$

$E((a, b)) := s\text{-}\lim_{k \rightarrow b-} E_k - E_a$, $E([a, b)) := s\text{-}\lim_{k \rightarrow b-} E_k - s\text{-}\lim_{k \rightarrow a-} E_k$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad E(\{a\}) := E_a - s\text{-}\lim_{k \rightarrow a-} E_k$, $E(\mathbb{R}) := \text{id}_{\mathcal{H}}$, $E(\emptyset) := 0$

~~$\forall A$ samosdruželný existuje σ -algebra $\mathcal{M}$ a spektrální míra E_A tak, že~~

Integrál: $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ je integrovatelný $\Leftrightarrow$ i) je měřitelný, tj. $\forall M \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^+ \quad f^{-1}(M) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^+ \quad f^{-1}(M) \in \mathcal{M}$

(má proj. míru)

ii) je E -skala všude definovaná

$\Leftrightarrow$ Pro N množinu všech bodů x , v nichž f není definováno

platí $E(N) = 0$

1) Jednoduché schodovité funkce

$\forall x \in X \quad \sigma(x) = \sum_j \lambda_j \chi_{M_j}(x)$, $\{\lambda_j\}$ je kolekcí podmnoží X tak, že $E(\bigcup_j M_j) = 0$
 $\lambda_j \in \mathbb{C}$ disjunktní

$$\int_X \sigma dE = \sum_j \lambda_j E(M_j), \quad \left\| \int_X \sigma dE \right\| = \|\sigma\|_{\infty}$$

2) Omezené funkce, tj. $\text{Ress} \{f\} = \{1 \in \mathbb{C} \mid E(f^{-1}(U_{\varepsilon,1})) \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0\}$ je omezená
 $\|f\|_{\infty} = \text{nejmenší } c \in \mathbb{R} \text{ tak, že } |f(x)| < c \text{ E-skoro všude}$

• $\exists (G_n) \quad \|f - G_n\|_{\infty} \rightarrow 0$

• (G_n) je Cauchy $\Rightarrow (\int G_n dE)$ je Cauchy $\Rightarrow \exists$ limita $\int_X f dE := S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X G_n dE \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$

3) f libovolná množina vyjádřených funkcí

$\int_X f dE := S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dE$, kde $f_n \rightarrow f$ bodově E-skoro všude

$\text{Dom} \int_X f dE = \{\psi \in \mathcal{H} \mid (\int_X f dE) \psi \text{ má lim}\}$

platí: • $\int_X f dE$ je hustě definovaný, $\text{Dom} \int_X f dE = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \int_X |f \psi|^2 d\mu < +\infty\}$

• $\int_X f dE$ je normální

• $\int_X f dE$ je samosdružený $\Leftrightarrow f$ je E-skoro všude reálná

• $\sigma(\int_X f dE) = \text{Ress}^{(E)}(f)$

$\hookrightarrow$ esenciální obor hodnot

Spektrální teorém: $\forall A$ samosdružený $\exists$ projektorová míra E_A na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ (spektrální míra)

tak, že

$A = \int_{\mathbb{R}} x dE_A$

$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f dE_A$

• $1 \in \sigma(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad E_A(U_{\varepsilon,1}) \neq \emptyset$

• $1 \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow E_A(\{1\}) \neq \emptyset$

• Nosič míry $E_A = \mathbb{E}(A)$

$\hat{=}$ Doplněk největší ot. množiny E_A -míry nula

ÚSKO:

Def: Množina pozorovatelných se nazve úplná $\Leftrightarrow$ znalost hodnot těchto pozorovat. na libovolném stavu, iž tento stav jednoznačně určuje

• $\{A\}$, kde A má čistě bodové nedegenerované spektrum, je ÚMP

• $\{A_1, \dots, A_n\}$ je soubor samosdružených op. komutujících op. s čistě bodovým

spektry na separabilním $\mathcal{H}$. Tvůr ÚMP $\Leftrightarrow$ ~~komutující~~ ^{komutující} společné vl. podprostory jsou 1-dim
 $\hookrightarrow$ stav je pak popsán N -tici čísel, resp. j -m prvků j -tice

• obecně $\{A_1, \dots, A_N\}$ je ÚMP $\Leftrightarrow A_j$ mezi sebou komutují a každá A_j samosdruženě komutující se všemi A_i je iž jejich funkcí, tj. $A = f(A_1, \dots, A_N)$

3. Postulát měření v QM

- Předpovědi výsledků měření, pravděp. interp. stavu Q -částice, Pravděpodobnost přechodu mezi stavy, pravdp. naměření dané množiny hodnot pozorovatelné, střední hodnota, komp. poz., Str. kv. odch., relace neurčitosti

Postulát 2 (o měření):

- Možnými výsledky měření veličiny A jsou body spektra $\sigma(A)$
- Pravděpodobnost, že na systému ve stavu W naměříme hodnot pozorovatelné A ležící v Borelovské množině $\Delta \subset \mathbb{R}$ je rovna

$$W(\Delta, A; W) = \text{Tr}(E_A(\Delta) W)$$

- Je-li naměřeno, že hodnota veličiny A leží v Δ , pak je stav systému po měření popsán operátorem

$$W' = \frac{E_A(\Delta) W E_A(\Delta)}{\text{Tr}(E_A(\Delta) W)}$$

Korespondence s jiným popisem:

$$W = E\varphi, \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1, \therefore W(\Delta, A; E\varphi) = \|E_A(\Delta)\varphi\|^2 = \sum_{k \in \text{dim} E_A(\Delta)} |\langle \psi_k | \varphi \rangle|^2$$

$$\bullet W' = \frac{E_A(\Delta) E\varphi E_A(\Delta)}{\text{Tr}(E_A(\Delta) E\varphi)} = E_{E_A(\Delta)\varphi}$$

Besselova nerovnost: $AS\mathcal{H}$ je ON podmnožina: $\forall x \in \mathcal{H} \sum_{u \in A} |\langle u, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Parsevalova rovnost: $AS\mathcal{H}$ ON podmnožina je ON báze $\Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{u \in A} |\langle u, x \rangle|^2$

Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Pravděpodobnost přechodu mezi stavy: čisté stavy $\langle \varphi | \psi \rangle^2 = \text{Tr}(E_\varphi E_\psi)$

obecně asi: $\text{Tr}(W' W)$ (přechod stavů)

KOMPATIBILITA POZOROVATELNÝCH

Def: Pozorovatelné A_1, A_2 jsou kompatibilní $\Leftrightarrow \forall W$ stat. op. $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}^1$

je pravděpodobnost naměření A_1 v Δ_1

následována naměřením A_2 v Δ_2

stejně jako $1 \leftrightarrow 2$

Def: Samosdružené op. A_1, A_2 komutují:

$$\Leftrightarrow \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}^1 \quad E_{A_1}(\Delta_1) E_{A_2}(\Delta_2) = E_{A_2}(\Delta_2) E_{A_1}(\Delta_1)$$

$$\Leftrightarrow \text{Tr}(E_{A_2}(\Delta_2) E_{A_1}(\Delta_1) W E_{A_1}(\Delta_1)) = \text{Tr}(E_{A_1}(\Delta_1) E_{A_2}(\Delta_2) W E_{A_2}(\Delta_2))$$

Čistý stav Ex 11

$$\frac{1}{\|\varphi\|^2} \langle \varphi | E_{A_1}(\Delta_1) E_{A_2}(\Delta_2) E_{A_1}(\Delta_1) \varphi \rangle = \langle \varphi | E_{A_1}(\Delta_1) E_{A_2}(\Delta_2) E_{A_1}(\Delta_1) \varphi \rangle$$

$$\frac{1}{\|\varphi\|^2} \langle \varphi | E_{A_1}(\Delta_1) E_{A_2}(\Delta_2) E_{A_1}(\Delta_1) \varphi \rangle = \langle \varphi | E_{A_1}(\Delta_1) E_{A_2}(\Delta_2) E_{A_1}(\Delta_1) \varphi \rangle$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{H} \quad \langle \varphi | E_{A_1}(\Delta_1) E_{A_2}(\Delta_2) E_{A_1}(\Delta_1) \varphi \rangle = \langle \varphi | E_{A_1}(\Delta_1) E_{A_2}(\Delta_2) E_{A_1}(\Delta_1) \varphi \rangle$$

$$\Leftrightarrow A_1 \text{ a } A_2 \text{ komutují}$$

A, B - samosměrné.

- A, B mají čisté bodové spektra a společnou $\mathcal{O}$ bázi $\mathbb{R}$ vektorů $\Rightarrow [A, B] = 0$
- A má čisté bodové spektrum, $\forall \lambda \in \sigma_p(A)$ $\dim(\ker(\lambda I - A)) < \infty$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $[A, B] = 0 \Rightarrow$ společná $\mathcal{O}$ báze $\mathbb{R}$ vektorů

STŘEDNÍ HODNOTY:

$$\langle A \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mu_A^W(\lambda)$$

speciálně: $\langle A \rangle_{E\psi} = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mu_\psi^A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \langle \psi | E_A(\lambda) \psi \rangle = \langle \psi | A \psi \rangle$

$$\mu_A^W(\lambda) = \text{Tr}(E_A(\lambda)W)$$

$$\stackrel{?}{=} \text{Tr}(AW)$$

↑ obecně ne!

$$\mu_A^{E\psi} = \text{Tr}(E_A(\lambda)E_\psi) = \langle \psi | E_A(\lambda) \psi \rangle = \langle \psi | E_A(\lambda) \psi \rangle = \mu_\psi^A(\lambda)$$

$\langle A \rangle_{E\psi}$ je definována pouze pokud $\psi \in \text{Dom } A$

- $AW \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ (jederný) je postačující podmínka pro existenci $\text{Tr}(AW)$ i pro dobře def $\langle A \rangle_W$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_W &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \mu_A^W = \int_{\mathbb{R}} \lambda \langle \psi_j | E_A(\lambda) \psi_j \rangle = \text{Tr}(AW) = \sum_j \langle \psi_j | AW \psi_j \rangle = \sum_{j,k} \langle \psi_j | A E_{\psi_k} \psi_j \rangle = \sum_{j,k} \langle \psi_k | A \psi_j \rangle \langle \psi_j | \psi_k \rangle \\ &= \sum_k \langle \psi_k | A \psi_k \rangle \end{aligned}$$

STŘEDNÍ KVADRATICKÉ ODCHYLKY:

$A, B \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ $A, A^2, B, B^2 \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H})$: $(\Delta A)_W = \sqrt{\langle A^2 \rangle_W - \langle A \rangle_W^2}$

$$= \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle_W)^2 \rangle_W}$$

(jak dobře je hodnota A ve stavu ψ určena, proti odchylce $\Delta A \psi = 0$)

- Relace neurčitosti: $A_1 W, A_1^2 W, A_2 W, A_2^2 W, A_1 A_2 W, A_2 A_1 W \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H})$

$$(\Delta A_1)_W (\Delta A_2)_W \geq \frac{1}{2} |\text{Tr}((A_1 A_2 - A_2 A_1)W)|$$

- kurzení:** $\forall \lambda \in \sigma(A)$ a $\forall \varepsilon > 0 \exists \psi \in \mathcal{H}$ tak, že $|\langle A \rangle_{E\psi} - \lambda| \leq \varepsilon$, $(\Delta A)_{E\psi} \leq 2\varepsilon$

($A_1 A_2$ jsou nekomut. $\Rightarrow$ hledáme stav, pro který by odchylka A_1 a A_2 byla malá a $A_1 A_2$ by bylo blízko komut.)

