

1. Lieova grupa, algebra - zákl. pojmy, vztl exp

(LIEOVA GRUPA A LIEOVA ALGEBRA - DEFINICE, EXPONENCIÁLNÍ ZOBRAZENÍ, TOKY LEVOINV. VEKTOROVÝCH POLÍ, MATICOVÉ GRUPY A ALGEBRY)

Def: Lieova grupa je hladká varieta G vybavená grupovou strukturou tak, že $\cdot: G \times G \rightarrow G$ a $(\cdot)^{-1}: G \rightarrow G$ jsou hladká zobrazení.

- Př:**
- $GL(V) = \{\text{automorfismy kon-dim vekt. prost. } V\}$, $\dim G = (\dim V)^2$, $\cdot$
 - $GL(n, \mathbb{R}) = \{\text{Regulární matice } n \times n \text{ s } \mathbb{R}\text{-prvky}\}$, $\dim G = n^2$, maticové násobení
 - $GL(n, \mathbb{C}) = \{ \dots \}$, $\mathbb{C}$ -prvky, $\dim G = 2n^2$, $\dots$

- $F: M \rightarrow N$ hladké je VNORĚNÍ (Immersion) $\Leftrightarrow \forall p \in M \text{ rank } F_*p = \dim M$
(Immersion) $\Leftrightarrow F$ je povlakový monomorfismus
- Varieta $S \subset M$ je VNORĚNÁ PODVARIETA variety $M \Leftrightarrow \exists \delta: \delta \rightarrow M$ je vnorení $\Rightarrow$ δ je povlakový monomorfismus topologie
ii) $\iota: S \hookrightarrow M$ je vnorení

- $F: M \rightarrow N$ hladké je VLOŽENÍ (Embedding) $\Leftrightarrow F$ je vnorení a zároveň $F: M \rightarrow F(M)$ je homeomorfismus
- Varieta $S \subset M$ je VLOŽENÁ PODVARIETA variety $M \Leftrightarrow \exists$ $\delta: \delta \rightarrow M$ je vnorení a δ je vložení

Def: $H \subset G$ nazveme Lieovou podgrupou Lieovy grupy $G \Leftrightarrow$ i) H je podgrupa
ii) H je vnorená podvarieta G taková, že je Lieovou grupou

Def: Maticové Lieovy grupy jsou uzavřené Lieovy podgrupy

- Speciální lineární grupa: $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$, $\det A = 1$
- Pseudoortogonální grupa: $O(p, q) \subset GL(n, \mathbb{R})$, $[A^T J A = J]$, $J = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q)$
 $O(n) := O(n, 0)$, $SO(p, q) := SL(n, \mathbb{R}) \cap O(p, q)$, $SO(n) := SO(n, 0)$
- Pseudounitární grupa: $U(p, q) \subset GL(n, \mathbb{C})$, $[A^* J A = J]$
 $SU(p, q) := SL(n, \mathbb{C}) \cap U(p, q)$, $U(n) := U(n, 0)$, $SU(n) := SU(n, 0)$
- Symplektická grupa: $SP(2n, \mathbb{R}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$, $[A^T J A = J]$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}_n$

Def: ^{translace} ~~extenze~~ $\cdot: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ $L_g: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$
 $\hookrightarrow$ je difeomorfismus!

- $X \in \mathfrak{X}(G)$ je **Levoinvariantní** $\Leftrightarrow \forall g \in G \ L_g X = X$
 $\Leftrightarrow \forall g \in G \ L_g X|_g = X|_g$
- $X_g = L_g X_e \Rightarrow$ Levoinv. vekt. pole je jednoznačně určeno svou hodnotou v libovolném bodě (std. e)
- $Y \in \mathfrak{X}(G)$ $\cdot X$ jako derivace algebry $C^\infty(M)$ je levoinv $\Leftrightarrow L_g^* X = X \circ L_g^*$

Def: Lieova algebra $(A, [\cdot, \cdot])$ je vektorový prostor A vybavený bilineárním zobrazením $[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A$
taky i.e.
i) $[\cdot, \cdot]$ je antisymetrické
ii) $\forall x, y, z \in A \ [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (Jacobiho identita)

• Strukturní konst. Lieovy závorčky

• $\forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad L_X^* [X, Y] = [X, Y] \circ L_X^* \wedge (\mathfrak{X}(G), [\cdot, \cdot])$ je Lieova algebra $\wedge L_X^*$ je lin $\Rightarrow \mathfrak{g}$ je Lieova podalgebra $\mathfrak{X}(G)$

Def: $\mathfrak{g}$ nazýváme Lieovou algebrou Lieovy grupy G

Věta o implicitním zobrazení:

- Nechť $F: M \rightarrow N$ je hladké a maximálního ranku $(\text{rank } F = \dim N)$
 i) $F^{-1}(\{q\})$ je $(\dim M - \dim N)$ -rozměrná vložená podvarietta v M
 ii) $\forall p \in F^{-1}(\{q\}) \quad T_p F^{-1}(\{q\}) = \ker F_{*p}$

Lieovy algebry maticových Lieových grup:

- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n} \quad \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n \times n}$
- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \quad \boxed{\text{Tr } A = 0}$
- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$
- $\mathfrak{o}(p, q) \subset \mathfrak{so}(p, q) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \quad \boxed{A^T J + J A = 0}$
- $\mathfrak{u}(p, q) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \quad \boxed{A^T J + J A = 0}$
- $\mathfrak{su}(p, q) = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$
- $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \quad \boxed{A^T J + J A = 0}$

Def: Zobrazení Lieových grup $\phi: G \rightarrow H$ je morfismus Lieových grup $\Leftrightarrow \phi$ je hladké a morfismus grup.
 izomorfismus Lieových grup $\Leftrightarrow \phi$ je difeomorfismus a morfismus grup.

Def: Jednoparametrická podgrupa v Lieově grupě G je morfismus Lieových grup $\phi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$

- i) $\phi(s) \cdot \phi(t) = \phi(s+t) = \phi(t+s) = \phi(t) \cdot \phi(s) \Rightarrow \phi(\mathbb{R})$ je Abelovská podgrupa G
- ii) $\phi(t) = \phi(t+0) = \phi(t) \cdot \phi(0) \Rightarrow \phi(0) = e$
- iii) $\phi(\mathbb{R})$ je souvislá Lieova podgrupa v G s $\dim \phi(\mathbb{R}) \leq 1 \Rightarrow \phi(\mathbb{R}) \simeq \{e\} \vee \phi(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \vee \phi(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$ Lie-izomorfní
- iv) Jednoparam podgrupy v G jsou právě maximální integrační křivky vektorových polí z $\mathfrak{g}$

Def: Exponenciální zobrazení $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$, kde γ je int. křivka X s počátkem v e
 $: X \mapsto \gamma(1)$ ($\Leftrightarrow$ jednoparam podgrupa v G daná X)

Trzení: $\forall X \in \mathfrak{g}, \phi: t \mapsto \exp(tX)$ jednoparam podgrupa v G daná X

Maticové Lieovy grupy: Levoinv vekt. pole exponenciální

$$Xg = gX_e \quad e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (X_e)^k, \quad A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \quad \det e^A = e^{\text{Tr } A}$$

Vlastnosti: i) $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ je hladké

$$\text{ii) } \exp[(s+t)X] = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$$

$$\text{iii) } (\exp X)^{-1} = \exp(-X)$$

$$\text{iv) } (\exp X)^n = \exp(nX)$$

$$\text{v) } \exp \circ \text{id}_{\mathfrak{g}} = \text{id}_G \Rightarrow \text{id}_{\mathfrak{g}} \text{ je id}_{\mathfrak{g}}$$

$$\text{vi) } \exists U \text{ okolí } 0 \in \mathfrak{g} \text{ tak, že } \exp: U \rightarrow V \text{ je difeomorfismus}$$

$$\text{vii) } X \in \mathfrak{g}: \Psi_t^X g = g \cdot \exp(tX) = R_{e^{tX}} g$$

$$\text{viii) } ([X, Y]f)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (f(p e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY}) - f(p))$$

Maticové Lieovy grupy: $[X, Y] = XY - YX$

2. Univerzální Nakrytí Lieovy Grupy

(Nejednoznačnost ve vztahu Lieových grup a algeber) Klasifikace souvislých Lie grup
 Def: Necht M je souvislá varieta. Hladkou souvislou varieta $\bar{M}$ vybavenou hladkým surjektivním zobrazením $\pi: \bar{M} \rightarrow M$ nazveme nakrytím variety M $\Leftrightarrow$

- i) $\forall p \in M \exists U$ otevřené okolí p tak, že $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha, \beta, \alpha \neq \beta$
 ii) $\forall \alpha \in I$ je $\pi|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$ difeomorfismus

• Nakrytí $(\bar{M}, \pi)$ nazveme univerzální $\Leftrightarrow \bar{M}$ je jednoduše souvislá

Věta: Pro každou souvislou varieta existuje univerzální nakrytí $(\bar{M}, \pi)$. Navíc je
 (1) jednoznačné ve smyslu, že pro každou dvojici univerzálních nakrytí $(\bar{M}, \pi), (\bar{M}', \pi')$ existuje difeomorfismus $\Phi: \bar{M} \rightarrow \bar{M}'$ takový, že $\pi' \circ \Phi = \pi$.

$\bar{M} = \{[\gamma] \mid \gamma: [0,1] \rightarrow M, \gamma(0) = x_0\}$ $\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \gamma(0) = \gamma'(0), \gamma(1) = \gamma'(1), \gamma \circ \gamma'^{-1}$ je homotopická s x_0
 $\pi([\gamma]) = \gamma(1)$

Věta: Pro souvislou Lieovu grupu G existuje univerzální nakrytí $(\bar{G}, \pi)$ tak, že
 (2) $\bar{G}$ je Lieova grupa a π je morfismus Lieových grup. Jednoznačné ve smyslu, že pokud $\bar{G}$ jsou izomorfni a projevy jsou "relativně".
 $e := X_0, [\delta \gamma] \cdot [\delta \eta] := [\delta \gamma \circ L_\gamma(\delta \eta)], \bar{e} = [\delta e], [\delta \gamma]^{-1} = [L_{\gamma^{-1}}(\delta \gamma^{-1})]$

• Okolí grupových jednotek jsou difeomorfní $\Rightarrow \pi_x: T_x \bar{G} \rightarrow T_x G$ je kp. izo a navíc π_x zachovává Lie strukturu
 (z toho, že π je morfismus grup: $T(\pi) = e$)
 $\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\pi|_{U_0}: U_0 \rightarrow U$ jedifeo. $\Rightarrow \bar{g} \simeq \bar{g}$

Věta (Ado): Pro každou kon-dim Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje její věrná kon-dim reprezentace $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, tj. $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$
 $\hookrightarrow$ Lieova podalgebra $\hookrightarrow$ izomf. Lie algebr

Důsledek: Ke každé Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje souvislá maticová Lieova grupa $G \subset GL(V)$, tak, že $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Ke G pak můžeme najít jednoduše souvislé nakrytí $\bar{G}$, jež je Lieova grupa, ale již nemusí být podgrupou v $GL(V)$.

• Má-li podgrupa $\mathfrak{g}$ v $\mathfrak{gl}(V)$ $\Rightarrow$ jednoznačně najít Lieovu podgrupu G v $GL(V)$
 $\Rightarrow$ jednoduše souvislé nakrytí $\bar{G}$

$$\bar{g} \simeq \bar{g} \Rightarrow \text{Lie}(\bar{G}) = \mathfrak{g}$$

• Je $\bar{G}$ jednoznačná? i) z hlediska variet ano (1)
 ii) z hlediska grup (pomocí exp)

$\hookrightarrow$ Lieovy algebry jednoduše souvislých grup jsou izo $\Rightarrow$ Grupy jsou izo

Věta: Necht G a H jsou jednoduše souvislé Lieovy grupy a $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ morfismus jejich Lieových algeber. Pak $\exists! \Phi: G \rightarrow H$ morfismus Lieových grup tak, že $\Phi_* = \phi$

• Pokud jsou G a H jednoduše souvislé Lieovy grupy se vzájemně izomorfni Lieovými algebrami, jsou G a H izomorfni.

• Existuje jedno-jednoznačný vztah mezi izo-třídami Lieových algeber a izo-třídami jednoduše souvislými Lieovými grupami.

• Všechny ostatní souvislé Lieovy grupy získané z $\mathfrak{g}$ jsou nakryvány grupou $(\bar{G}, A)$ tedy $\exists \pi: \bar{G} \rightarrow G$ morfismus Lieových grup. $D := \ker \pi$ je normální podgrupa $\bar{G}$ a navíc $G = T(\bar{G}) \simeq \bar{G}/D$. D je diskrétní, D je definice nakrytí

• Normalnost: $\forall g \in G \quad g D g^{-1} = D$

• $\nexists d \in D \text{ s.t. } \phi(g) := g d g^{-1}$

$\forall g \in G \quad \phi: G \rightarrow G$ je hladké $\Rightarrow \forall g \in G \nexists d \in D \quad g d = d g \Rightarrow D$ je Abelská a dokonce je podgrupa $Z(G)$

• Máme reprezentaci ϕ Lieovy algebry $\mathfrak{g} \Rightarrow$ Máme ^{věznáča} reprezentaci ρ příslušné Lieovy grupy $\tilde{G}$ tak, že $\rho_* = \phi$

vezmeme libovolnou souvislou grupu G , tj. $G \cong \tilde{G}/D$

i) $\rho(D) \neq \{I\}$: pak $\tilde{\rho}: \tilde{G}/D \rightarrow GL(V)$

$gD \mapsto \rho(g)D$ není dobře def., neboť závisí na volbě reprezentantu

nicméně můžeme zavést relaci ekvivalence na $GL(V)$

$A \sim A' \Leftrightarrow \exists d \in D \text{ tak, že } A' = A \rho(d)$

Definujeme $\rho': \tilde{G}/D \rightarrow GL(V)/\rho(D)$

$gD \mapsto \rho(g) \rho(D)$

• Pokud $\rho(D) \subset \text{span}\{I\}$ ^{věznáča} reprezentace

ii) $\rho(D) = \{I\}$: $\tilde{\rho}: \tilde{G}/D \rightarrow GL(V)$ je reprezentace ^{kvantová mechanika je ok, neboť fyz. stav je určen jednorozměrným podprostorem}

IZOMORFNI LIEOVY ALGEBRY NEDÁVají JEDNOZNAČNOU SOUVISLOU LIEOVU GRUPU

$SU(2) \cong SO(3)$ ^{souvislá}, ale $SO(3) \not\cong SU(2)$ ^{jednoduše souvislá}
 $SO(3) \cong SU(2) / \{I, -I\}$

souvislé: $SL(n, \mathbb{R})$ $GL(n, \mathbb{C})$ jednoduše souvislé: $SU(n)$
 $SO(n)$ $SL(n, \mathbb{R})$ $SL(n, \mathbb{C})$
 $Sp(2n, \mathbb{R})$
 $U(n)$
 $SU(n)$

nesouvislé: $GL(n, \mathbb{R})$
 $O(n)$
 $SO(p, q)$
 $O(p, q)$

Souvislost:

Definice:

$f, g \in \text{Top}(X, Y)$ jsou homotopická $\Leftrightarrow \exists h \in \text{Top}(I \times X, Y)$

$$h(0, -) = f$$

$$h(1, -) = g$$

X, Y top. prostory

$$A \subseteq X$$

$f, g \in \text{Top}(X, Y)$ jsou homotopická vzhledem k $A \Leftrightarrow \exists$ homotopii H

funkcí f, g

každě

$f \in \text{Top}(X, Y)$ je homotop. ekvivalence $\Leftrightarrow \exists g \in \text{Top}(Y, X)$ $f \circ g \simeq \text{id}_Y$

$$g \circ f \simeq \text{id}_X$$

A je deformační retrakce $X \Leftrightarrow \exists r \in \text{Top}(X, X)$

$$r(x) = A, \text{id}_X \simeq r$$

$$H|_{I \times A} \in \text{Top}(A, Y)$$

$\rightarrow$ neekvivalent

X je, jednoduše souvislý $\Leftrightarrow X$ je ^{kvivově} souvislý
 tvrzení: $\alpha \pi_0(X) = \{e\}$

X je homotop. ekvivalentní svým deformačním retraktem

$f \in \text{Top}(X, Y)$ je homotop. ekvivalence $\Rightarrow f_*$ je izomorfismus fund. grup

X je kvivově souvislý $\Leftrightarrow$ jeho deformační retrakt je kvivově souvislý

$\Rightarrow X$ je jednoduše souvislý $\Leftrightarrow$ jen 1

jednoduše $\leftarrow 1$

Tvrzení:

Pro souvislou Lieovu grupu G nutně neplatí $\exp(G) = G$ ($SL(2, \mathbb{R})$)

G je souvislá a kompaktní $\Rightarrow \exp(G) = G$

G je souvislá $\Rightarrow \forall g \in G \exists x, y \in \mathfrak{g} \quad g = e^x \cdot e^y$

3. Podgrupy a podalgebry, akce grupy, homog. pr.

(PODGRUPY, PODALGEBRY, AKCE GRUPY, COSETY, GRUPA, ROTOPIE, HOM. PROST., PRÍKLADY)

Def: HSG nazveme Lieovou podgrupou Lieovy grupy $G \Leftrightarrow$ i) H je podgrupa G
ii) H je vnorená podvarieta G
taková, že je Lieovou grupou

- Necht' H je Lieova podgrupa G . H je uzavřená $\Leftrightarrow H$ je vložená podvarieta v G .
- Necht' H je podgrupa a $H = \bar{H} \Rightarrow H$ je vložená Lieova podgrupa

Def: Vektorový podprostor $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ nazveme i) Lieovou podalgebrou $\mathfrak{g} \Leftrightarrow [h, h] \subset \mathfrak{h}$
ii) Ideálem $\mathfrak{g} \Leftrightarrow [h, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$

Def: Necht' $\mathfrak{g}$ je Lieova grupa a $\mathfrak{h}$ je její ideál. Faktorálgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je Lieova algebra
 $\{[X] | X \in \mathfrak{g}\}$, $[X]Y \Leftrightarrow X - Y \in \mathfrak{h}$ s Lieovou závorkou $[X], [Y]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} := [X, Y]_{\mathfrak{g}}$

Distribuce:

Def: Necht' M je hladká varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$ a necht' $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $\Delta: p \in M \mapsto \Delta(p) \in T_p M$
 $\hookrightarrow$ podprostor nazýváme k -rozměrná distribuce

$\rightarrow$ lok. generátory

- Řekneme, že distribuce Δ je hladká $\Leftrightarrow \forall p \in M \exists$ okolí p a $\{X_1, \dots, X_k\} \in \mathcal{X}(U)$ tak, že $\Delta(p) = \text{Span}\{X_1|_p, \dots, X_k|_p\}$
- Necht' Δ je hladká k -distribuce. Vnorenou podvarieta S dimenze k nazveme integrační podvarieta distribuce $\Delta \Leftrightarrow \forall p \in S \quad T_p S = \Delta(p)$
- Hladkou distribuci Δ zoveme integrační $\Leftrightarrow \forall p \in M \exists$ integrační podvarieta Δ tak, že $p \in S$
- Řekneme, že $X \in \mathcal{X}(U)$ je lok. generátor distribuce $\Delta \Leftrightarrow \forall p \in U \quad X_p \in \Delta(p)$
- Δ je involutivní $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{X}(U), \forall Y \in \mathcal{X}(U)$ lok. generátory Δ platí $\forall p \in U \cap V \quad [X, Y]_p \in \Delta(p)$

Tvrzení: Δ je involutivní $\Leftrightarrow \exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ pokrývající M tak, že $\forall \alpha \in I$ libovolné lok. generátory $(X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{X}(U_\alpha)$ splňují $[X_i, X_j] \in \Delta(p) \quad \forall p \in U_\alpha$

Frobeniova věta: Hladká k -rozměrná distribuce je integrabilní $\Leftrightarrow$ involutivní.

Def: Necht' M je hladká varieta. Pak $\mathcal{F}$ nazýváme k -rozměrnou foliací variety M
 $(k \leq \dim M)$
 $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ je soubor vzájemně disjunktních, neprázdných, souvislých vnorených podvariety M dimenze k tak, že $M = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ a $\forall p \in M \exists$ mapa $(U, (x^1, \dots, x^n))$ tak, že $\varphi(U)$ je n -rozměrná otevřená křivka a $\forall F \in \mathcal{F}$ je $F \cap U$ buď prázdná množina, nebo spočetné sjednocení k -rozměrných slicí ve tvaru $S = \{q \in U | x^{k+1}(q) = c^1, \dots, x^n(q) = c^n\}$. Podvariety $F \in \mathcal{F}$ se nazývají listy foliace

Frobeniova věta: Necht' Δ je integrabilní k -distribuce. Pak

$\mathcal{F}_\Delta = \{S \in M | S \text{ je maximální souvislá integrabilní podvarieta distribuce}\}$
je k -rozměrná foliace M .
 $\hookrightarrow$ není obsažena v žádné větší integrabilní podvarietě

Věta: Necht' G je Lieova grupa a $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ Lieova podalgebra. Pak existuje právě jedna souvislá Lieova podgrupa $H \subseteq G$ taková, že $\mathfrak{h}$ je kanonicky izomorfní Lieově grupě H .