Weylová relace: $\exp(i \sum_{j=1}^n t_j P_j) \exp(i \sum_{k=1}^n s_k Q_k) = \exp(i \vec{t} \cdot \vec{s}) \exp(i \sum_{k=1}^n s_k Q_k) \exp(i \sum_{j=1}^n t_j P_j)$

↳ před je pouze $\exp(i \vec{t} \cdot \vec{s})$ a $\exp(i \sum_{k=1}^n s_k Q_k)$ a $\exp(i \sum_{j=1}^n t_j P_j)$

- $Q_j P_k - P_k Q_j = -i \delta_{jk} \text{id}_{\text{Dom}(Q_j P_k - P_k Q_j)}$ hustě definovaný $\Rightarrow \overline{Q_j P_k - P_k Q_j} = -i \delta_{jk} \text{id}_{\mathcal{H}}$

- vždy nepatří: $(\Delta Q_j)(\Delta P_j)_W \geq \frac{1}{2}$

$$\exp(i \sum_{j=1}^n t_j P_j) \exp(i \sum_{k=1}^n s_k Q_k) = \exp(i \vec{t} \cdot \vec{s}) \exp(i \sum_{k=1}^n s_k Q_k) \exp(i \sum_{j=1}^n t_j P_j)$$

1. Čisté a smíšené stavy

- fyzikální odůvodnění stat. popisu pomocí matice hustoty, smíšené stavy po průchodu měřicím přístrojem, matice hustoty 2-hladinového systému, Blochova sféra, časový vývoj matice hustoty, předpovědi výsl. měř. pro sm. st.

Def: Statistický operátor ($\equiv$ Matice hustoty) $W = \sum_{ij} W_{ij} |i\rangle\langle j|$, tj. je jaderný
 i) $W \geq 0$, tj. $\forall \psi \in \mathcal{H} \langle \psi | W | \psi \rangle \geq 0$
 ii) $\text{Tr} W = 1$
 Stopy: $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr} A + \text{Tr} B$ • $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
 $\text{Tr} A^* = \overline{\text{Tr} A}$

W má čisté bodové spektrum $\Rightarrow$ vyberu ON bázi $|e_j\rangle \in \mathcal{H}$ a cca E_j OG projektor na $\text{span}\{e_j\}$:
 $\forall \psi \in \mathcal{H} \quad W|\psi\rangle = \sum_j |\psi\rangle W_{jj} = \sum_j \langle \psi | e_j \rangle \langle e_j | W | \psi \rangle e_j = \left(\sum_j W_{jj} E_j \right) |\psi\rangle \Rightarrow W = \sum_j W_{jj} E_j$
 $\Rightarrow$ ul. čísla W nazýváme "součet částí" $\Rightarrow W_{jj} \in [0,1]$

$\Rightarrow W$ lze interpretovat jako pravděpodobnostní rozdělení

Prostor stat. op. je uzavřený na konvexní kombinace

Čisté stavy $\equiv$ OG projektory na 1-dim podprostory $E_j = \frac{1}{\dim} |e_j\rangle\langle e_j|$ (má čisté bodové spektrum)

Smíšené stavy $\equiv \{\text{stat. op.}\} \setminus \{\text{čisté stavy}\}$

Směšovací stavy $\equiv$ konvexní kombinace stat. op.

Čistota stavů: $\text{Tr}(W_1 W_2) \in [0,1]$ • Čistota stavů $\text{Tr}(W^2)$ • $\text{Tr}(W) = 1 \Leftrightarrow W$ je čistý
 $\sum_j \langle e_j | W_1 W_2 | e_j \rangle = \sum_j W_{1j} W_{2j}$ • $\sum_j W_{jj}^2 = 1$ "smíšený" $\in (0,1)$

dyž nemáme stav přesně (statistický důkaz)

objde-li stav měřením, ale neznáme jeho výsledek, je ve stavu:

$$W' = \sum_{\text{výsledek}} E_j^A W E_j^A \quad (A \text{ má čisté bodové spektrum, } |e_j^A\rangle \text{ je báze čísl. vektorů, } E_j^A \text{ je proj.})$$

číslo stav ψ , $\psi = \sum_j \psi_j |e_j^A\rangle \Rightarrow E_j^A = |e_j^A\rangle\langle e_j^A| \Rightarrow \langle \psi | E_j^A | \psi \rangle = |\psi_j|^2$

$$\text{po měření} \quad W' = \sum_j |e_j^A\rangle\langle e_j^A| \langle \psi | E_j^A | \psi \rangle \langle e_j^A | = \sum_j |\psi_j|^2 |e_j^A\rangle\langle e_j^A|$$

(z čistého stavu je smíšený pokud ψ není ul. vektor A)

koherentní x koherentní superpozice (matice)

$$A = \sum_j A_j |e_j^A\rangle\langle e_j^A| \quad E_A(|A\rangle) = \sum_j |A_j|^2 |e_j^A\rangle\langle e_j^A|$$

oba stavy dávají stejnou distribuci p. výsl. měření A (nezmění se)

$$\text{Tr}(E_A(|A\rangle) W') = \sum_{k \in \mathcal{K}_A} \text{Tr}(E_A(|A\rangle) E_k^A E_A(|A\rangle)) = \sum_{k \in \mathcal{K}_A} \text{Tr}(E_A(|A\rangle) E_k^A) = \text{Tr}(E_A(|A\rangle) E_A) = 1$$

~~Stat. op. lze diagonalizovat přečít na vektor, zajímavé věc se děje~~

DVOUHĽADINOVÝ SYSTÉM:

$\hat{=}$ systém, jehož stavovým prostorem je 2-dim Hilbertův prostor

$\Rightarrow$ je izomorfní $\mathbb{C}^2$ se standardním S.O.S.

• modelový příklad: částice se spinem $1/2$

• každý stat. op. na $\mathbb{C}^2$ lze ztotožnit s maticí 2×2

báze komplexních matic 2×2 , např. ~~$\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$~~ $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W = \alpha I + b_j^i \sigma_j$, $\alpha, b_j^i \in \mathbb{C}$

• $\text{Tr} W = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{Tr} W$

• $W \geq 0 \Rightarrow W = W^\dagger, (\frac{1}{2}I + b_j^i \sigma_j)^\dagger = \frac{1}{2}I + \overline{b_j^i} \sigma_j^\dagger \Rightarrow b_j^i \in \mathbb{R}$

• $\langle \sigma_j \rangle_W = \text{Tr}(\sigma_j W) = \text{Tr}(\frac{1}{2}\sigma_j + b^k \sigma_k \sigma_j) = b^k \text{Tr}(\sigma_k \sigma_j) = 2 b_j$
 $\sigma_k \sigma_j = \frac{1}{2}(\delta_{kj} I + i \epsilon_{kjl} \sigma_l)$

• vektor polarizace $[\vec{p}]_W = \langle \sigma_j \rangle_W \Rightarrow \frac{1}{2} \vec{p} = \vec{b}$

• Stat. op. je plně dán vektor polarizace: $W_{\vec{p}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & 1-p_3 \end{pmatrix}$

• $\sigma(W_{\vec{p}}) = \{ \lambda_{\pm} := \frac{1 \pm p}{2} \}$

• aby byl skutečně stat. op.: $\sigma(W_{\vec{p}}) \subseteq \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow p \leq 1 \Leftrightarrow p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leq 1$
 (Spektrální kritérium)

$\Rightarrow$ Blochova sféra (stav dvouhladinového systému $\cong$ body uzavřené koule v $\mathbb{R}^3$)

~~prokázat~~ $W_{\vec{p}}^2 = \frac{1}{4} (\mathbb{I} + p^i \sigma_i)(\mathbb{I} + p^k \sigma_k) = \frac{1}{4} (\mathbb{I} + 2p^i \sigma_i + p^i p^k \sigma_i \sigma_k)$
 $= \frac{1}{4} ((1+p^2)\mathbb{I} + 2\vec{p} \cdot \vec{\sigma})$

• $\text{Tr}(W_{\vec{p}}^2) = \frac{1}{2} (1+p^2) \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow p \leq 1$

- povrch sféry $\equiv$ čisté stavy (Bazický stav (6): severní pól)
- vnitřek sféry $\equiv$ smíšené stavy (Bazický stav (9): střed koule)

• Projekce spinu do osy určené jednotkovým vektorem $\vec{n}$: $S_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}, E_{\pm}(\vec{n}) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$

$\text{Tr}(E_{\pm}(\vec{n}) W_{\vec{p}}) = \frac{1}{2} (1 \pm \vec{n} \cdot \vec{p})$ • Pro čistý stav existuje $\vec{n}$ tak, že $\text{Tr}(S_{\vec{n}} W_{\vec{p}}) = \pm \hbar/2$

$\langle S_{\vec{n}} \rangle_{W_{\vec{p}}} = \text{Tr}(S_{\vec{n}} W_{\vec{p}}) = \frac{\hbar}{2} \vec{n} \cdot \vec{p}$ • Pro smíšený stav lze S naměřit s maximální přesností naměřit $\pm$ projekci (30.01.2019)

• plně polar = čisté stavy, částečně polar = smíšené stavy
 plně nepolar = max smíšený stav

5. Částice ve sféricky symetrickém poli

- komp. poč., op. orb. mom. hyb., kulové funkce, Hamiltonián, efektivní potenciál, degenerace hladin, Izo. HO, Coulombické pole

• Hilbertův prostor $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$

• Hamiltonián: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + \hat{V}(r)$

Moment hybnosti: $\hat{L}_j = \varepsilon_{jke} \hat{G}_k \hat{P}_e$, ÚMP = $\{\hat{H}, \hat{L}_j, \hat{L}^2\}$

(za předpokladu že $\hat{H}$ má sférickou symetrii)

• 3. složka $\hat{L}_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \Rightarrow \mathcal{G}_p(\hat{L}_3) = \{m\hbar | m \in \mathbb{Z}\}$

$m\hbar$: $\psi(r, \theta, \varphi) = \chi(r, \theta) e^{im\varphi}$ (podprostor v $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ V_m)

celková hybnost $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$

$\forall m \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{G}_p(\hat{L}^2|_{V_m}) = \{l(l+1)\hbar^2 | l \in \mathbb{Z}_+, |m| \leq l\}$