Důkaz: $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ podalgebra zadává (dim $\mathfrak{h}$) - rozměrnou distribuci $\Delta \mathfrak{h}$ (Levoinu $\Rightarrow$ Regul)

- Podalgebra $\Rightarrow$ involutivní $\Leftrightarrow$ integrabilní $\Rightarrow$ Foliace G ožn $\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}$
- $\exists H \in \mathcal{F}_{\mathfrak{h}}$ tak, že $e \in H \Rightarrow$ máme vnořenou podvarietu $H \subseteq G$ tak, že $T_e H = \mathfrak{h}$
- Je to grupa?

$\mathfrak{g} \ni L_g$ je difeomorfismus $\Rightarrow L_g H = gH$ je varietu

$$\forall h \in \mathfrak{h} \Rightarrow \forall h \in \mathfrak{h} \quad T_{gh} \mathfrak{h} = L_{g*} T_h \mathfrak{h} \Rightarrow T_{gh} \mathfrak{h} = \text{span} \{ L_{g*} X_1, \dots, L_{g*} X_n \} = \text{span} \{ X_{g1}, \dots, X_{gn} \}$$

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ je max. $\Rightarrow \forall gH$ je max
- Frobenius: $H = gH \vee H \cap gH = \emptyset$

i) vezmu libovol $h_1, h_2 \in H$

pro spor: $h_1 h_2 \notin H \Rightarrow H \cap h_1 H = \emptyset$ ale $h_1 \in H$ a $h_2 = h_1 e \in h_1 H \Rightarrow$ spor!

ii) vezmu libovol $h \in H$

pro spor $h^{-1} \notin H \Rightarrow H \cap h^{-1} H = \emptyset$ ale $e \in H$ a $e = h^{-1} h \in h^{-1} H \Rightarrow$ spor!

Akce:

Def: Levá akce Lieovy grupy G na varietě M je hladké zobrazení

$\Theta: G \times M \rightarrow M$ takové, že: i) $\Theta_e = \text{id}_M$

$(g, m) \mapsto \Theta(g, m)$

$\Theta^m: G \rightarrow M$

ii) $\Theta_{g_1 g_2} = \Theta_{g_1} \circ \Theta_{g_2}$ $\forall g_1, g_2 \in G$

stabilizátor bodu $m \in M$: $B_m := \{ g \in G \mid \Theta(g, m) = m \} \subseteq G$ (GRUPA ISOTROPIE)

Orbita bodu $m \in M$: $O_m := \{ \Theta(g, m) \mid g \in G \} \subseteq M$

- $m \sim m' \Leftrightarrow m \sim m'$ leží v orbitě nějakého bodu $\Rightarrow M$ lze napsat jako disjunkt, sjednocení orbit
- Orbyty jsou vnořené podvariety
- Stabilizátor $G_m = [\Theta^{-1}(m)]^{-1}(\{m\}) \Rightarrow$ je uzavřená podgrupa Lieovy grupy

$$= \Theta^{-1}(\{m\})$$

$\Rightarrow$ je Lieova podgrupa (vložená)

Def: Akci Lieovy grupy na varietě nazveme: i) transitivity $\Leftrightarrow \forall m, m' \in M \exists g \in G \Theta(g, m) = m'$

Homogenní prostory: $\mathbb{S}^n = SO(n)/SO(n-1)$, $G = G/H$

Def: Varieta M , na níž působí nějaká Lieova grupa

transitivně nazýváme homogenní prostor

• $\exists H \subseteq G$ uzavřená podgrupa tak, že $M = G/H$

• $\dim M = \dim G - \dim H$

Cosety: H je podgrupa G , $\forall g \in G$ gH je levý coset podgrupy H v grupě G

• Cosety $\equiv$ Orbyty pravé translace H na G

Vrzení: Necht' $\Theta: G \times M \rightarrow M$ je transitivity akce a $m \in M$

Důkaz: tvrdíme, že $F: G/B_m \rightarrow M$

$$gB_m \mapsto \Theta(g, m)$$

$$\text{sur? } x \in M \Rightarrow \exists g \in G \Theta(g, m) = x$$

je difeomorfismus Je dobře def? $F(g_1 B_m) = \Theta(g_1, m)$

$$g \in B_m = \Theta(g_1 g, m) = \Theta(g_1, m) = F(g_1 B_m)$$

$$\text{inj? } F(g_1 B_m) = F(g_2 B_m) \Leftrightarrow g_1 \cdot m = g_2 \cdot m \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \cdot m = m \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in B_m$$

4. Reprezentace Lieovy grupy, algebry, adjungovaná reprezentace, ireducibil. rep., Schurrovo lemma, Pr. úplně red. rep.

- Pr.: • konečně-rozměrné reprezentace poloprostých Φ -Lieových algeber (Weyl)
- Unitární Lieovy grupy
 - $\mathfrak{g}_x$ reprezentace Lieovy algebry vznikají z unitární rep. Lieovy grupy
 - Triviální reprezentace

Def. Necht' $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ jsou Lieovy grupy, a $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Řekneme, že ϕ je Lieových algeber $\Leftrightarrow \gamma$ je lineární

$$\forall x, y \in \mathfrak{g} \quad [\phi(x), \phi(y)]_{\mathfrak{h}} = \phi([x, y]_{\mathfrak{g}})$$

- $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ jsou ideály $\vee \mathfrak{g} \Rightarrow [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2], \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ jsou ideály
- $\mathfrak{h}$ je ideál $\vee \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{h}^k, \mathfrak{h}^{(k)}$ jsou ideály

• Faktorizace podle ideálu $\mathfrak{h}$

Morfismy, Reprezentace, Derivace:

Vrzení: $\phi: G \rightarrow G'$ je morfismus Lieových grup $\Rightarrow \forall g \in G \quad \phi_* \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi_*$

$D\phi: \forall g, h \in G \quad \phi(g \cdot h) = \phi(g) \cdot \phi(h) = (L_{\phi(g)} \circ \phi)(h) \Rightarrow \phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi \Rightarrow \phi_* \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi_*$

ii) $\phi_*(g) \in \mathfrak{g}'$
 ii) je $\phi_* X \in \mathfrak{g}'$? Máme $g_1, g_2 \in G$ tak, že $\phi(g_1) = \phi(g_2) \Rightarrow \exists h \in G \quad g_1 = hg_2 \wedge h \neq e$

$\Rightarrow \phi_*(X_{g_2}) = \phi_*(X_{hg_1}) = (\phi_* \circ L_{h*}) X_{g_1} = L_{\phi(h)*} \phi_* X_{g_1} = \phi_*(X_{g_1})$
 $\forall g, h \in G, \forall X \in \mathfrak{g} \quad L_{g*}(\phi_* X) = L_{g*}(\phi_* X)_{\phi(h)} = (L_{\phi(g)*} \circ \phi_*) X_h = \phi_*(L_g X_h) = \phi_*(X_{gh})$

Vrzení: $\phi: G \rightarrow G'$ je morfismus Lieových grup $\Rightarrow \phi(e^{tx}) = e^{t\phi_* x}$

$D\phi: \phi_1: (R, +) \rightarrow G', \quad \phi_2: (R, +) \rightarrow G' \quad \phi_1, \phi_2$ jsou jednoparametrické podgrupy v G'
 $t \mapsto \phi_1(e^{tx}) \quad t \mapsto \phi_2(e^{tx})$

$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \phi(e^{tx}) = \phi_* \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} e^{tx} = \phi_* X_e = \phi_* X|_e = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} e^{t\phi_* x}$

Vrzení: $\phi: G \rightarrow G'$ je morfismus Lieových grup $\Rightarrow \phi_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ je morfismus Lieových algeber

Reprezentace (konv. dim.) $X(Y-Z) = [X, Y] - [X, Z] = X(Y-Z) = X(Y-Z) \circ \phi = X(Y-Z) \circ \phi$

Def: Reprezentace Lieovy grupy G na vektorovém prostoru V je morfismus Lieových grup $\rho: G \rightarrow GL(V)$ (těleso libovolné)

Reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V je morfismus Lieových algeber $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ (stejně těleso $\mathfrak{g}$ a V)

• Reprezentace $\rho: G \rightarrow GL(V)$ definuje levou akci: $\rho_g(g, v) = \rho(g)v$, která je navíc lineární, naopak silná levo-akce definují reprezentaci

Def: Reprezentace Lieovy grupy/algebry nazveme věrná $\Leftrightarrow \rho$ je injektivní

• z věrné rep. lze zrekonstruovat Lieovu záměru/grupové násobení

Def: Necht' $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ je soubor lin. op. na vektorovém prostoru V . Řekneme, že Σ je

i) ireducibilní $\Leftrightarrow$ neexistuje netriviální Σ -invariantní podprostor W společný pro všechny prvky Σ
 ii) reducibilní $\Leftrightarrow$ existuje netriviální Σ -invariantní podprostor $W \subset V$ společný pro všechny prvky Σ
 tj. $\forall A \in \Sigma \quad \forall v \in W \quad Av \in W$

iii) úplně reducibilní $\Leftrightarrow$ je zobrazení tak, že každému invariantnímu podprostoru U existuje invariantní doplněk do V

• Reprezentace Lieovy grupy/algebry je ireducibilní/reducibilní/úplně reducibilní $\Leftrightarrow \rho(G)/\rho(\mathfrak{g})$ je

• Reprezentace Lieovy grupy ρ je unitární $\Leftrightarrow \forall g \in G \quad \langle \rho_g v_1, \rho_g v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
 $\forall v_1, v_2 \in V \quad \langle \rho(g)v_1, \rho(g)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

Vrzení: Unitární reprezentace je plně reducibilní

• Máme V netriviální Σ -invariantní podprostor, kde u, v je $V^\perp$ je pro Σ invariantní, vezmeme $u, v \in V^\perp$

$\forall g \in G \quad \langle u, \rho(g)v \rangle = \langle \rho(g^{-1})u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \quad \langle u, v \rangle = 0$
 $\text{Sur } \rho \Rightarrow \exists g \in G \quad \rho(g)m = x \quad \text{inj } \rho \Rightarrow \rho(g_1 \cdot m) = \rho(g_2 \cdot m) \Leftrightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \cdot m = m \Leftrightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in \text{Ker } \rho$

Prvzení: Reprezentace $\rho: G \rightarrow GL(V)$ je unitární $\Rightarrow \forall x \in \mathfrak{g} \quad (\rho_* X)^* = -\rho_* X$

Důkaz: $(\rho_* X)^* = \left(\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \rho(e^{tx}) \right)^* = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (\rho(e^{tx}))^* = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \rho(e^{-tx}) = -\rho_* X$

$\Rightarrow \rho_*$ je plně redukibilní

Věta: Reprezentace

vezmeme libovol $v \in V^\perp, \forall u \in V \quad \langle u, \rho_*(x)v \rangle = \langle \rho_*(x)u, v \rangle = -\langle \rho_*(x)u, v \rangle = 0$

$\forall x \in \mathfrak{g}$
 v je inu a $v \in V^\perp$

Schur's Lemma:

Nechť V je nad $\mathbb{C}$ a $\Sigma \subset GL(V)$ ireducibilní soubor operátorů. Potom $\forall A \in GL(V)$ splňující $\forall S \in \Sigma \quad [A, S] = 0$ existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že $A = \lambda \text{id}_V$.

Věta: Necht' V je nad $\mathbb{C}$ a $\Sigma \subset GL(V)$ je úplně redukibilní soubor operátorů. Pak $\forall A \in GL(V)$ splňující $[A, S] = 0 \quad \forall S \in \Sigma \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$ tak, že $A = \lambda \text{id}_V$ platí, že Σ je ireducibilní.

Důkaz:

Def: Derivace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je lineární zobrazení $D: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ splňující

$$D([X, Y]) = [DX, Y] + [X, DY] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Def: Necht' G je Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ Lieova algebra:

• Adjungovaná akce $\phi: G \times G \rightarrow G$ $\phi_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$
 $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$

• Adjungovaná reprezentace Lieovy grupy G na $\mathfrak{g}$

$$\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto L_g \circ R_{g^{-1}}^*$$

• Adjungovaná reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow GL(\mathfrak{g})$$

$$x \mapsto [x, \cdot] \Rightarrow \text{ad je derivace h}$$

Jacobi

Věta: Necht' G je Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra. Pak $\text{Ad}_* = \text{ad}$

Důkaz: $[\text{Ad}_* X] Y = \left(\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \text{Ad}(e^{tx}) \right) Y = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} [\text{Ad}(e^{tx}) Y]$

$$[\text{Ad}(e^{tx}) Y]_e = R_{e^{tx}}^* L_{e^{tx}} Y_e = R_{e^{tx}}^* Y_{e^{tx}} = \Psi_{-t}^* Y_{e^{tx}} \bigg|_{\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0}}$$

$$\text{LS: } \left(\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} [\text{Ad}_* X] Y \right)_e = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \Psi_{-t}^* Y_{e^{tx}} = [X, Y]_e$$

Maticově: $\text{Ad}_g X = g X g^{-1}$

$$\text{ad}_g Y = XY - YX$$

Def: Derivaci nazveme **vnitřní** $\Leftrightarrow \exists X \in \mathfrak{g}$ tak, že $D = \text{ad}_X$
vnější $\Leftrightarrow$ není vnitřní

5. Zákł. třídy Lie algebren, Levi

- Def:** Lieova algebra je
- i) abelovská $\Leftrightarrow [g, g] = 0$
 - ii) prostá $\Leftrightarrow$ ~~žádné~~ jediné ideály v g jsou $\{0\}$ a g
 $\dim g > 1$
 - iii) poloprostá $\Leftrightarrow$ jediný abelovský ideál je $\{0\}$

ideál h Lieovy algebry g je vekt. podprostor g splňující $[h, g] \subset h$

podalgebra

- 11 -

$$[h, g] := \text{span} \{ [x, y] \mid x \in h, y \in g \}$$

$$[h, h] \subset h$$

- ideál $\Rightarrow$ podalgebra
- Neabelovské Lieovy grupy: prostá $\Rightarrow$ poloprostá
- Abelovská Lieova grupa: každý vekt. podprostor je ideál
 $\Rightarrow$ ani prostá ani poloprostá

Def: Lieova algebra g je direktním součtem ideálů $g_1, g_2 \subset g \Leftrightarrow$ i) $g_1 + g_2 = g$
ii) $[g_1, g_2] = \{0\}$
značím $g_1 \oplus g_2 = g$

• rozložitelná $\Leftrightarrow \exists$ ideály $g_1, g_2 \subset g$ tak, že $g = g_1 \oplus g_2$
 $\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ \{0\} & \{0\} \end{smallmatrix}$

Def: Centrum Lieovy algebry g je maximální vekt. podprostor $Z(g) \subset g$ tak, že $[Z(g), g] = \{0\}$

Komplexifikace:

- Pro reálnou Lieovu algebru g , definujeme $g_{\mathbb{C}}, [\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}} \mid \dim_{\mathbb{C}} g_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} g$
- Pro komplexní Lieovu algebru g , jednoduše $g_{\mathbb{R}}$ přirádíme reálnou algebru $g_{\mathbb{R}}$ tak, že $g_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\text{-span} \{ \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{báze } g}, ix_1, \dots, ix_n \}$, $\dim_{\mathbb{C}} g = \dim_{\mathbb{R}} g_{\mathbb{R}}$

Věta: Levi Necht g je Lieova algebra, pak existuje právě jedna (až na izomorfismus) poloprostá podalgebra $s \subset g$ tak, že

$$g = s + \mathfrak{k},$$

kde $\mathfrak{k}$ je radikál g

- slabší $g/\mathfrak{k}$ nemá abelovský ideál

Klasifikace Lieových algebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ (1,2,3) a jejich vl.

Reálné: a Komplexní:

- Dim=1:
- $\mathbb{R}$ -span $\{e_1\} = \mathfrak{g}$
 - Antisymetrie Lieovy závorčky $\Rightarrow [e_1, e_1] = 0$

$$\{\omega_1, 0\}$$

nad $\mathbb{C}$ stejné

- Dim=2:
- $\mathbb{R}$ -span $\{e_1, e_2\} = \mathfrak{g}$

- Jediná netriviální Lieova závorčka: $[e_1, e_2]$

i) $[e_1, e_2] = 0 \Rightarrow$ Abelská Lieova algebra $(\omega_2, 0)$

platí: $\alpha_2 = \alpha_1 \oplus \alpha_1$

ii) $[e_1, e_2] \neq 0 \Rightarrow$ lze vybrat (e_1, e_2) tak, že $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}\text{-span}\{e_1\} \Rightarrow [e_1, e_2] = \lambda e_1, \lambda \neq 0$

• nové $x_1^e := \frac{1}{\lambda} e_1 \Rightarrow [x_1, x_1] = x_1$
 $x_2 := e_2$

$(\text{af}(1), [\cdot, \cdot]_{\text{af}(1)}), [x_1, x_2] = x_1$

- není nilpot.
- řeš
- není polprost.
- není prost

nad $\mathbb{C}$ stejné

- Dim=3:
- $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\text{-span}\{e_1, e_2, e_3\}$

- Netriviální závorčky: $[e_1, e_2], [e_1, e_3], [e_2, e_3]$

i) $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0 \Rightarrow$ Abelská Lieova algebra $(\omega_3, 0)$

platí: $\alpha_3 = \alpha_1 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_1$

stejně

ii) $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 1$ (výběrem báze $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}\text{-span}\{e_1\}$) tj.

a) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathbb{Z}(\mathfrak{g})$: $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0 \Rightarrow [e_2, e_3] \neq 0$

$[e_1, e_2] = \lambda e_1$
 $[e_1, e_3] = \beta e_1$
 $[e_2, e_3] = \gamma e_1$

proškrtnutí: $[e_2, e_3] = \gamma e_1$ Proškrtnutí: $x_2^e := \frac{1}{\gamma} e_2 \Rightarrow [x_2, x_3] = x_1$
 $x_1 := e_1$
 $x_3 := e_3$

Algebra $(\mathfrak{h}_1, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}_1}), [x_1, x_2]_{\mathfrak{h}_1} = [x_1, x_3]_{\mathfrak{h}_1} = 0$

$[x_2, x_3]_{\mathfrak{h}_1} = x_1$

- nilpot
- řeš
- není prost
- není polprost.

stejně

b) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \not\subset \mathbb{Z}(\mathfrak{g})$:

• proškrtnutí: $x_2^e := \frac{1}{\lambda} e_2$ $\Rightarrow [x_1, x_2] = x_1$ Bůno $\lambda \neq 0$

• $x_3^e := e_3 - \frac{\beta}{\lambda} e_2 - \frac{\gamma}{\lambda} e_1 \Rightarrow [x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 0$

$\text{af}(1) \oplus \alpha_1$

- není prost
- není polprost.
- je řeš
- není nilpot.

Stejně

iii) $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 2$: (výběrem báze $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}\text{-span}\{e_1, e_2\}$) tj.

$[e_1, e_2] = \lambda e_1 + \beta e_2$

$[e_1, e_3] = \lambda' e_1 + \beta' e_2$

$[e_2, e_3] = \lambda'' e_1 + \beta'' e_2$

- $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ je Lieova algebra dimenze 2 $\Rightarrow$ 2. možnost:

a) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \simeq \alpha_2 \Rightarrow [e_1, e_2] = 0$, Algebra je určena regulární (široká by $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 1$) maticí: 2×2 $A = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ \lambda' & \beta' \end{pmatrix}$

iii) $\Delta_{\mathfrak{g}}$ je invariantní vzhledem k působení regulární

- výběrem báze $\{e_1, e_2, e_3\}$ kanonické formy
- a přeškolením e_3

Umožnění normálního řádu

3, Diagonalizovatelná $\text{nad } \mathbb{C}$

A je komplexní
 $\Rightarrow$ ~~X~~
 matice je buď
 diagonaliz
 nebo ne

1) diagonalizovatelná nad $\mathbb{R}$ 2) Jordanův tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad |\lambda| \in [0,1] \quad \text{pokud } |\lambda| < \arg \lambda \in [0, \pi]$$

(2 reálná reálná v. čísla
 nebo 1 reálné v. čísla
 s geom násob. = 2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 neúplně
 v. čísla
 s geom
 násob. = 1)

$$A = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix} \quad p \in [0, +\infty)$$

(2 reálná komplexní
 čísla, jiný případ
 ne nastane)

neboť z řeší polynom
 $\Rightarrow$ řeší polynom!

ad 3)

A má v. čísla λ_1, λ_2

$$\Rightarrow \exists w \in \mathbb{C}^2 \quad Aw = \lambda w$$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad [x_1, x_2] \text{ báze, } w = x_1 + ix_2 \quad z = \lambda_1(x_1 - ix_2) + \lambda_2(x_1 + ix_2)$$

$$A(x_1 + ix_2) = \lambda(x_1 + ix_2) = (\lambda + i\beta)x_1 + (\lambda + i\beta)ix_2 = (\lambda x_1 - \beta x_2) + i(\beta x_1 + \lambda x_2)$$

$$Ax_1 + iAx_2 = \lambda x_1 - \beta x_2 + i(\beta x_1 + \lambda x_2) \Rightarrow [x_1, e_3] = \lambda x_1 - \beta x_2, [x_2, e_3] = \beta x_1 + \lambda x_2$$