$m\hbar$: $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$

• kulové funkce tvoří ON bázi $L^2((0, \pi) \times (0, 2\pi), \sin\theta d\theta d\varphi)$

jsou společnými v. funkcemi $\hat{L}_3 \in \mathbb{R}^2$

l -orbitální kvantové číslo
 m -magnetické kvantové číslo

$\Rightarrow \hat{L}_3$ a $\hat{L}^2$ mají
 diskrétní bodové spektrum

$\hookrightarrow$ kulové funkce

$= C_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$

• Energie: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2Mr^2} \hat{L}^2 + \hat{V}(r)$

$\mathcal{G}(\hat{H}|_{V_{m,l}}) = ?$

$\Rightarrow \hat{H}\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi)$ BSE

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left(R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) \right) + \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \right)}_{V_{\text{eff}}(r)} R(r) - E R(r) = 0$$

$\chi(r) = r R(r)$

$-\frac{\hbar^2}{2M} \chi''(r) + V_{\text{eff}}(r) \chi(r) - E \chi(r) = 0$

• částice na polopřímce

• v potenciálu $V_{\text{eff}}(r)$

• $\chi \in L^2(\mathbb{R}_+, dr)$, $\chi(0) = 0$

IZOTROPNÍ HO:

• $V(r) = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2$

• Degenerované
 • Hypergeometrické funkce $\Rightarrow$ zobecněné Laguerrovy polynomy

• $\forall m \in \mathbb{Z} \forall l \in \mathbb{Z}_+, |m| \leq l$ $\mathcal{G}_p(\hat{H}|_{V_{m,l}}) = \{ (2n+l+\frac{3}{2})\hbar\omega | n \in \mathbb{Z}_+ \}$

n, m, l : $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ Dim $V_{n,l,m} = 1$

$\Rightarrow \{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_3\}$ je ÚMP, navíc $\{ \psi_{n,l,m} | n \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}_+, |m| \leq l \}$ je ON báze

• n -radicální kvantové číslo $\Rightarrow E_N = (2N + \frac{3}{2}) \hbar \omega$, $l \leq N$ (N liché $\Rightarrow l$ liché, N sudé $\Rightarrow l$ sudé)

$N := 2n + l$ - hlavní kvantové číslo

• Degenerace energy hladin: i) pro pevné N máme $\begin{matrix} N \text{ sudé} \\ N \text{ liché} \end{matrix} \begin{matrix} \frac{N}{2} + 1 \\ \frac{N+1}{2} \end{matrix}$ voleb pro l

ii) pro pevné (N, l) máme $(2l+1)$ voleb na m

$$D_N = \begin{matrix} N \text{ sudé} \\ N \text{ liché} \end{matrix} \begin{matrix} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} (4k+1) \\ \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} (2(2k-1)+1) \end{matrix} = \begin{matrix} (2N+1+1)(\frac{N}{2}+1) \\ (2N+1+3)(\frac{N+1}{2}) \end{matrix} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

• Jinak $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3$, $\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_i^2$, před. v l. funkce ve tvaru $\psi(\vec{r}) = \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \psi_3(x_3)$

$\Rightarrow \hat{H} \psi = E \psi = (\hbar \omega (n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})) \psi \Rightarrow N = n_1 + n_2 + n_3$ $\uparrow$ E_{HO}

je-li ψ lze uk., že to je skutečně ON báze $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$

$\Rightarrow \sigma_p(\hat{H}) = \{ (N + \frac{3}{2}) \hbar \omega \mid N \in \mathbb{N}_0 \}$

COULOMBICKÉ POLE :

$V(r) = -\frac{Q}{r}$, $Q > 0$, pro $Q = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ modeluje systém: elektron v obalu atomu vodíku

• rovnice $-\frac{\hbar^2}{2M} \chi''(r) + \left[-\frac{Q}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{\hbar^2}{2M} \right] \chi(r) - E \chi(r) = 0$

• degenerované hyperbolické funkce $\dim V_{n,l,m} = 1$ (Zobecněný Laguerrov polynom, 0 na množině, au šak ne báze)

$E_{n,l} = -\frac{MQ^2}{2\hbar^2(n+l+1)^2}$, $n, l \in \mathbb{Z}_+$ (zdola omezení: $E_{min} = -\frac{MQ^2}{2\hbar^2} = -R$) $\rightarrow$ vázané stavy

$N := (n+l+1)$, $l < N$

$R = \frac{MQ^2}{2\hbar^2}$ $\hookrightarrow$ Rydbergova konstanta

$\Rightarrow E_N = -\frac{R}{N^2}$

$\sigma(\hat{H}) = \underbrace{\{ -\frac{R}{N^2} \mid N \in \mathbb{N} \}}_{\sigma_p(\hat{H})} \cup \underbrace{[0, +\infty)}_{\sigma_c(\hat{H})}$ $\hookrightarrow$ rozptýlené

• Degenerace energy hladin: i) pro pevné N máme N možností pro l

ii) pro pevné (N, l) máme $(2l+1)$ možností pro m

$D_N = \sum_{l=0}^{N-1} (2l+1) = \frac{(2N-1+1)N}{2} = N^2$

6. Částice v EM poli

- nabitá částice ve vnějším EM poli, atom vodíku ve vnějším hom. mag. poli, Zeemanův jev, spin e^- , operátoru spinu a jejich kom. relace, Pauliho m., Stern-Gerlach, časová a bezčasová Pauliho rov.

Interakční potenciál: $U = U(x, y, z)$, $F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}$

$U = q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$ vede na Lorentzovu sílu $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
 $\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
 $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\varphi$$

- princip korespondence neurčí $\hat{H}$ jednoznačně, neboť $[\hat{P}_i, \hat{A}_k] = -i\hbar \frac{\partial \hat{A}_k}{\partial x_i}$

- Coulombovská kalibrace $\text{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow \hat{H}$ je dán jednoznačně

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{q}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2 + q\varphi$$

Homogenní Mag. pole:

- $\vec{B} = \text{const.}$, potenciál vyhovující $\text{div} \vec{A} = 0$ i $\text{rot} \vec{A} = \text{const} \vec{B}$ je např. $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$

$$\vec{p} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{L}$$

, operátor orbitálního mag. momentu

$$\hat{\mu}_L = \frac{q}{2m} \hat{L}$$

pro ne-extremně silný $\vec{B}$, z čemu lze zanedbat

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m}}_{\hat{H}_0} + q\varphi - \vec{B} \cdot \hat{\mu}_L$$

Atom vodíku:

- Je-li φ sféricky sym. (Atomu vodíku ve vnějším mag. poli), máme

tedy

$$\hat{H}_0 |N, l, m\rangle = -\frac{R}{N^2} |N, l, m\rangle$$

$$\hat{L}^2 |N, l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |N, l, m\rangle$$

$$\hat{L}_3 |N, l, m\rangle = \hbar m |N, l, m\rangle$$

$$N \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{Z}_+, l \leq N, |m| \leq l$$

$$D_N = N^2$$

• BÚO $\vec{B} = (0, 0, B) \Rightarrow \vec{B} \cdot \hat{\mu}_L = -\frac{qB}{2m} \hat{L}_3 \Rightarrow \hat{H} |N, l, m\rangle = (\hat{H}_0 - \frac{qB}{2m} \hat{L}_3) |N, l, m\rangle = \left(-\frac{R}{N^2} - \frac{qB}{2m} \hbar m \right) |N, l, m\rangle$

Magneton částice: $\mu_0 = \frac{q\hbar}{2m}$

Bohrův magneton: $\mu_B = \frac{e\hbar}{2me}$

$$E_{N,lm} = -\frac{R}{N^2} \mp \mu_0 m B \quad \begin{pmatrix} \ominus l > 0 \\ \oplus l < 0 \end{pmatrix}$$

Degenerace: Pro zadané (N, m) máme $N - |m|$ volb pro l

Degenerace:
zadaným N
operátorem $\hat{L}^2$
stavů

$$D_{N,m} = N - |m| \quad (N \neq m)$$

- každá energ. hladina se rozštěpí

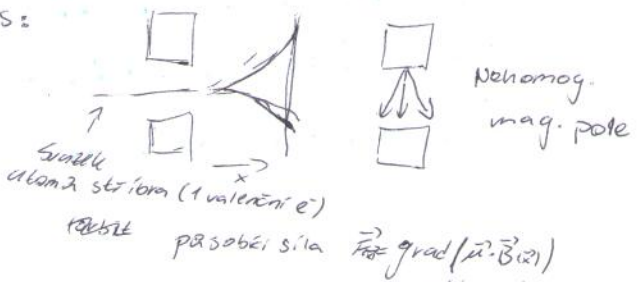
na $2N - 1$ hladin (které jsou od sebe vzdáleny o $\Delta E = \mu_0 B$)

- hladina $E_{N,0}$ se rozštěpí na 2

• Rozštěpení skutečně pozorováno (Zeemanův jev), ale jinak než předpovídá teorie!

Hypotéza: e^- má kromě mag. momentu souvisejícího s orbitálním pohybem ještě vlastní mag. moment $\hat{\mu}$, jehož projekce do libovolného směru nabývá právě 2 hodnot ~~$\pm \mu_B$~~ $\pm \mu_B$

Opírá se o Stern-Gerlachův pokus:



- z úhlu se dá určit velikost tohoto mag. momentu a je to μ_B

• vlastní mag. moment $\hat{\mu}_S = g \frac{q}{2m} \hat{S}$ ($\hat{S}_j =$ projekce spinu do osy x_j)
~~klasický magnet~~
 spec. pro e^- : $\hat{\mu}_S = 2 \frac{q}{2m} \hat{S}$

• Ψ_{nem} přehle necharakterizuje náš systém, ~~ale~~ už nelze najít Ψ s, kterým "čistý" Ψ_{nem} tak, že $\Psi \notin \text{span } \Psi_{nem}$, musíme změnit $\Psi \Rightarrow \Psi = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \otimes \mathbb{C}^2$

• stavový vektor vypadají takto: $\Psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}) \\ \psi_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $\langle \Psi, \Phi \rangle = \sum_{k=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi_k(\vec{x})} \phi_k(\vec{x}) d^3x$
 $\hat{H} = \hat{H}_0 \otimes \text{id}_{\mathbb{C}^2}$

• Operátor projekce spinu působí pouze na $\mathbb{C}^2$, chceme aby měl stejné komutační relace jako orbitální moment $\hat{L}$ ~~vyhovět~~ $\hat{L}_i$. $[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} \hat{S}_l$

volba $|z, +\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|z, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, celkově $\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2} \sigma_j$

• do směru $\vec{n}$: $\hat{S}_{\vec{n}} := \vec{n} \cdot \hat{\vec{S}}$
 (byla projekce mag. momentu $\pm \mu_B$)

Pauliho matice: báze $\mathfrak{su}(2)$ (bezstopé, hermit. matice 2×2)

$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \epsilon_{jkl} \sigma_l$, $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk} \mathbb{I}$, $\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbb{I} + i \epsilon_{jkl} \sigma_l$
 $\sigma(\sigma_j) = \{-1, 1\}$, $\sigma(\hat{S}_j) = \{-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}\}$, $\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \mathbb{I}$

ČASOVÁ A BEZČASOVÁ PAULIHO ROVNICE:

Pauliho Hamiltonián (pro e^-) $\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{\vec{p}} + e\vec{A}]^2 - e\hat{\varphi} + \frac{2\mu_B}{\hbar} \hat{\vec{B}} \cdot \hat{\vec{S}}$

- časová Pauliho rovnice $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$
- bezčasová Pauliho rovnice $\hat{H} \Psi = E \Psi$

pro homogenní mag. pole: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \vec{B} \cdot \hat{\vec{\mu}}_S$ je řešením časové Pauliho rovnice

$\Psi(\vec{x}; t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}; t) \\ \psi_2(\vec{x}; t) \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{B} \cdot \hat{\vec{\mu}}_S t} \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{x}; t) \\ \phi_2(\vec{x}; t) \end{pmatrix}$, kde $\phi_1(\vec{x}; t), \phi_2(\vec{x}; t)$ jsou řešení

$\cos(\frac{\mu_B}{\hbar} B t) \mathbb{I} - i \sin(\frac{\mu_B}{\hbar} B t) \frac{1}{B} \vec{B} \cdot \hat{\vec{S}}$ Schrödingery rovnice

NORMÁLNÍ ZEEMANOV JEV : (SILNÉ MAG. POLE)

- $\hat{\psi}$ - sféricky symetrické (e^- v atomu vod. kovu)

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2me} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad R = \frac{me^4}{32\hbar^2\pi^2\epsilon_0^2}$$

$$\hat{H}_Z = \vec{\mu}_B \cdot \vec{B} = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot (\hat{L} + 2\hat{S})$$

↳ Zeemanův Hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_Z$$

$$\hat{H}_0 |N, l, m\rangle = -\frac{R}{N^2} |N, l, m\rangle$$

$$\hat{L}^2 |N, l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |N, l, m\rangle$$

$$\hat{L}_3 |N, l, m\rangle = m\hbar |N, l, m\rangle$$

$$N \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{Z}$$

$$l < N, |m| \leq l$$

- $\hat{H}_0$ je sfér. sym., Bůno $\vec{B} = (0, 0, B)$

$$\Rightarrow \hat{H}_Z = \frac{\mu_B}{\hbar} B (\hat{L}_3 + 2\hat{S}_3)$$

$$[\hat{H}_0, \hat{S}_3] = 0$$

$$[\hat{L}^2, \hat{S}_3] = 0$$

$$[\hat{L}_3, \hat{S}_3] = 0$$

$$|N, l, m, \pm\rangle$$

$$|N, l, m, \pm\rangle = |N, l, m\rangle \otimes |\pm\rangle$$

$$|N, l, m, \pm\rangle = |N, l, m\rangle \otimes |\pm\rangle$$

$$\hat{H}_0 |N, l, m, \pm\rangle = -\frac{R}{N^2} |N, l, m, \pm\rangle$$

$$\hat{L}^2 |N, l, m, \pm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |N, l, m, \pm\rangle$$

$$\hat{L}_3 |N, l, m, \pm\rangle = m\hbar |N, l, m, \pm\rangle$$

$$\hat{S}_3 |N, l, m, \pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |N, l, m, \pm\rangle$$

$$\begin{aligned} \hat{H} |N, l, m, \pm\rangle &= (\hat{H}_0 + \hat{H}_Z) |N, l, m, \pm\rangle = \left(-\frac{R}{N^2} + \frac{\mu_B B}{\hbar} (m \pm \frac{1}{2})\right) |N, l, m, \pm\rangle \\ &= \left[-\frac{R}{N^2} + \mu_B B (m \pm 1)\right] |N, l, m, \pm\rangle \end{aligned}$$

Degenerace: • Degenerace pro každé $E_{N,l}$

$$E_{N,l,m,\pm} = -\frac{R}{N^2} + \mu_B B (m \pm 1)$$

- hladina $E_{N,l}$ se štěpí na $2l+3$ ($l \geq 1$), nebo 2 ($l=0$)
- $N \geq 1$, každá energ. hladina (N) se štěpí na $2N+1$ hladin

- $N=1 \Rightarrow l=0 \Rightarrow m=0$ štěpí na 2 hladiny

- Degenerace • zadané N a l má $2l+3$ stavů

- zadané energii $E_{N,l,m}$ má $2N-|m|+1$ stavů (pro $|m| \leq N-1$)

7. Kvantování Momentu Hybnosti

- algebraická teorie momentu hybnosti, posunovací operátory, orbitální a spinový moment hybnosti, ireducibilní tenzorové operátory, Wigner-Eckartův teorém, skládání momentu hybnosti

• Starting point: komutační relace $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ (Lieova algebra $su(2)$ je izomorfní $so(3)$, ale $su(2) \neq so(3)$)

• $\{\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3\}$ je reprezentace $su(2)$ na $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$

• $\{\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3\}$ je reprezentace $su(2)$ na $\mathbb{C}^2$

• Samosdruženost $\oplus$ čisté bod. spektrum $\hat{J}_3, \hat{J}^2$ tak, že vl. hodnoty mají konečnou degeneraci. $\Rightarrow$ Společná ON může být vložena do komut. relace

$\Rightarrow \hat{J}_3 |j, \mu\rangle = \mu |j, \mu\rangle$
 $\hat{J}^2 |j, \mu\rangle = \lambda |j, \mu\rangle$

Omezení na spektrum

Samosdruženost

$$\forall \psi \in \mathcal{H} \quad \langle \psi | (\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2) \psi \rangle = \|\hat{J}_1 \psi\|^2 + \|\hat{J}_2 \psi\|^2 \geq 0$$

$\psi = |j, \mu\rangle$

$$0 \leq \langle j, \mu | \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 | j, \mu \rangle = \lambda - \|\hat{J}_3 |j, \mu\rangle\|^2 = \lambda - \mu^2 \Rightarrow |\mu| \leq \sqrt{\lambda}$$

• Posunovací operátory: $\hat{J}_{\pm} := \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$, $[\hat{J}^2, \hat{J}_{\pm}] = 0$

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}] = \pm \hbar \hat{J}_{\pm} \Rightarrow \mu_{\pm} = \mu \pm \hbar$$

• $\hat{J}_3 \hat{J}_{\pm} |j, \mu\rangle = \hat{J}_{\pm} \hat{J}_3 |j, \mu\rangle \pm \hbar \hat{J}_{\pm} |j, \mu\rangle = (\mu \pm \hbar) \hat{J}_{\pm} |j, \mu\rangle \Rightarrow \hat{J}_{\pm} |j, \mu\rangle = \alpha_{j, \mu}^{\pm} |j, \mu \pm \hbar\rangle$

• $|\mu| \leq \sqrt{\lambda} \Rightarrow$ pro pevné j existuje $\mu_{\max}, \mu_{\min}$ (jinak bychom porušili $|\mu| \leq \sqrt{\lambda}$)

$$\hat{J}_{\pm} |j, \mu_{\max} \rangle = 0$$

$$0 = \hat{J}_- \hat{J}_+ |j, \mu_{\max} \rangle = (\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 - \hbar \hat{J}_3) |j, \mu_{\max} \rangle = (\hat{J}^2 - \hbar \hat{J}_3) |j, \mu_{\max} \rangle = (\lambda - \mu_{\max}^2 - \hbar \mu_{\max}) |j, \mu_{\max} \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu_{\max}^2 + \hbar \mu_{\max}$$

$$\lambda = \mu_{\min}^2 - \hbar \mu_{\min}$$

$$\Rightarrow \mu_{\max} = -\mu_{\min}$$

$$\hat{J}_+^k |j, \mu_{\min} \rangle \sim |j, \mu_{\min} + k\hbar \rangle \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}_+ \quad \mu_{\max} = \mu_{\min} + k\hbar$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}_+$$

$$-\mu_{\min} = \mu_{\min} + k\hbar \Rightarrow \mu_{\min} = -\frac{k\hbar}{2}$$

$$\mu_{\max} = \frac{k\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow \exists j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\} \text{ tak, že } \mu_{\min} = -j\hbar, \mu_{\max} = j\hbar$$

$$\Rightarrow \lambda = j^2 \hbar^2 + j\hbar^2 = \hbar^2 j(j+1)$$

$$\Rightarrow \lambda = \hbar^2 j(j+1), \mu = m\hbar$$

, $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$

velikost spinu (polo nebo celo číselná)

$2j+1$ hodnot

, $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$

Até 2.2.2020:

Até

$$J_3 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -\frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{3}{4} & 0 & \\ & 0 & \frac{3}{4} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 2 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle j, m' | \hat{J}_z | j, m \rangle = \delta_{j, m'}^+ \langle j, m' | j, m \pm 1 \rangle = \delta_{j, m'}^+ J_{\pm} J_{m, m \pm 1}$
- $\langle j, m' | \hat{J}_x | j, m \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{j, m'}^+ J_{\pm} J_{m, m \pm 1} + \delta_{j, m'}^- J_{\pm} J_{m, m \pm 1})$
- $\langle j, m' | \hat{J}_y | j, m \rangle = \frac{1}{2i} (\delta_{j, m'}^+ J_{\pm} J_{m, m \pm 1} - \delta_{j, m'}^- J_{\pm} J_{m, m \pm 1})$

$$J_1 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\frac{i}{2} & \\ & \frac{i}{2} & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ & & & & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ $\{J_1, J_2, J_3\}$ tvoří ireducibilní reprezentaci $su(2)$ na $\mathbb{C}^{2j+1}$
- celkové $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ tvoří reprezentaci $su(2)$ na $\mathcal{H}$, která obecně není ireducibilní! (je přímý součet)
- $Spin \frac{1}{2}$ je reprezentace $su(2)$ na $\mathbb{C}^2$
- Orbitální moment hybnosti - $ph\dot{e}$ ireducibilní reprezentace $su(2)$ na $\mathcal{H}_{orb} = L^2(\underbrace{(0,1) \times (0,2\pi)}_{\text{sinododa}})$ (celocíselné j)

TENZOROVÉ OPERÁTORY:

Rotace = Reprezentace grupy $SO(3)$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$

Rotace kolem osy $\vec{n}$ o úhel α : $\hat{R}_{\vec{n}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{J}}$

toto je prvek $SO(3)$

toto je na reprezentace

pomocí Pauliho přímého Lieovy algebry $su(2) \cong so(3)$

Def: Pozorovatelná

$\hat{A}$ je i) skalar $\Leftrightarrow \forall g \in SO(3) \quad \hat{A} = \hat{R}_g \hat{A} \hat{R}_g^{-1}$

$\hat{V}$ je ii) vektor $\Leftrightarrow \forall g \in SO(3) \quad \hat{V}^k = \hat{R}_g^k \hat{V}^j \hat{R}_g^{-1}$