$A = \lambda e_3$ je reálný op.

$$x_3 := \frac{1}{\beta} e_3$$

$$\Rightarrow [x_1, x_3] = \lambda x_1 - 1$$

$$[x_2, x_3] = 1 + \lambda x_2$$

$\lambda \geq 0$ neboť báze $\text{sgn} \lambda = \text{sgn} \beta$,
 když ne zaměníme $\lambda \leftrightarrow \lambda$

- $(g_{3,1}, [-1, \cdot]_{g_{3,1}}), [x_1, x_3] = x_1, [x_2, x_3] = \lambda x_2, \lambda \in [0, 1]$ pro $|\lambda| = 1 \quad \arg \lambda \in [0, \pi]$
- $(g_{3,1}, [-1, \cdot]_{g_{3,1}}), [x_1, x_3] = x_1, [x_2, x_3] = x_1 + x_2$
- $(g_{3,1}, [-1, \cdot]_{g_{3,1}}), [x_1, x_3] = \lambda x_1 + x_2, [x_2, x_3] = x_1 + \lambda x_2, \lambda \in [0, +\infty)$ X

b) $[g, g] \approx \text{af}(1)$:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_1 \\ [e_1, e_3] &= \lambda e_1 + \beta e_2 \quad \beta \neq 0 \vee \tilde{\beta} \neq 0 \\ [e_2, e_3] &= \tilde{\lambda} e_1 + \tilde{\beta} e_2 \end{aligned}$$

stejně

$$[\tilde{\lambda} e_1 + \tilde{\beta} e_2, e_3] + [\tilde{\beta} e_2, e_3]e_1 + [\tilde{\lambda} e_1, e_3]e_2 = \tilde{\lambda} e_1 + \tilde{\beta} e_2 + \tilde{\beta} e_1 + \tilde{\lambda} e_1 = \tilde{\beta} e_2 - \tilde{\beta} e_1 \neq 0$$

$\Rightarrow \tilde{\beta} = 0 \wedge \tilde{\lambda} = 0$
 spor!

ii) $\dim [g, g] = 3$:

výjádříme Lieovu závorku jako $[e_i, e_k] = \epsilon_{ijk} d^{lm} e_m$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi: } [e_1, e_2], e_3 + [e_2, e_3], e_1 + [e_3, e_1], e_2 &= [\lambda^3 e_1 + \lambda^2 e_2, e_3] + [\lambda^2 e_1 + \lambda^3 e_2, e_1] + [\lambda^2 e_1 + \lambda^3 e_3, e_2] \\ &= (\lambda^3 - \lambda^{13}) [e_1, e_3] + (\lambda^{32} - \lambda^{23}) [e_2, e_3] + (\lambda^{21} - \lambda^{12}) [e_1, e_2] \end{aligned}$$

$g = g^2 \Rightarrow ([e_1, e_3], [e_2, e_3], [e_1, e_2])$ je báze $\Rightarrow d$ je symetrická matice

• $\dim g^2 = 3 \Rightarrow d$ je regulární

• změnou báze $e'_k := S^t_k e_j$

$$[e'_i, e'_k] = [S^t_i e_j, S^t_k e_l] = S^t_i S^t_k \epsilon_{jkl} d^{lm} e_m = \epsilon_{i'k'j'l} S^t_i S^t_k S^t_l d^{lm} e_m = \epsilon_{i'k'j'l} S^t_i S^t_k S^t_l d^{lm} S^{-1m} e'_m$$

• zvolím $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ jako pevnou bázi $\Rightarrow [\tilde{e}_i, \tilde{e}_k] = \det S \epsilon_{ijk} d^{lm} \tilde{e}_m$

$$x_j := \frac{1}{\det S} \tilde{e}_j \Rightarrow [x_i, x_k] = \epsilon_{ijk} d^{lm} x_m$$

• Protože $\mathcal{L}$ musí být regulární a signaturu $(2,1,0)$ získám ominusováním báze, jediné relevantní signatury jsou $(3,0,0)$, $(1,2,0)$:

$$\bullet (\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{so}(3)}), [x_j, x_k]_{\mathfrak{so}(3)} = \varepsilon_{jkl} x_l$$

$$\bullet (\mathfrak{so}(2,1), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{so}(2,1)}), [x_1, x_2] = -x_3, [x_1, x_3] = x_2, [x_2, x_3] = x_1$$

$$\cong (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}) = \mathbb{R}\text{-span}\{h, x_+, x_-\} \quad [h, x_{\pm}] = \pm 2x_{\pm}, [x_+, x_-] = h$$

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

volbou: $x_1 = \frac{1}{2}(x_+ - x_-)$ - převodu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
 $x_2 = -\frac{1}{2}(x_+ + x_-)$
 $x_3 = \frac{1}{2}h$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

• Signaturu $(1,2,0)$ lze nad $\mathbb{C}$ převést na $(3,0,0)$ tak, že

$$x_j = e_j$$

$$x_1 = ie_1$$

$$x_2 = ie_2$$

$$x_3 = e_3$$

$$[x_1, x_2] = [ie_1, ie_2] = -e_3 = -x_3$$

$$[x_1, x_3] = i[e_1, e_3] = ie_2 = x_2$$

$$[x_2, x_3] = i[e_2, e_3] = ie_1 = x_1$$

6. Nilpotentní Lieovy algebry, Engelova v. + matic. form

Def: Necht $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra.

• Dolní centrální série: $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}^{k-1}$$

$$\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}] \quad \forall k > 1$$

• Když by se nějaký člen nezeroval, už se nezeroval, žádný násobný řetěz $\Rightarrow n \leq \dim \mathfrak{g} + 1 \quad \forall \mathfrak{g}$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{g}^k$ je ideál v $\mathfrak{g}$

• Algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá nilpotentní $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{g}^n = \{0\}$

• Horní centrální série: $\mathfrak{z}^1 = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$

$$\mathfrak{z}^k = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{z}^{k-1}\} \supset \mathfrak{z}^{k-1} \quad \forall k > 1$$

Věta: Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{z}^n = \mathfrak{z}^{n+j} = \mathfrak{g}$

• Abelská $\Rightarrow$ nilpotentní

Pr: $\Rightarrow$ 0 na $\mathfrak{g}$
• Striktně horní Δ matice (nulový roztok $(\vec{0})$)

• Heisenbergova $\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}\text{-span}\{x_1, x_2, x_3\}, [x_2, x_3] = x_1, \mathfrak{g}^2 = \mathbb{R}\text{-span}\{x_1\}, \mathfrak{g}^3 = \{0\}$

Def: Maximální nilpotentní ideál v Lieově algebře nazýváme nilradikál

• Součet a průnik nilpotentních ideálů je nilpotentní ideál

• Maximální ideál existuje: nasčítá se dokud to jde
s ohledem na inkluzi.

Věta: $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ je morfismus Lieových algebra $\Rightarrow (\phi(\mathfrak{g}))^{(k)} = \phi(\mathfrak{g}^{(k)}) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
 $(\phi(\mathfrak{g}))^k = \phi(\mathfrak{g}^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

• indukci: i) $\phi(\mathfrak{g}^{(0)}) = \phi(\mathfrak{g}) = (\phi(\mathfrak{g}))^{(0)}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \phi(\mathfrak{g}^{(k)}) = \phi([\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]) = [\phi(\mathfrak{g}^{(k-1)}), \phi(\mathfrak{g}^{(k-1)})] = [(\phi(\mathfrak{g}))^{(k-1)}, (\phi(\mathfrak{g}))^{(k-1)}] = (\phi(\mathfrak{g}))^{(k)}$$

$$\text{ii) } \phi(\mathfrak{g}^1) = \phi(\mathfrak{g}) = (\phi(\mathfrak{g}))^1$$

$$\forall k \geq 2 \quad \phi(\mathfrak{g}^k) = \phi([\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g}^{k-1}), \phi(\mathfrak{g})] = [(\phi(\mathfrak{g}))^{k-1}, \phi(\mathfrak{g})] = (\phi(\mathfrak{g}))^k$$

• $\mathfrak{g}$ je nilpotentní $\Rightarrow \text{Ran } \phi$ je nilpotentní

• $\text{Ker } \phi$ je ideál v $\mathfrak{g}$

• $\mathfrak{h}$ je abelský ideál v $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je nilpotentní $\Rightarrow \mathfrak{g}$ je nilpotentní

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \text{ je nilpotentní} \Rightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^n = 0 \Rightarrow \mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{h} \Rightarrow \mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = \{0\} \quad \mathfrak{h} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$$

• $\text{ad } \mathfrak{g} := \{\text{ad } x \mid x \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je nilpotentní $\Leftrightarrow \mathfrak{g}$ je nilpotentní

$$\text{• } \text{ker ad} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{ad } x \equiv [x, \cdot] = 0 \quad \forall \cdot \in \mathfrak{g}\} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$$

$\Leftarrow \text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je morfismus a $\text{Ran ad} = \text{ad } \mathfrak{g} \Rightarrow \text{ad } \mathfrak{g}$ je nilpot

$$\Rightarrow \text{ad } \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/\text{ker ad} \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ je nilpot}$$

ker ad je abel. ideál v $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}/\text{ker ad}$ je nilpot

Def: $A \in \mathfrak{gl}(V)$ nazveme nilpotentní $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0$ $A^n = 0$, $\sigma(A) = 0$!

věta: (Jordanův rozklad)

Nechť $A \in \mathfrak{gl}(V)$, kde V je kon-dim nad $\mathbb{C}$. Pak $\exists_1 (S, N) \in \mathfrak{gl}(V)^2$ splňující

- i) $A = S + N$
- ii) S je diagonalizovatelný a N je nilpotentní
- iii) $[S, N] = 0$

Def: $X \in \mathfrak{g}$ je ad-nilpotentní $\Leftrightarrow \text{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je nilpotentní operátor

• $X \in \mathfrak{gl}(V)$ je nilpot op. $\Rightarrow X$ je ad-nilpotentní vektor v $\mathfrak{gl}(V)$

Věta (Engelova):

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní $\Leftrightarrow$ každý $X \in \mathfrak{g}$ je ad-nilpotentní.

Každá komplexní maticová Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má ve vhodné bázi tran.

$$X = \begin{pmatrix} A_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k(x) \end{pmatrix}, \text{ kde } \forall j \in \hat{k} \quad A_j(x) = \begin{pmatrix} \lambda_j(x) & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j(x) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ blokové diagonální

kde $\lambda_j \in \mathfrak{g}^*$

$\hookrightarrow$ lin. funkcionál na $\mathfrak{g}$

λ_j $\mathfrak{g}$ je zadaná k -tici $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$
a zbytkem v A_j blokách

Def. $A \in \mathfrak{gl}(V)$ nazveme nilpotentní $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ $A^n = 0$, $\sigma(A) = 0$!