$\hat{\Pi}$ je iii) tenzor $\Leftrightarrow \forall g \in SO(3)$

rádu $n \in \mathbb{N}$

$\forall (k_1, \dots, k_n) \in \hat{3}^n$

$R(g^{-1})^{k_1} \dots R(g^{-1})^{k_n} \hat{\Pi}^{j_1 \dots j_n} = \hat{R}_g \hat{\Pi}^{k_1 \dots k_n} \hat{R}_g^{-1}$

$\hookrightarrow$ matice 3×3 reálná

Tvrzení: • $\hat{A}$ je skalar $\Leftrightarrow \forall k \in \hat{3} \quad [\hat{J}_k, \hat{A}] = 0$ ($\hat{J}^2$ je skalar)

• $\hat{V}$ je vektor $\Leftrightarrow \forall k, i \in \hat{3} \quad [\hat{J}_k, \hat{V}_i] = i\hbar \epsilon_{kij} \hat{V}_j$ ($\hat{J}$ je vektor)

• Tenzor 2. rádu: $[\hat{J}_k, \hat{\Pi}^{ij}] = i\hbar (\epsilon_{kij} \hat{\Pi}^{mj} + \epsilon_{kjm} \hat{\Pi}^{im})$

Def: Irreducibilní tenzorový operátor (ITO) řádu k MO je sada $2k+1$ operátorů $\hat{T}(k, q)$, $q \in \{-k, -k+1, \dots, k\}$ splňující:

$$i) [\hat{J}_3, \hat{T}(k, q)] = \hbar q \hat{T}(k, q)$$

$$ii) [\hat{J}_{\pm}, \hat{T}(k, q)] = d_{k, q}^{\pm} \hat{T}(k, q \pm 1) \quad , d_{k, q}^{\pm} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$$

$$\hat{J}_{\pm} |k, q\rangle = d_{k, q}^{\pm} |k, q \pm 1\rangle$$

Vzorec: $i) \Leftrightarrow [\hat{J}_3, \hat{T}(k, q)] = \sum_{q'=k}^{-k} [\hat{J}_3^k]_{q'q} \hat{T}(k, q')$

- Wignerovy D-matricy, matice s elementy

$$D_{m'm}^{j(q)} = \langle j, m' | \hat{R}_q | j, m \rangle \quad \forall q \in$$

$\rightarrow$ reduk. rep. scel

$\Rightarrow$ ITO se transformuje na $\hat{R}_q^{-1}$

$$\hat{R}_q \hat{T}(k, q) \hat{R}_q^{-1} = \sum_{q'=k}^{-k} D_{q'q}^{k(q)} \hat{T}(k, q')$$

- Skalar je ITO řádu 0
- Z vektoru lze sestavit ITO řádu 1
- Z tenzorem 2. řádu lze postavit ITO řádu 0, 1, 2

$$\hat{T}_{ij} = \hat{D}_{ij} + \hat{A}_{ij} + \hat{S}_{ij} \quad \hat{D}_{ij} = \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{T} \delta_{ij} \rightarrow (0)$$

$$\hat{A}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{T}_{ij} - \hat{T}_{ji}) \rightarrow (1)$$

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{S}_{ij} + \hat{S}_{ji}) \rightarrow (2)$$

SKLÁDÁNÍ MOMENTŮ HYBNOSTI:

- uvažujeme systém složený ze dvou podsystemů $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ a každému podsystemu je v nájedním vln. stavu momentu hybnosti j_1, j_2 společněm vln. stavu $\hat{J}_3^{(1)}, \hat{J}_3^{(2)}$.

$$j_1, j_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$$

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ a $|\psi^{(1)}\rangle = |j_1, m_1\rangle$ $|\psi^{(2)}\rangle = |j_2, m_2\rangle$

$$\hat{J}_3^{(1)} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = m_1 \hbar |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

$$\hat{J}_3^{(2)} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = m_2 \hbar |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

- pro zadané $j_1, j_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$ tvoří tyto stavy konečný Hilbertův prostor dimenze $(2j_1+1)(2j_2+1)$

- Princip korespondence: $\hat{J}_k = \hat{J}_k^{(1)} + \hat{J}_k^{(2)}$, $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 + 2\hat{J}_1\hat{J}_2 + 2\hat{J}_1\hat{J}_3 + 2\hat{J}_2\hat{J}_3$

$$\hat{J}_k^{(1)} \text{ působí netriviálně pouze na } \mathcal{H}^{(1)} \Rightarrow [\hat{J}_k^{(1)}, \hat{J}_l^{(2)}] = 0 \quad \forall k, l$$

$$\Rightarrow [\hat{J}_k, \hat{J}_l] = i\hbar \epsilon_{klm} \hat{J}_m$$

$$\Rightarrow [\hat{J}^2, \hat{J}_3] \text{ jsou komp.}$$

- mašinérie alg. teorie momentu hybnosti $\Rightarrow$ spol. vln. vektory $|j, m\rangle$ s vln. čísly $j(j+1)$ a m

- $[\hat{J}_k, \hat{J}^{(1)2}] = 0, [\hat{J}_k, \hat{J}^{(2)2}] = 0 \Rightarrow$ spol. vln. vektory $|j_1, j_2, j, m\rangle$

- $j_{\max} = j_1 + j_2, |j_1, j_2, j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$

- $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_{\pm}^{(1)} + \hat{J}_{\pm}^{(2)} \Rightarrow$ ~~generují se vektory všech vln. stavů~~ (identifikace vektorů) $|j_1, j_2, j, m\rangle \leftrightarrow |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$

- $(2j_1+1)(2j_2+1) = \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} (2j+1) \dots \Rightarrow j_{\min} = |j_1 - j_2|$

Clebsch-Gordonovy koeficienty: $(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) := \langle j_1, m_1 | \otimes \langle j_2, m_2 | | j, m \rangle$

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) (|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle)$$

Výberová pravidla: $\neg (|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \wedge m_1 + m_2 = m) \Rightarrow (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) = 0$

WIGNER-ECKART:

$$\langle a, j_1, m_1 | \hat{T}(k, q) | b, j_2, m_2 \rangle = \frac{(-1)^{j_1+k-j_2}}{\sqrt{2j_2+1}} (k, j_2, q, m_2 | j_1, m_1) (a, j_1 || \hat{T}^{(k)} || b, j_2)$$

Sada kvant. čísel
zúplňující ÚMP
Redukovaný maticový
element

$\Rightarrow$ Stačí ~~pro~~ j_1, j_2 stačí spočítat právě 1 maticový element $\hat{T}(k, q)$
a zbylých $(2j_1+1)(2j_2+1)(2k+1) - 1$ je již určeno
teoremem

je určen levan
Stranou pro hodnoty
zvolené j_1, m_1, m_2 ,
když CG-koeff $\neq 0$

výběrová pravidla: $T(|k-j_2| \leq j_1 \leq k+j_2 \wedge q+m_2=m_1) \Rightarrow \langle a, j_1, m_1 | \hat{T}(k, q) | b, j_2, m_2 \rangle = 0$

skalary: $\langle a, j_1, m_1 | \hat{S} | b, j_2, m_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j_2+1}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} (a, j_1 || \hat{S} || b, j_2)$

vektory: $\langle a, j_1, m_1 | \hat{V} | b, j_2, m_2 \rangle = \frac{1}{\hbar^{1/2} j_2(j_2+1)} \langle a, j_1, m_1 | (\hat{J} \cdot \hat{J}) \hat{J} | b, j_2, m_2 \rangle$

8. Časový vývoj v QM

- unitární propagátor, Schrödingerova rovnice, řešení časového vývoje rozkladem do stac. stavů, časový vývoj střední hodnoty poz., Int. Poh., Ehrenfestova věta, Schr., Heis., Dir. obraz QM, přechody mezi obrazy, časový vývoj stavů a poz. v obrazech

Def: Zobrazení $U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ nazveme unitárním propagátorem

$$\Leftrightarrow \text{i) } \forall s, t \in \mathbb{R} \quad U(t, s) U(s, r) = U(t, r)$$

ii) U je v obou argumentech silně spojitý

Postulát 3 (0 časovém vývoji)

a) Časový vývoj uzavřeného kvantového systému je popsán unitárním propagátorem. Existuje unitární propagátor U tak, že: $W_t = U(t, s) W_s U(t, s)^{-1} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

b) Propagátor konzervativního systému U splňuje $\forall t \in \mathbb{R} \quad U(t, t) = U(t, s)$ a je určen pozorovatelnou energie - Hamiltoniálem jako

$$U(t, s) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-s)H}$$

c) Časový vývoj systému s časově závislým Hamiltoniálem je určen rovnicí

$$i\hbar \frac{d}{dt} (W_t \psi) = (H(t) W_t - W_t H(t)) \psi$$

Souvislost s jiným popisem: a) $\psi_t = U(t, s) \psi_s$

$$b) \quad i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H(t) \psi_t$$

Konzervativní systém

i) U závisí pouze na rozdílu argumentů, lze zjednodušit na $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$
 $t \mapsto U(t, 0)$

$$\text{ii) } U(t, s) U(s, r) = U(t, r) \Leftrightarrow U(t, -s) U(s, -r) = U(t, -r) \Leftrightarrow U(t) U(r) = U(t+r) \Leftrightarrow U: (\mathbb{R}, +) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

* $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ je silně spojitý

je homomorfismus

$\Rightarrow U$ je silně spojitá unitární reprezentace grupy $(\mathbb{R}, +)$ na $\mathcal{H}$, říkáme, že

U je silně spojitá jednoparametrická podgrupa v $\mathcal{U}(\mathcal{H})$

iii) Silná spojitost $\Rightarrow$ bodová spojitost, tj. $\forall \psi \in \mathcal{H} \quad \lim_{t \rightarrow 0} U(t) \psi = U(0) \psi$

Def: Generátor

SSJP v $\mathcal{U}(\mathcal{H})$:

$$T: \text{Dom } T \rightarrow \mathcal{H}$$

$$\psi \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - id_{\mathcal{H}}}{it} \psi \quad (\psi \in \text{Dom } T \Rightarrow U(t) \psi \in \text{Dom } T)$$

Lemma: A je samosdružení $\Rightarrow U: t \mapsto e^{itA}$ je SSJP v $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ a A je její generátor

U je SSJP v $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \Rightarrow \exists A$ samosdružení, že $U: t \mapsto e^{itA}$

* ψ tedy pouze říká, že generátor je energie

* ψ je v $\mathcal{H}$

* $W_s \text{ Dom } T \subset \text{Dom } T \Rightarrow W_t \text{ Dom } T \subset \text{Dom } T \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \psi \in \text{Dom } T, \forall t \in \mathbb{R} \quad W_t \psi \in \text{Dom } T$

platí Schrödinger

- Hledíme řešení Schrödingerovy rovnice ve tvaru $\Psi(\vec{r}, t) = f(t) \psi_E(\vec{r})$, pro konzervativní systém

$$\Rightarrow \frac{i\hbar}{f(t)} \frac{df}{dt}(t) = \frac{1}{\psi_E(\vec{r})} \hat{H} \psi_E(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ obě strany musí být const. označ E

$$\frac{df}{dt} - \frac{i}{\hbar} E f(t) = 0, \quad \hat{H} \psi_E(\vec{r}) = E \psi_E(\vec{r})$$

$\Rightarrow \psi_E(\vec{r})$ je vl. stav Hamiltoniánu

$$\Rightarrow f(t) = C e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

poč. podmínka: $\Psi(\vec{r}, t_0) = \psi_E(\vec{r}) \Rightarrow \Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E(t-t_0)} \psi_E(\vec{r})$

ČASOVÝ VÝVOJ VLASTNÍHO STAVU

(Ergodicně nepředstavitelný!)

$\Rightarrow$ během čas. vývoje se stav nemění!

• Vl. vektory $\hat{H} \equiv$ Stacionární stavy

- $\hat{H}$ má diskrétní bodové spektrum:

$$\Psi(\vec{r}, t_0) = \sum_n (\xi_n, \Psi(\cdot, t_0)) \xi_n(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \Psi(\vec{r}, t) = \sum_n (\xi_n, \Psi(\cdot, t_0)) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t-t_0)} \xi_n(\vec{r}) \quad (\text{Není stacionární!})$$

Def: Pozorovatelná A je integrál pohybu $\Leftrightarrow \forall \Psi$ řešení Schrödingerovy rovnice $\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\Psi} = 0$

$\hookrightarrow$ nelze dít $\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\Psi} = 0$, neboť pro vlast. stav vyjde 0, nikdy "stacionární" (nežijí)

• Schrödingerova rovnice $\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \Psi(t), \Phi(t) \rangle = 0 \quad \forall \Psi, \Phi$ řešení

Tvrzení: A je IP $\Leftrightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$

Pohybová rovnice pro střední hodnoty: $\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{\Psi(t)} = \left\langle \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle_{\Psi_t}$

Ehrenfestovy teoremy: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{Q}_j \rangle_{\Psi_t} = \frac{1}{m} \langle \hat{P}_j \rangle_{\Psi_t}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{P}_j \rangle_{\Psi_t} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x_j} \right\rangle_{\Psi_t} = \langle \hat{F}_j \rangle_{\Psi_t} \stackrel{\text{klas. síly}}{=} F_j(\langle \hat{Q}_j \rangle_{\Psi_t})$$

F_j je max. kvadrát 1. deriv.

OBRAZY GM: (obrazy usvoje, pojety usvojje)

Schrödingerův: celá dynamika se odehrává na stavech, dynamika $\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}|\psi(t)\rangle$
 $|\psi(t_1)\rangle = |\psi_0\rangle$

Heisenbergův: celá dynamika se odehrává na pozorovatelných
 (shodný s Schrödinger v čase t_1)

• $|\psi^H(t)\rangle := U^{-1}(t, t_1) |\psi(t)\rangle = |\psi(t_1)\rangle \Rightarrow |\psi^H(t)\rangle$ je const., $|\psi^H\rangle := |\psi^H(t_1)\rangle$

• $\hat{A}^H(t) := U^{-1}(t, t_1) \hat{A}(t) U(t, t_1) = U^{-1}(t, t_1) \hat{A}(t_1) U(t, t_1)$

$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi^H | U^{-1}(t, t_1) U(t, t_1) \hat{A}(t) U^{-1}(t, t_1) U(t, t_1) | \psi^H \rangle$$

$$= \langle \psi^H | \hat{A}^H(t) | \psi^H \rangle = \langle \hat{A}^H \rangle_{\psi^H}$$

• časová dynamika

$$\frac{d}{dt} \hat{A}^H(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}^H(t), \hat{H}^H(t)] + U^{-1}(t, t_1) \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} U(t, t_1), \hat{A}^H(t_1) = \hat{A}(t_1)$$

• Je-li $\hat{A} \perp P \Rightarrow \hat{A}^H(t) = \hat{A}(t_1)$

• z dynam. rovnice: $-\frac{i}{\hbar} [\hat{A}(t), \hat{H}(t)] + \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} = 0$

Diracův: dynamika je rozdělena na stavů i pozorovatelné

(interakční)
 (shodný s Schröd. v čase t_1)

• uvažujeme, že lze udělat separaci $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, kde $\hat{H}_0$ na čas nezávisí, ale

• $\hat{H}_0$ popisuje konzervativní systém: $U_0(t, t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar} (t - t_1) \hat{H}_0}$ je ano

• $|\psi^D(t)\rangle := U_0^{-1}(t, t_1) |\psi(t)\rangle$

• $\hat{A}^D(t) := U_0^{-1}(t, t_1) \hat{A}(t) U_0(t, t_1)$

• dynamika: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi^D(t)\rangle = \hat{V}^D(t) |\psi^D(t)\rangle, |\psi^D(t_1)\rangle = |\psi(t_1)\rangle$

$$\frac{d\hat{A}^D}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{A}^D(t)] + U_0^{-1}(t, t_1) \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} U_0(t, t_1), \hat{A}^D(t_1) = \hat{A}(t_1)$$

• evoluční op. $\therefore |\psi^D(t)\rangle = \hat{S}(t, t_0) |\psi^D(t_0)\rangle$

• $\hat{S}$ je řešením rovnice: $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{S}(t, t_0) = \hat{V}^D \hat{S}(t, t_0), \hat{S}(t_0, t_0) = \text{id}$

• $|\psi^D(t)\rangle = U_0^{-1}(t, t_1) |\psi(t)\rangle$
 $= U_0^{-1}(t, t_1) \hat{U}(t, t_0) |\psi^D(t_0)\rangle$
 $= U_0^{-1}(t, t_1) \hat{U}(t, t_0) U_0(t_0, t_1) |\psi^D(t_0)\rangle$
 $\Rightarrow \hat{S}(t, t_0) = U_0^{-1}(t, t_1) \hat{U}(t, t_0) \hat{U}(t_0, t_1)$

Speciálně: $t_1 = t_0 \therefore \hat{S}(t, t_0) = U_0^{-1}(t, t_0) \hat{U}(t, t_0)$

rozply: $t_0 = 0$
 $t_0 \rightarrow -\infty$
 $t_0 \rightarrow +\infty$

9. Feynmanův dráhový integrál a propagátor

- poruchový rozvoj evolučního op., retardovaný a advancovaný propagátor, jejich časový vývoj, Greenova funkce, propagátor pomocí dráh. int., rozptyl pomocí dráh. int.

PORUCHOVÝ ROZVOJ:

- $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{V}(t)$
- $\hat{H}_0$ má diskrétní bodové spektrum
- ~~Dráhový integrál~~
- Chceme určit pravděpodobnost přechodu mezi stavy hamiltoniánu po čase $t-t_0$
- Diracův obraz shodující se s Schrödingerovým v čase t_0

$$\Rightarrow \hat{U}_\varepsilon(t, t_0) = \hat{U}_0(t, t_0) \hat{S}(t, t_0)$$

- $|\psi(t_0)\rangle := |\psi_i\rangle$, ~~$|\psi(t_0)\rangle := |\psi_i\rangle$~~ $|\psi_i\rangle$ je ul. stav $\hat{H}_0$
- $w_{i \rightarrow f} = |\langle \psi_f | \hat{U}(t, t_0) | \psi_i \rangle|^2 = |\langle \psi_f | \hat{S}(t, t_0) | \psi_i \rangle|^2$

$$\hat{S}(t, t_0) \text{ řeší: } i\hbar \frac{d}{dt} \hat{S}(t, t_0) = \varepsilon \hat{V}^D(t) \hat{S}(t, t_0), \quad \hat{S}(t_0, t_0) = \text{idye}$$

- řešení hledáme ve formě tzv. Dysonovy mocninné rady $\hat{S}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \hat{S}^{(n)}(t, t_0)$

$$\text{porovnání koeficientů: } \hat{S}^{(n)}(t, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{V}^D(t_n) \hat{V}^D(t_{n-1}) \dots \hat{V}^D(t_1)$$

$$\hat{S}^{(0)}(t, t_0) = \text{idye}$$

$$\Rightarrow w_{i \rightarrow f} = |\langle \psi_f | \hat{S}(t, t_0) | \psi_i \rangle|^2 = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n S_{fi}^{(n)}(t, t_0) \right|^2, \text{ kde } S_{fi}^{(n)}(t, t_0) = \langle \psi_f | \hat{S}^{(n)}(t, t_0) | \psi_i \rangle$$

$$S_{fi}^{(0)}(t, t_0) = \delta_{fi}$$

$$S_{fi}^{(1)}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \langle \psi_f | \hat{V}^D(t_1) | \psi_i \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \langle \psi_f | \hat{U}_0^{-1}(t, t_0) \hat{V}(t_1) \hat{U}_0(t_1, t_0) | \psi_i \rangle$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 e^{i \frac{E_f - E_i}{\hbar} (t_1 - t_0)} V_{fi}(t_1)$$

$$V_{fi}(t) := \langle \psi_f | \hat{V}(t) | \psi_i \rangle$$

$$w_{fi} := \frac{E_f - E_i}{\hbar}$$

$$\Rightarrow w_{i \rightarrow f}^{(1)} = \left| \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 e^{i w_{fi}(t_1 - t_0)} V_{fi}(t_1) \right|^2$$

DRÁHOVÝ INTEGRÁL: $f \in L^2(\mathbb{R}, dx) \Rightarrow f(p) \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{H}](y-x) \psi(y) dy$

o propagátor: int. jádro převádějící $\psi(\vec{x}_0, t_0)$ na $\psi(\vec{x}, t)$, tj.

$$\psi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) \psi(\vec{x}_0, t_0) d^3 x_0$$

Propagátor

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) \neq 0 \Leftrightarrow U(t, t_0) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

- Zbývá funkce
hybnosti a polohy:

dist. =
poloha $\vec{x}$ $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$
hybnost $\vec{p}$ $\vec{p} \rightarrow \vec{a}$

VLASTNOSTI : i) polybova rovnice

$$i\hbar \frac{d}{dt} K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \hat{H} K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) \quad , \quad K(\vec{x}, t_0; \vec{x}_0, t_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

volná částice:

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \left(\frac{M}{2\pi i \hbar (t-t_0)} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{iM(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2\hbar(t-t_0)} \right)$$

ii) Normalizace (casový vývoj zachováva normu)

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \overline{K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0)} K(\vec{x}, t; \vec{x}_0', t_0) = \delta(\vec{x}_0 - \vec{x}_0')$$

iii) p-reprezentace

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_0 e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{K}(\vec{p}, t; \vec{x}_0, t_0) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}_0}$$