Věta: (Jordanův rozklad)

Nechť $A \in \mathfrak{gl}(V)$, kde V je kon-dim nad $\mathbb{C}$. Pak $\exists_1 (S, N) \in \mathfrak{gl}(V)^2$ splňující

- i) $A = S + N$
- ii) S je diagonalizovatelný a N je nilpotentní
- iii) $[S, N] = 0$

Def. $X \in \mathfrak{g}$ je ad-nilpotentní $\Leftrightarrow \text{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je nilpotentní operátor

• $X \in \mathfrak{gl}(V)$ je nilpot op. $\Rightarrow X$ je ad-nilpotentní vektor v $\mathfrak{gl}(V)$

Věta (Engelova):

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní $\Leftrightarrow$ každý $X \in \mathfrak{g}$ je ad-nilpotentní.

Každá komplexní maticová Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má ve vhodné bázi tvar:

$$X = \begin{pmatrix} A_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k(x) \end{pmatrix}, \text{ kde } \forall j \in \hat{k} \quad A_j(x) := \begin{pmatrix} \lambda_j(x) & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j(x) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ blokové diagonální

kde $\lambda_j \in \mathfrak{g}^*$

$\hookrightarrow$ lin. funkcionál na $\mathfrak{g}$

$\hat{k}$ je $\mathfrak{g}$ je zadána k -tici $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$
a zbytkem v A_j blokách

7. Řešitelné Lieovy algebry, Lieova v., vl. derivace.

Def: Necht $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra

• Derivovaná série:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k-1)}$$

$$\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \mathfrak{g}^{(k)} \text{ je ideál v } \mathfrak{g}$$

• když se nějaký člen neredukuje už se neredukuje ani žádný následující $\Rightarrow n \leq \dim \mathfrak{g}$

• Algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá řešitelná $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \quad \mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$

• Abelovská $\Rightarrow$ řešitelná

• $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}, \forall k \geq 2 \quad \mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k+1)}$: Nilpotentní $\Rightarrow$ řešitelná

Pr: • Horní Δ matice

$$[\Delta(n), \Delta(n)] = \Delta_0(n), \quad [\Delta(n), \Delta_0(n)] = \Delta_0(n)$$

$$\bullet \alpha_{\beta}(1), [\alpha_1, \alpha_2] = \alpha_1$$

$$\bullet \alpha_{\beta}(1) \oplus \alpha_1$$

" $\mathbb{R}\text{-Span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ "

$$\bullet \mathfrak{g}_{3,1} + \mathfrak{g}_{3,2}, \mathfrak{g}_{3,1}$$

Def: Maximální řešitelný ideál v Lieově algebře nazýváme radikál

• součet a průnik řešitelných ideálů je řešitelný ideál

• existuje jednoznačně

Věta: (Levi)

Necht $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, pak existuje jednoznačně (až na izomorfismus) podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tak, že

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{K},$$

kde $\mathfrak{K}$ je radikál $\mathfrak{g}$.

• či slabší $\mathfrak{g}/\mathfrak{K}$ nemá abelovský ideál

• $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ je morfismus Lieových algebra $\Rightarrow (\phi(\mathfrak{g}))^{(k)} = \phi(\mathfrak{g}^{(k)}) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

• $\mathfrak{g}$ je řešitelná $\Rightarrow \text{Ran } \phi$ je řešitelná

• $\mathfrak{h}$ je řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je řešitelná $\Rightarrow \mathfrak{g}$ je řešitelná

• $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je řešitelná $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \quad (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(n)} = \{0\} \Leftrightarrow \mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{h} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 \quad \mathfrak{h}^{(k)} = \{0\} \Rightarrow \mathfrak{g}^{(n+k)} = \{0\}$
hjeřeš

• $\text{ad } \mathfrak{g}$ je řešitelná $\Leftrightarrow \mathfrak{g}$ je řešitelná

• $\text{ad} \mathfrak{g} \neq \{0\} \Rightarrow$ řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$

$\Leftarrow \text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je morfismus Lieových algebra a $\text{Ran ad} = \text{ad } \mathfrak{g} \Rightarrow \text{ad } \mathfrak{g}$ je řešitelná

$\Rightarrow \text{ad } \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \Rightarrow \mathfrak{g}$ je řešitelná

Věta: (Lieova)

Necht $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ je podalgebra a V je kondim nad $\mathbb{C}$. Pak

$\mathfrak{g}$ je řešitelná $\Leftrightarrow \exists$ báze V , v níž mají všechny prvky $X \in \mathfrak{g}$ současně horní Δ tvar

Důsledek:

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná $\Leftrightarrow$ její derivovaná algebra $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^2$ je nilpotentní

ii) $\Delta \mathfrak{g}$ je invariantní vzhledem k $\mathfrak{g}$



8. Killingova forma, Cartanova kritéria

Killingova Forma:

rozložitelnost poloprůst. na průst. ideály

Def: Symetrická bilineární forma ω na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ nazýváme

i) invariantní vzhledem k automorfismům

$$\Leftrightarrow \omega(\phi(x), \phi(y)) = \omega(x, y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall \phi \in \text{Aut}(\phi)$$

ii) ad-invariantní

$$\Leftrightarrow \omega([x, y], z) + \omega(y, [x, z]) = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

• invariantní vzhledem k automorfismům $\Rightarrow$ ad-invariantní

• $\forall \phi \in \mathcal{B}$ s $\text{Ad} \phi \in \mathcal{B}(\mathfrak{g})$ je automorfismus $\Rightarrow \forall x, y, z \in \mathfrak{g} \quad \omega(\text{Ad} \phi x, \text{Ad} \phi z) = \omega(y, z)$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\text{Ad} e^{tx} y, \text{Ad} e^{tz} z) - \omega(y, z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\text{Ad} e^{tx} y, \text{Ad} e^{tz} z) - \omega(\text{Ad} e^{tx} y, z) + \omega(\text{Ad} e^{tx} y, z) - \omega(y, z)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\text{Ad} e^{tx} y, \text{Ad} e^{tz} z - z)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\text{Ad} e^{tx} y, z) - \omega(y, z)}{t} = \omega(y, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Ad} e^{tz} z - z}{t}) + \omega(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Ad} e^{tx} y - y}{t}, z) \\ &= \omega(y, [\text{Ad} e^x(x) z]) + \omega(\text{Ad} e^x(x) y, z) = \omega(y, [x, z]) + \omega([x, y], z) \end{aligned}$$

Def: Killingova forma Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ nad tělesem $\mathbb{F}$ je zobrazení

$$K: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$$

$$(x, y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(V) \quad \text{Tr} A := e^j(A e_j)$$

• je bilineární (Lineární staopy)

• Symetrie z c symetrie staopy

• Inv. vzhledem k automorfismům:

$$\forall \phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}): \text{ad}_{\phi(x)} y = [\phi(x), y] = [\phi(x), \phi(\phi^{-1}(y))] = \phi([x, \phi^{-1}(y)]) = (\phi \circ \text{ad}_x \circ \phi^{-1})(y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K(\phi(x), \phi(y)) &= \text{Tr}(\text{ad}_{\phi(x)} \circ \text{ad}_{\phi(y)}) = \text{Tr}(\phi \circ \text{ad}_x \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \text{ad}_y \circ \phi^{-1}) = \text{Tr}(\phi \circ \text{ad}_x \circ \text{ad}_y \circ \phi^{-1}) \\ &\stackrel{\text{Sym staopy}}{=} \text{Tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = K(x, y) \end{aligned}$$

• $\mathfrak{h}$ je ideál v Lieově algebře $\mathfrak{g} \Rightarrow K_{\mathfrak{h}} = K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$

• každé $(e_j)_{j=1}^{\dim \mathfrak{h}}$ doplním na $(e_j)_{j=1}^{\dim \mathfrak{g}}$, $\forall x, y \in \mathfrak{h} \quad \text{ad}_x: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h} \quad \text{ad}_y: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$

$$K(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = \sum_{j=1}^{\dim \mathfrak{g}} e^j(\text{ad}_x(\text{ad}_y e_j)) = \sum_{j=1}^{\dim \mathfrak{g}} e^j(\text{ad}_x(\text{ad}_y e_j)) = \text{Tr}(\text{ad}_x|_{\mathfrak{h}} \circ \text{ad}_y|_{\mathfrak{h}}) = K_{\mathfrak{h}}(x, y)$$

Def: Ortogonální doplněk ideálu $\mathfrak{h}$ vzhledem ke Killingově formě K Lieovy algebry $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{h}^{\perp} := \{x \in \mathfrak{g} \mid K(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{h}\} \quad \bullet \mathfrak{h} \text{ ideál} \Rightarrow \mathfrak{h}^{\perp} \text{ ideál} \quad \forall x \in \mathfrak{h}^{\perp} \quad \forall y \in \mathfrak{g} \quad K([x, y], z) = -K([y, x], z) = K(x, [y, z]) = 0$$

ii) $\Delta_{\mathfrak{g}}$ je invariantní vzhledem k Killingově formě

Twzení: g je nilpotentní $\Rightarrow K \equiv 0$ (opačně neplatí!)

(a body i pro a belastkou)

$$\bullet \text{ ad}_x: g^j \rightarrow g^{j+1} \Rightarrow \text{ad}_x \circ \text{ad}_y: g^j \rightarrow g^{j+2}$$

• g is nilpot $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad g^n = 0 \Rightarrow (\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)^n = 0 \Rightarrow (\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)$ is nilpot. op. $\Rightarrow \sigma(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = \{0\}$
 $\Rightarrow K(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = 0$

Cartanova kritéria:

Def. g je podalgebra $gl(V)$ a $\forall x, y \in g \quad \text{Tr}(x \cdot y) = 0 \Rightarrow g$ je resitelna

Věta (1. Cartanova kritérium)

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná $\Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{g}^{(1)} \cong \mathfrak{g}^2 \quad K(x, y) = 0$

Def: Radikal Killingowy formy: $\text{Rad}K := \mathfrak{g}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \mid K(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$

věta (2. Cartanova kritérium)

Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je poloprosta $\Leftrightarrow \text{rad } \underset{\mathfrak{g}^1}{\mathfrak{K}} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{K}$ je nedegenerovaná

Věta Poloprostý a Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ lze rozložit na direktní součet prostých ideálů $\mathfrak{g}$.

věta: Nenulový ideál v poloprosté Lieově algebře je poloprostý

věta: Všechny derivace poloprosté Lieovy algebry jsou unitární

- obecně platí: $\text{nil}_f \subsetneq \text{rad}_+ K \subsetneq \text{rad}_+ g$

- $\text{rad } K$ je ideál, neboť $\text{rad } K = \mathfrak{g}^1$

- $K_{\text{rad}K} = 0 \Rightarrow$ $\text{rad}K$ je řešitelný ideál v $\mathfrak{g} \Rightarrow \text{rad}K \subseteq \text{rad}\mathfrak{g}$

$g_{3,2}, \lambda \neq \pm i$: $\text{rad } K = \text{span}\{e_1, e_2\}$

$$g_{3,7} \text{ je rešitelna} \Rightarrow \text{rad } g_{3,7} = g_{3,7} \Rightarrow \text{rad } K \neq \text{rad } g_{3,7}$$

$g_{3,1,2} = i$. $\text{nil } g = \text{span}\{e_1, e_2\}$
 $\text{rad } K = g_{3,1,2} \Rightarrow \text{nil } g \not\subseteq \text{rad } K$

• nilg₁ nilpotent $\Rightarrow dK_{nilg} = 0 \Rightarrow K|_{nilg \times nilg} = 0$

$$\forall x \in m/g \quad a \quad \forall y \in g \quad \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{ad}_x^n = 0$$

$(dx dy)^k = dx \wedge dy \wedge dx \wedge dy \dots dx \wedge dy = (dx)^2 dy \wedge dy \dots dx \wedge dy$

$ad_{[x,y]} = ad_x dy - ad_y dx + ad_x N$

$- ad_x ad_{[x,y]} dy \dots ad_x ad_y$

... $\Rightarrow$ nilg cradle

- $(g^2)^{\perp} = \text{rad } g$

$$(g^2)^\perp = \{x \in g \mid \phi(x, [y, z]) = 0 \ \forall y, z \in g\}$$

je rešitelný?

(• Ideály q jsou právě inv. podprostory
ad $\oplus$ Schurova lemma)

- $\mathfrak{g}$ je prosta Lieova algebra $\Rightarrow$ všechny ad-Inv sym bilin
formy jsou násobkem K

8. Cartanova podalgebra, kořeny, klasifikace C-Lie Weyl-Chevalley, Dynkin

Def: Normalizovaná podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: $\text{Norm}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, h] \subset \mathfrak{h}\}$

$\mathfrak{h} \subset \text{Norm}(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{h}$ je ideál $\Rightarrow \text{Norm}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$

~~Cartanova podalgebra~~ (spec. norm.) $\Rightarrow \mathfrak{g}_0$

Podalgebra $\mathfrak{g}_0$ nazýváme Cartanovu podalgebrau $\Leftrightarrow \mathfrak{g}_0$ je nilpotentní

• nad $\mathbb{C}$ je duhá jednoznačně, nad $\mathbb{R}$ obecně ne
• Pro $\mathfrak{g}$ nilpotentní: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$
(Lieův abel)

$\mathfrak{a} \text{ Norm}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$

• Pro $\mathfrak{g}$ nenilpotentní: $\mathfrak{g}_0$ není ideál

Def: Necht $\mathfrak{g}$ je komplexní Lieova algebra, $X \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Zobecněný vlastní podprostor ad_X : $\mathfrak{g}_\lambda(X) = \ker((\text{ad}_X - \lambda \text{id}_{\mathfrak{g}})^n)$

kde $n \in \mathbb{N}$ je libovolné takové, že $\forall \ker(\text{ad}_X - \lambda \text{id}_{\mathfrak{g}}) = (\text{ad}_X - \lambda \text{id}_{\mathfrak{g}})^n$, toto n vždy existuje a splňuje $n \leq \dim \mathfrak{g}$.

• Převod ad_X do Jordanova tvaru: $\exists \text{ basis } \mathfrak{g} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C} \ker(\text{ad}_X - \lambda \text{id}_{\mathfrak{g}}) = \ker(\text{Jordan}(\text{ad}_X) - \lambda \text{id}_{\mathfrak{g}})$

• $\mathfrak{g}_0(X)$ je podalgebra

Vlastnosti: $\lambda \in \mathbb{C}(\text{ad}_X) \Rightarrow \mathfrak{g}_\lambda(X) \neq \{0\}$

• $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}(\text{ad}_X)} \mathfrak{g}_\lambda(X)$, $\dim \mathfrak{g}_\lambda(X) = \chi_\lambda(X)$ (Charakteristický polynom $\chi_\lambda(X) = \det(\text{ad}_X - \lambda \text{id}_{\mathfrak{g}})$)

• $\dim \mathfrak{g}_0(X) \geq 1$, neboť $\text{ad}_X X = [X, X] = 0$ vždy

• $X \in \mathfrak{g}_0(X)$

• $\dim \mathfrak{g}_0(X) = 1$ nulita prvek $X \in \mathfrak{g}$

Def: $X \in \mathfrak{g}$ nazýváme regulární $\Leftrightarrow \dim \mathfrak{g}_0(X) = \min_{Y \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}_0(Y)$

• Regulární prvky mají nejmenší možnou nulitu

Tvrzení: $\forall X \in \mathfrak{g} [\mathfrak{g}_\lambda(X), \mathfrak{g}_\mu(X)] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(X)$

Tvrzení: $X \in \mathfrak{g}$ je regulární $\Rightarrow \mathfrak{g}_0(X)$ je nilpotentní podalgebra v $\mathfrak{g}$

$\Downarrow$ Engelův větvěcí lemma

Tvrzení: Existuje báze $\mathfrak{g}$ a funkcionály $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tak, že $\forall X \in \mathfrak{g}_0(X)$

$\text{ad}_X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$

$\text{ad}(\mathfrak{g}_0)$ je

nilpotentní

matice C-Lieova algebra

$\text{ad}_X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$ (rozděl)

Věta: Necht $\mathfrak{g}$ je komplexní Lieova algebra a $X \in \mathfrak{g}$ regulární prvek. Pak $\mathfrak{g}_0(X)$ je Cartanova podalgebra. Naopak necht $\mathfrak{g}_0$ je Cartanova podalgebra pak $\exists X \in \mathfrak{g}$ regulární tak, že $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(X)$.

Def: • Nenulová $\lambda \in \mathfrak{g}_0^* \neq 0$ (rozkladu) se nazývají **Kořeny** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.
Množinu všech kořenů značíme $\Delta \subset \mathfrak{g}_0^*$
• Zdáší na výběru Cartanovy podalgebry

• Podprostor $\mathfrak{g}_\lambda$ (odpovídající danému bloku) se nazývá **kořenový podprostor** příslušející λ
• Vektor $y \in \mathfrak{g}_\lambda$ nazýváme **kořenový vektor**

↳ Společně zobec. podprostory
Pro všechny prvky $\mathfrak{g}_0$
• Pro daný prvek $\mathfrak{g}_0$ najdu přísluš. λ
v. číslo za násobení λ

$\mathbb{C}$ -Lieova algebra:

- $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(x) \subset \mathfrak{g}$, x je regul., $\forall H \in \mathfrak{g}_0, \forall \lambda \in \Delta, \forall y \in \mathfrak{g}_\lambda : K(H, y) = 0$
- $\mathbb{C}$ -Lieova poloprostá algebra:
- $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}, H \in \mathfrak{g}_0 : \forall \lambda \in \Delta \quad \lambda(H) = 0 \Rightarrow H = 0$

Věta (Cartanova podalgebra poloprosté $\mathbb{C}$ -Lieovy algebry)

Podalgebra $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ poloprosté $\mathbb{C}$ -Lieovy algebry je Cartanov podalgebrou algebry $\mathfrak{g}$
 $\Leftrightarrow$ je maximální abelovskou podalgebrou takovou, že $\forall H \in \mathfrak{g}_0$ je ad_H diagonaliz. $\mathbb{C}$

Poloprostá $\mathbb{C}$ -Lieova algebra:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \left(\sum_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda \right)$$

$$\lambda \in \Delta \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \wedge \mathfrak{g}_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker(\text{ad}_H - \lambda(H) \text{id}_{\mathfrak{g}}) \neq 0$$

bez možnosti
neboť H jsou diagon. zavede

$$\forall H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0 \quad [H_1, H_2] = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{g}_0^2 = 0$$

$$\forall \lambda \in \Delta, \forall H \in \mathfrak{g}_0 \quad \text{ad}_H : \mathfrak{g}_\lambda \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda, \text{ad}_H = \lambda(H) \text{id}_{\mathfrak{g}_\lambda}$$

$$\forall \lambda \in \Delta, \mu \in \Delta : \text{ad}_{\lambda+\mu} : \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \Rightarrow \forall \lambda \in \Delta, \forall x \in \mathfrak{g}_\lambda \quad \text{ad}_x \text{ je } X \text{ ad-ní. pob.}$$

↳ Sčítáním, až se dostaneme mimo $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\lambda$

$$\forall \lambda \in \Delta \quad \mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda$$

Struktura kořenového systému:

$$\forall \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\} : \alpha + \beta \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$$

$$\mathfrak{g}_0 \text{ je nedegenerovaná a } \forall \lambda \in \Delta \exists H_\lambda \in \mathfrak{g}_0 \text{ tak, že } \forall H \in \mathfrak{g}_0 \quad \lambda(H) = K(H, H_\lambda)$$

$$\lambda \in \Delta \Rightarrow -\lambda \in \Delta \wedge \forall X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda \text{ a } \forall X_{-\lambda} \in \mathfrak{g}_{-\lambda} : [X_\lambda, X_{-\lambda}] = K(X_\lambda, X_{-\lambda}) H_\lambda$$

$$\forall \lambda \in \Delta \quad \lambda(H_\lambda) = K(H_\lambda, H_\lambda) \neq 0$$

Def: Pro $\lambda \in \Delta$ definujeme:

$$T_\lambda := \frac{2}{K(H_\lambda, H_\lambda)} H_\lambda \equiv \frac{2}{\lambda(H_\lambda)} H_\lambda \in \mathfrak{g}_0, \quad \alpha_{\beta, \lambda} := \beta(T_\lambda) \equiv \frac{2 K(H_\beta, H_\lambda)}{K(H_\lambda, H_\lambda)}$$

$$\text{Pro dané } \lambda \in \Delta, \text{ zvolím } X_{\pm \lambda} \in \mathfrak{g}_{\pm \lambda} \text{ tak, že } K(X_\lambda, X_{-\lambda}) = \frac{2}{\lambda(H_\lambda)} = \frac{2}{K(H_\lambda, H_\lambda)}$$

$$\text{Pak: } [X_\lambda, X_{-\lambda}] = K(X_\lambda, X_{-\lambda}) H_\lambda = \frac{2}{K(H_\lambda, H_\lambda)} H_\lambda = T_\lambda$$

$$[T_\lambda, X_{\pm \lambda}] = \frac{2}{K(H_\lambda, H_\lambda)} [H_\lambda, X_{\pm \lambda}] = \frac{2}{K(H_\lambda, H_\lambda)} (\pm \lambda(H_\lambda) X_{\pm \lambda}) = \pm 2 X_{\pm \lambda}$$