~~iv) Propagátor je Greenova funkce Schrödingerovy rovnice~~

$$U(t, t_0) \delta(\vec{p} - \vec{p}_0)$$

Drahový integrál:

interval $\langle t_0 | t \rangle$ ekvidistantně rozdělíme na $N+1$ intervalů $\{ \langle t_j, t_{j+1} \rangle \mid j \in \{0, 1, \dots, N\} \}$
 $t = t_{N+1}$

$$\Delta t = \frac{t - t_0}{N+1} \quad \text{přes } N \in \mathbb{N}_0$$

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_N \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \left(\prod_{j=0}^N K(\vec{x}_{j+1}, t_{j+1}; \vec{x}_j, t_j) \right) \quad , \quad \vec{x}_{N+1} = \vec{x}$$

~~Hamiltonian rozložíme na~~

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$$

$$K(\vec{x}_{j+1}, t_{j+1}; \vec{x}_j, t_j) = U(t_{j+1}, t_j) \delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)$$

$$\hat{V}(t_j) = \left(\text{ide} + \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}_0 \right) \hat{V}(t_j) \left(\text{ide} - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}_0 + O(\Delta t^2) \right)$$

$$= \hat{V}(t_j) + \frac{i}{\hbar} \Delta t [\hat{H}_0, \hat{V}(t_j)] + O(\Delta t^2)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}_0} S(t_{j+1}, t_j) \delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}_0} \left(\text{ide} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt' \hat{V}(t') + O(\Delta t^2) \right) \delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)$$

$$= \left(\text{ide} - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}_0 + O(\Delta t^2) \right) \left(\text{ide} - \frac{i}{\hbar} \hat{V}(t_j) \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)$$

$$= \left[\text{ide} - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}_0 + O(\Delta t^2) \right] \left[\text{ide} - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{V}(t_j) + O(\Delta t^2) \right] \delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)$$

$$\approx \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}_0\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{V}(t_j)\right) \delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)$$

$$L(\vec{x}_{j+1}, \frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\Delta t}, t_{j+1}) = \left(\frac{M}{2} \left(\frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\Delta t} \right)^2 - V(\vec{x}_{j+1}, t_{j+1}) \right)$$

$$= \left(\frac{M}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{iM(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)^2}{2\hbar \Delta t} \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta t V(\vec{x}_{j+1}, t_{j+1}) \right)$$

$$\Rightarrow K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathbb{R}^3} d^3x_N \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3x_1 \left(\prod_{j=0}^N \left(\frac{M}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} L\left(\vec{x}_{j+1}, \frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\Delta t}, t_{j+1}\right) \right) \right) \right]$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{3(N+1)}{2}} \int \left(\prod_{j=0}^N d^3x_j \right) e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N L(\vec{x}_{j+1}, \frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\Delta t}, t_{j+1})}$$

$$\cdot \mathcal{D}\vec{x}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=0}^N d^3x_j \right) \left(\frac{M(N+1)}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{3(N+1)}{2}} \Rightarrow K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \int \mathcal{D}\vec{x}(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}(t)]}$$

$$\cdot S[\vec{x}(t)] = \int_{t_0}^t L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt$$

↳ integrál přes všechny křivky $\vec{x}(t)$
 spojující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, $\vec{x}(t) = \vec{x}$

ROZPTYL:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\vec{r}) \right) \phi_k(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2M} \phi_k(\vec{r})$$

$$\Leftrightarrow (A + k^2) \phi_k(\vec{r}) = U(\vec{r}) \phi_k(\vec{r}) \quad U(\vec{r}) := \frac{2M}{\hbar^2} V(\vec{r})$$

Greenova funkce: $(A + k^2) G_k(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ ~~středově~~

10. Složené systémy

- tenzorový součin prostorů, stavů, pozorovatelů, stavy více nerozlišitelných částic, obsazovací čísla, anih., krea. op., Hamiltonián neint. částic, 2. kvant., Fockův prostor, Pauliho princip

TENZOROVÝ SOUČIN:

Matrice: $A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix}$

Def. Necht V, W jsou vektorové prostory a $\mathcal{Z} \subset \mathcal{F}(V \times W, \mathbb{F})$ generovaná

~~$\mathcal{Z} = \text{Span} \{ \dots \}$~~

$\mathcal{Z} = \text{Span} \left\{ \{ \sigma_{(v_1+v_2, w)} - \sigma_{(v_1, w)} - \sigma_{(v_2, w)} \mid v_1, v_2 \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{F} \} \cup \{ \sigma_{(v, w_1+w_2)} - \sigma_{(v, w_1)} - \sigma_{(v, w_2)} \mid v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F} \} \right\}$

- Tenzorový součin $V \otimes W : V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W, \mathbb{F}) / \mathcal{Z}$.
- Projekce: $\pi : \mathcal{F}(V \times W, \mathbb{F}) \rightarrow V \otimes W$
- $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W : v \in V, w \in W \quad v \otimes w := \pi(\sigma_{(v, w)})$ Tenzorový součin vektorů

VLASTNOSTI:

- i) $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ je bilineární
- ii) $V \otimes W = \text{Span} \{ v \otimes w \mid v \in V, w \in W \}$
- iii) $\phi : V \times W \rightarrow U$ je bilineární $\Rightarrow \exists ! \tilde{\phi} : V \otimes W \rightarrow U$ tak, že $\phi(v, w) = \tilde{\phi}(v \otimes w)$
- iv) $M \subset V, N \subset W$ jsou LN $\Rightarrow \{ v \otimes w \mid v \in M, w \in N \}$ je LN
- v) $M \subset V, N \subset W, V = \text{Span} M, W = \text{Span} N \Rightarrow \text{Span} \{ v \otimes w \mid v \in M, w \in N \} = V \otimes W$
- vi) $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$ (kon-dim)
- vii) $\forall x \in V \otimes W \exists$ $n \in \mathbb{N}$ a $f_1, \dots, f_n \in V, e_1, \dots, e_n \in W \quad x = \sum_{j=1}^n f_j \otimes e_j$

Def.

Neht $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1), (\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ jsou Hilbertovy prostory. Tenzorovým součinem Hilbertových prostorů $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ rozumíme ~~zplněný~~ zplněný vektorový prostor $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vůči skalárnímu součinu $\langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle_1 \langle w_1, w_2 \rangle_2$.

zplnění (x, f) je $((x^*, f^*), f)$, kde (x^*, f^*) je úplný a $f : X \rightarrow X^*$ je izometrie splňující: $\overline{f(x)} = x^*$

- U je ON báze $\mathcal{H}_1, V$ je ON báze $\mathcal{H}_2 \Rightarrow \{ u \otimes v \mid u \in U, v \in V \}$ je ON báze $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tenzorový součin VP @ definice s.s., ale ne zplněný
- Podprostory: $H \otimes K = \text{Span} \{ v \otimes w \mid v \in H, w \in K \}$
 $H \otimes K := \overline{H \otimes K}$ (v úplném prostoru: úplnost $\Leftrightarrow$ uzavřenost podprostorů)

Def.

Neht $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$. Definujeme: i) $A \otimes B (x \otimes y) := (Ax) \otimes (By)$ ($\exists !$ lin. zobrazení $x \otimes y \mapsto Ax \otimes By$)
 $A \otimes B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$
 ii) $A \otimes B := \overline{A \otimes B}$, $\text{Dom } A \otimes B \neq \text{Dom } A \otimes \text{Dom } B$ (z neobice bychom dostali 0 vektor)

VLASTNOSTI:

- i) $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$
 ii) $\text{Dom}(A \otimes B) = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $A \otimes B$ je omezený $\Rightarrow A \otimes B$, $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$
- ii) $\otimes$ je bilineární; $(A_1 \otimes A_2) \circ (B_1 \otimes B_2) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2$; $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$; A, B reg $\Rightarrow A \otimes B$ reg
 $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- iii) A, B unit/herm/norm/proj $\Rightarrow A \otimes B$ také

II, $T_1, S_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), T_2, S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$

i) $\otimes$ bilineární: $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \subset (\mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_2))$; $T_1^* \otimes T_2^* \in (\mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_2))^*$

ii) T_1, T_2 uzavíratelné $\Rightarrow T_1 \otimes T_2$ je uzavíratelné $T_1 \otimes T_2 \subset \overline{T_1 \otimes T_2} \subset \overline{T_1} \otimes \overline{T_2}$
 T_1, T_2 v podstatě samodružné $\Rightarrow T_1 \otimes T_2$ v podstatě samodružné
 $\Rightarrow T_1 \otimes T_2$ samodružné

Postulát 4 (o složených systémech)

a) Stavový prostor systému složeného z ^{konečného počtu} podsystemů se stavovými prostory $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$ je jejich tenzorovým součtem, tj.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$$

b) Stavový prostor N identických bosonů, resp. fermionů, s jednočásticovým stavovým prostorem $\mathcal{H}_1$ lze vymezit na podprostor $S_N \mathcal{H}_N$, resp. $A_N \mathcal{H}_N$, prostoru

$$\mathcal{H}_N := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1}_{n\text{-krát}}$$

(k každému stavovému prostoru se lze vymezit na jeho univ. podprostor kde fyzikálně nic neztrácíme)

Def: Necht' $N \in \mathbb{N}, \forall \psi \in \mathcal{H}_N$ $U_\psi: \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_N: |\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N\rangle \mapsto |\psi_{\psi(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\psi(N)}\rangle$

$$S_N := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} U_\sigma, \quad A_N := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \text{sgn}(\sigma) U_\sigma$$

VLASTNOSTI: i) $U: \mathcal{G}_N \rightarrow GL(\mathcal{H}_N)$ je unitární reprezentace grupy $\mathcal{G}_N$ na $\mathcal{H}_N$

ii) S_N, A_N jsou projektor

iii) $S_N^2 = A_N^2 = \text{id}_{\mathcal{H}_N}, S_N + A_N = \text{id}_{\mathcal{H}_N}, S_N + A_N \leq \text{id}_{\mathcal{H}_N}$

iv) $\forall \psi \in \mathcal{G}_N, U_\psi S_N = S_N, U_\psi A_N = \text{sgn}(\psi) A_N$

Nerozlišitelnost $\equiv$ neexistuje pozorování, které by odlišilo $\psi, \varphi \in \mathcal{H}_N$, které splňují $\varphi = U_\psi \psi, \psi \in \mathcal{G}_N$

$\equiv$ Přípustné jsou pouze takové pozorovatelné, které komutují s $U_\psi \forall \psi \in \mathcal{G}_N$

Stat. op. odpovídá stavu ident. bosonů, resp. fermionů $\Leftrightarrow W(P_N \mathcal{H}_N) \subset P_N \mathcal{H}_N$ (Přípustný stav $\Leftrightarrow \psi \in P_N \mathcal{H}_N$)
časový vývoj ani měření přípustně pozorovatelné neovlivní příslušnost stavu, viz. výše

Funkce: $\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \Rightarrow \mathcal{H}_N \simeq L^2(\mathbb{R}^{3N}, d^{3N}x)$

$$\psi \in S_N \mathcal{H}_N \Leftrightarrow \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \stackrel{\text{sym}}{=} \psi(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(N)}) \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N$$

$$\psi \in A_N \mathcal{H}_N \Leftrightarrow \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \stackrel{\text{antisym}}{=} \text{sgn}(\sigma) \psi(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(N)}) \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N$$

PAULIHO PRINCIP:

• v souboru nerozlišitelných fermionů nemohou existovat dvě částice ve stejném stavu

$$\psi \in A_N \mathcal{H}_N \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathcal{G}_N, \psi = \text{sgn}(\psi) U_\psi \psi = \text{sgn}(\psi) (\psi_{\psi(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\psi(N)})$$

FOCKŮV PROSTOR: (přímý součet n -te cylindrické s proměnlivým počtem částic)

- dodefinujeme $\mathcal{H}_{(0)} := \mathbb{C}$, konzistentní s $\mathcal{H}_{(N+1)} = \mathcal{H}_{(N)} \otimes \mathcal{H}_{(1)}$, neboť $\mathcal{H}_{(1)} \cong \mathbb{C} \otimes \mathcal{H}_{(1)}$
- $\mathcal{F} := \bigoplus_{N=0}^{+\infty} \mathcal{H}_{(N)}$, $\mathcal{F}_S := \bigoplus_{N=0}^{+\infty} S_N \mathcal{H}_{(N)}$, $\mathcal{F}_A := \bigoplus_{N=0}^{+\infty} A_N \mathcal{H}_{(N)}$

Def: Necht $\mathcal{H}_N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{\text{Hilbertovy prostory}\}$. Pak

$$\bigoplus_{N=0}^{+\infty} \mathcal{H}_N := \left\{ (x_N)_{N=0}^{+\infty} \mid \sum_{N=0}^{+\infty} \|x_N\|_{\mathcal{H}_N}^2 < +\infty, \forall N \in \mathbb{N}_0, x_N \in \mathcal{H}_N \right\}$$

- VLASTNOSTI:**
- i) $(\bigoplus_{N=0}^{+\infty} \mathcal{H}_N, \langle \dots \rangle)$ je Hilbertův, $\langle x, y \rangle := \sum_{N=0}^{+\infty} \langle x_N, y_N \rangle_{\mathcal{H}_N}$
 - ii) $\hat{\mathcal{H}}_k := \{ (x_N)_{N=0}^{+\infty} \mid x_j = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}_0, j \neq k \}$ je uzavřený podprostor $\bigoplus_{N=0}^{+\infty} \mathcal{H}_N$ izomorfní $\mathcal{H}_k$
 - iii) $\forall k, j \in \mathbb{N}_0 \ \hat{\mathcal{H}}_k \perp \hat{\mathcal{H}}_j$
- $x = \sum_{N=0}^{+\infty} \hat{E}_N x$ ($\hat{E}_N$ je projektor na $\hat{\mathcal{H}}_N$)

Operátory:

- Def:** Necht $\mathcal{H}_N$ Hilbertovy prostory a $(T_N)_{N=0}^{+\infty}$ jsou op. tak, že T_k působí na $\mathcal{H}_k$
- $T_\oplus := \bigoplus_{N=0}^{+\infty} T_N : \mathcal{H}_\oplus \rightarrow \mathcal{H}_\oplus$ $\text{Dom } T_\oplus = \{ (x_N)_{N=0}^{+\infty} \in \mathcal{H}_\oplus \mid \forall N \in \mathbb{N}_0, x_N \in \text{Dom } T_N, \sum_{N=0}^{+\infty} \|T_N x_N\|_{\mathcal{H}_N}^2 < +\infty \}$
- $(T_\oplus x)_N = T_N x_N \ \forall N \in \mathbb{N}_0$ (pouze v konečné množině $N \neq 0$)

- T_N jsou omezené $\forall N \in \mathbb{N}_0, \sup_{\|x\|=1} \|T_N x\| < +\infty \Rightarrow T_\oplus$ je omezený, $\|T_\oplus\| = \sup_{N \in \mathbb{N}_0} \|T_N\|$
- T_N jsou samosdružení $\forall N \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow T_\oplus$ je samosdružený ($T_\oplus^* = \bigoplus_{N=0}^{+\infty} T_N^*$)
- Fakt: $\hat{\mathcal{H}}_N$ jsou uzavřené a vzájemně disjunkt podprostory
- $\mathcal{H}_N$ je separabilní $\Rightarrow \mathcal{F}, \mathcal{F}_S, \mathcal{F}_A$ jsou separabilní
- $(\varphi_N)_{N=0}^{+\infty}$ je ON báze v $\mathcal{H}_N \Rightarrow (1, 0, \dots, 0, \varphi_N, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0, \varphi_N, 0, \dots, 0, \dots)$ je ON báze v $\mathcal{F}$
- $x \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (x_N)_{N=0}^{+\infty} \in \mathcal{H}_N, \forall N \in \mathbb{N}_0, x_N \in \mathcal{H}_N$ a $\sum_{N=0}^{+\infty} \|x_N\|_{\mathcal{H}_N}^2 < +\infty$

- Pro $\mathcal{H}_{(0)}$ je kanonická báze $1 \in \mathbb{C}$, $\Omega_0 := \hat{1} \in \mathcal{F}$... vakuumový stav (z hlediska fyziky $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ není stav! neboť to je 1-dim podprostor)
- pozorovatelné:**
- $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) : T_{(N)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{(N)}) \mid T_{(N)} := \underbrace{\text{id}_{\mathcal{H}_1} \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathcal{H}_1} \otimes T \otimes \text{id}_{\mathcal{H}_1}}_{n\text{-krát}}$
 - $T_\mathcal{F} := \bigoplus_{N=0}^{+\infty} T_{(N)}$ • T je samosdružený $\Rightarrow T_\mathcal{F}$ je samosdružený
 - operátor počtu částic: $\mathcal{N} := (\text{id}_{\mathcal{H}_1})_\mathcal{F}$, $\mathcal{N} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{N}_0$, v. podprostory jsou $\hat{\mathcal{H}}_{(N)}$
 - $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) : T_{(N)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{(N)}) \mid T_{(N)} := \underbrace{T \otimes \dots \otimes T}_{n\text{-krát}} \quad \text{Dom } T_{(N)} = \text{Dom } T \otimes \dots \otimes \text{Dom } T$
 - $T_\mathcal{F} := \text{id}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{N=1}^{+\infty} T_{(N)}$ • Pro neinteragující částice je $U_\mathcal{F}^\otimes$ propagátor $\left(\begin{array}{l} -\hat{H} \text{ je generátor } U \\ -\hat{H}_\mathcal{F} \text{ je generátor } U_\mathcal{F}^\otimes \end{array} \right)$
 - Propagátor n -tice částic je propagátor na každé z nich

OBŠAZOVACÍ ČÍSLA:

- separabilní $\mathcal{H}_N$, $(\varphi_j)_{j=1}^{+\infty}$ jeho ON báze

$= \{ \Omega_0 \} \cup \{ \varphi_j | j \in \mathbb{N} \} \cup \{ \varphi_j \otimes \varphi_k | j, k \in \mathbb{N} \} \cup \dots$ je ON báze $\mathcal{H}$

- 1) Vezmeme vektory $S_N(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N})$ $\forall N \in \mathbb{N}$
- 2) vyhodíme duplikáty
- 3) znormalizujeme

ON báze $\mathcal{F}_S$: $\{ |n_1, n_2, \dots\rangle \mid \sum_{i=1}^{+\infty} n_i \in \mathbb{N}_0, \forall j \in \mathbb{N} n_j \in \mathbb{N}_0 \}$

$|n_1, n_2, \dots\rangle^S := A S_N(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N})$, kde $j_1, \dots, j_N$ je N -tice

ON báze $S_N \mathcal{H}_N$: $\{ |n_1, n_2, \dots\rangle^S \mid \sum_{j=1}^{+\infty} n_j = N, \forall j \in \mathbb{N} n_j \in \mathbb{N}_0 \}$

přirozených čísel taková, že se zde opakuje právě n_k -krát

ON báze $A_N \mathcal{H}_N$: $\{ |n_1, n_2, \dots\rangle^A \mid \sum_{j=1}^{+\infty} n_j = N, n_j \in \{0, 1\} \}$

ON báze $\mathcal{F}_A$: $\{ |n_1, n_2, \dots\rangle^A \mid \sum_{j=1}^{+\infty} n_j \in \mathbb{N}_0, n_j \in \{0, 1\} \}$

$|n_1, n_2, \dots\rangle^A := B A_N(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_N})$

KREAČNÍ A ANIHILAČNÍ OPERÁTORY:

- kreační operátor stavu $\varphi_k \in \mathcal{H}, k \in \mathbb{N}$

$$\hat{a}^+(\varphi_k) |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle^S := \sqrt{n_k+1} |n_1, n_2, \dots, n_k+1, \dots\rangle^S$$

$$\hat{a}(\varphi_k) |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle^S := \sqrt{n_k} |n_1, n_2, \dots, n_k-1, \dots\rangle^S$$

$$(\hat{a}(\varphi_k) \Omega_0 \equiv \hat{a}(\varphi_k) |0, 0, \dots\rangle = 0)$$

$$\hat{a}^+(\varphi_k) |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle^A := (-1)^{\sum_{j \in \mathbb{N}} n_j} (1 - n_k) |n_1, \dots, n_k+1, \dots\rangle^A$$

$$\hat{a}(\varphi_k) |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle^A := (-1)^{\sum_{j \in \mathbb{N}} n_j} n_k |n_1, n_2, \dots, n_k-1, \dots\rangle^A$$

- pomocí kreačního a anihilačního op. lze z $\Omega_0 \equiv |0, \dots\rangle^S/A$ vygenerovat celý $\mathcal{F}_S, \mathcal{F}_A$

BOSONY

$$[\hat{a}(\varphi_k), \hat{a}^+(\varphi_l)] = 0$$

$$[\hat{a}(\varphi_k), \hat{a}(\varphi_l)] = 0$$

$$[\hat{a}^+(\varphi_k), \hat{a}^+(\varphi_l)] = 0$$

$$\hat{N} = \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{a}^+(\varphi_k) \hat{a}(\varphi_k)$$

$$\hat{N}_k = \hat{a}^+(\varphi_k) \hat{a}(\varphi_k)$$

FERMIONY

$$\{\hat{a}^+(\varphi_k), \hat{a}^+(\varphi_l)\} = 0$$

$$\{\hat{a}(\varphi_k), \hat{a}(\varphi_l)\} = 0$$

$$\{\hat{a}^+(\varphi_k), \hat{a}(\varphi_l)\} = \delta_{kl}$$

$$\hat{N}_k = \hat{a}^+(\varphi_k) \hat{a}(\varphi_k)$$

$$\hat{N} = \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{a}^+(\varphi_k) \hat{a}(\varphi_k)$$

KVANTOVÁNÍ:

~~OHROBENÍ Lagrangianu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ $\rightarrow \Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ $\rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi, \Pi)$~~

- z vlnové funkce vyrobím operátor