TO JSOU PŘESNĚ KOMUTAČNÍ RELACE $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ v bázi $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Pro každou dvojici $(\alpha, -\alpha)$, kde $\alpha \in \Delta$ má $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Věta (Konečně rozměrné reprezentace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$)

Nechť V je kon-dim nad $\mathbb{C}$ a nechť $\exists T, X_\pm \in \mathfrak{gl}(V)$ tak, že $[T, X_\pm] = \pm 2 X_\pm$ a $[X_+, X_-] = T$ a že (T, X_+, X_-) je ireduc. soubor na V . Pak existuje báze $\{e_j\}_{j=0}^{\dim V - 1}$ tak, že

$$\forall j \in \{0, \dots, \dim V - 1\} : T e_j = (r - 2j) e_j, X_- e_j = e_{j-1}, X_+ e_j = j(r - j + 1) e_{j+1}$$

Vlastnosti koreňů:

$$\bullet \forall \alpha, \beta \in \Delta \quad \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \forall \alpha \in \Delta \quad \dim g_\alpha = 1$$

$$\bullet \forall \alpha \in \Delta \quad \exists k \in \mathbb{C} \quad k\alpha \in \Delta, \quad k = -1$$

$$\bullet \forall \alpha, \beta \in \Delta \quad \alpha + \beta \neq 0 \quad [g_\alpha, g_\beta] = g_{\alpha+\beta}$$

$$\bullet \forall \alpha, \beta \in \Delta \quad \alpha \neq \beta \neq 0 \quad \wedge \quad \beta - \epsilon \alpha, \beta - 2\epsilon \alpha, \dots, \beta - \alpha_{\beta \alpha} \alpha \in \Delta$$

$$\epsilon := \operatorname{sgn} \alpha_{\beta \alpha}$$

Věta: (Weyl-Chevalley normal form)

Nechť g je poloprostá $\mathfrak{O}$ -Lieova algebra. Pak:

$$i) \quad g = g_0 + \sum_{\alpha \in \Delta} \operatorname{Span}\{E_\alpha\}, \quad g_\alpha = \operatorname{Span}\{E_\alpha\} \quad \forall \alpha \in \Delta$$

$$ii) \quad \forall H \in g_0 \quad [H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$$

$$iii) \quad \forall \alpha \in \Delta \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] \in g_0 \setminus \{0\}$$

$$iv) \quad \forall \alpha, \beta \in \Delta \quad \alpha + \beta \neq 0 \quad [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$$

pokud $\alpha + \beta \in \Delta$, pak $N_{\alpha\beta} \neq 0$

Def: $\mathfrak{h} := \mathbb{R} - \operatorname{Span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}, \quad \mathfrak{h}^* := \mathbb{R} - \operatorname{Span}\{\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$

$$\bullet \forall \alpha, \beta \in \Delta \quad \langle \alpha, \beta \rangle := K(H_\alpha, H_\beta)$$

$\bullet \langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na $\mathfrak{h}^*$

$$\bullet \mathfrak{h}_\mathbb{C} = g_0 + i g_0^* = \mathbb{C} - \operatorname{Span}\{\alpha\}, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{C}} g_0$$

Def: Koreňový diagram je vyjádření koreňů $\alpha \in \Delta$ v $\mathfrak{h}^*$ prostoru $(\mathfrak{h}^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Def: Zrcadlení podle nadroviny kolmé ke koreňu $\alpha \in \Delta$ je zobrazení $S_\alpha \in GL(\mathfrak{h}^*)$ definované:

$$\forall \lambda \in \mathfrak{h}^* \quad S_\alpha(\lambda) := \lambda - 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha = \lambda - \frac{2\lambda(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} \alpha = \frac{1 - \lambda(T_\alpha)}{1 - \lambda(T_\alpha)} \alpha$$

$$\bullet \forall \alpha \in \Delta \quad S_\alpha^2 = \operatorname{id}_{\mathfrak{h}^*} \quad \bullet \forall \alpha, \beta \in \Delta \quad S_\alpha(\beta) = \beta - \beta(T_\alpha) \alpha = \beta - \alpha_{\beta \alpha} \alpha \quad \alpha \in \Delta \Rightarrow S_\alpha: \Delta \rightarrow \Delta$$

Def: Weylova grupa W koreňového systému Δ : grupa lin. op. na $\mathfrak{h}^*$ generovaná množinou $\{S_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$

$\bullet$ prvky Weylovy grupy $w \in W, w: \Delta \rightarrow \Delta \Rightarrow$ Weylova grupa $\cong$ podgrupa grupy permutací Δ
 $\Rightarrow$ Weylova grupa je konečná.

$$\bullet \forall \alpha \in \Delta, \forall \mu \in \mathfrak{h}^* \quad \langle S_\alpha \lambda, S_\alpha \mu \rangle = \langle \lambda, \mu \rangle - 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \langle \alpha, \mu \rangle - 2 \frac{\langle \lambda, \mu \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \langle \alpha, \alpha \rangle + 4 \frac{\langle \alpha, \lambda \rangle \langle \alpha, \mu \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle^2} \langle \alpha, \alpha \rangle$$

$$= \langle \lambda, \mu \rangle \Rightarrow W \text{ je podgrupa } O(\mathfrak{h}^*)$$

Def: Množina kladných, resp. záporných, koreňů: $\Delta^\pm := \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(H_0) \gtrless 0\}$,

kde $H_0 \in \mathfrak{h}$ je libovolné tak, že $\forall \alpha \in \Delta \quad \alpha(H_0) \neq 0$ (existuje) stačí volit $H_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha H_\alpha$

$$c_\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\forall \alpha \in \Delta$$

$$c_\alpha \neq 0$$

$$\bullet (\alpha \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta) \Rightarrow \#\Delta^+ = \#\Delta^- \quad \bullet \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha(H_0) \geq \beta(H_0)$$

$$\bullet \alpha, \beta \in \Delta^+ \Rightarrow \alpha + \beta \in \Delta^+$$

$\bullet$ $\Delta_\mathbb{Q}$ je invariantní vzhledem k permutacím

$$\Delta^P := \{ \alpha \in \Delta^+ \mid \forall \beta, \gamma \in \Delta^+ \quad \beta + \gamma \neq \alpha \}$$

VLASTNOSTI: $\forall \alpha \in \Delta^+ \quad \alpha = \sum_{\beta \in \Delta^P} c_\beta \beta, \quad c_\beta \in \mathbb{N}_0$

- $\forall \alpha, \beta \in \Delta^P, \alpha \neq \beta \quad \langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ (Tupý, úhel mezi prostými koreny)
- $\mathfrak{g}_0^* = 0\text{-Span} \Delta^P, \quad \mathfrak{h}^* = \mathbb{R}\text{-Span} \Delta^P$

KONSTRUKCE KOŘENOVÉHO DIAGRAMU: i) nakreslíme Δ^P

ii) Aplikujeme $\{S_\alpha \mid \alpha \in \Delta^P\}$

iii) iterujeme (zrcadlení i vzhledem k novým korenům)

$$\Rightarrow \forall \alpha \in \Delta \quad \exists \beta \in \Delta^P \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$$

$$\Rightarrow \Delta$$

Def: Cartanovská matice $A \in GL(\#\Delta^P, \mathbb{R})$: $A_{jk} := a_{jk} = 2 \frac{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}$

- VLASTNOSTI:**
- $a_{jj} = 2$
 - $a_{jk} \leq 0, \quad j \neq k$
 - $a_{jk} a_{kj} = 4 \frac{|\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle|^2}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle \langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = 4 \cos^2(\angle \alpha_j, \alpha_k) \in \{0, 1, 2, 3\}$
 $\angle < 1$ protože α_j, α_k jsou LN (Cauchy-Schwarz)

$$\Rightarrow \cos(\angle \alpha_j, \alpha_k) \in \left\{ 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \Rightarrow \angle \alpha_j, \alpha_k \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

$0^\circ \quad 120^\circ \quad 135^\circ \quad 150^\circ$

Korenové diagramy $\Rightarrow$ klasifikace poloprostých $\mathfrak{g}$ -Lieových algeb (Cartan)

Def: Dynkinův diagram korenového systému $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$
 (1:1 s Cartanovskými maticemi)

- Vrcholy $\equiv$ proste koreny: $\Delta^P = \{\alpha_j\}_{j=1}^{\dim \mathfrak{g}_0}$
- Vrcholy α_j a α_k jsou spojeny hranami (k. max 3 hrany)

$$a_{jk} a_{kj} = 1 \Rightarrow a_{jk} = -1 = a_{kj} \Rightarrow \|\alpha_j\| = \|\alpha_k\|$$

$$1 < a_{jk} a_{kj} \leq 3, \text{ Bůho } a_{jk} = -1 \Rightarrow 1 < \frac{a_{jk}}{a_{kj}} = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = \frac{\|\alpha_j\|^2}{\|\alpha_k\|^2} \Rightarrow \|\alpha_k\|^2 = -a_{kj} \|\alpha_j\|^2$$

$\Rightarrow \|\alpha_k\| = \sqrt{-a_{kj}} \|\alpha_j\|$ (3 hrany)

Pokud jsou vrcholy spojeny více než 1 hranou, kreslí se šipka k delšímu z nich

Lze-li $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset, \forall \alpha \in \Delta_1, \forall \beta \in \Delta_2 \quad \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$

Věta: Souvislé komponenty Dynkinova diagramu odpovídají prostým idealům
 $\Rightarrow$ Pro klasifikaci poloprostých lze klasifikovat proste

Graf je přípustný $\Leftrightarrow \langle x, x \rangle := \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{j,k} x_j x_k a_{jk}$ je S.S. na $\mathbb{R}^n$
 $\hookrightarrow$ počet hran spojující e_j s e_k , kde $x = x_j e_j$

Přípustné grafy:

- neobsahují smyčky
- v každém vrcholu se setkají max 3 hrany
- nahradíme-li dvojici vrcholů a jejich spojnicí vrcholem, vznikne přípustný graf

$\mathfrak{g}_0 + (\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha) \subset \mathfrak{g}$ je rešitelná podalgebra (Borelová)

$\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ je nilpotentní

Věta: (Cartanova o klasifikaci prostých $\mathbb{C}$ -Lieových algeber)

Nechť $\mathfrak{g}$ je prostá $\mathbb{C}$ -Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ systém kořenů a $\Delta^+ \subset \Delta$ prosté kořeny. Pak má její Dynkinův diagram jednu z následujících podob:

I) Klasické série algeber

$$A_l: \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad l-1 \quad l \end{array}$$

$$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}), l \geq 1$$

$$B_l: \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad l-2 \quad l-1 \quad l \end{array}$$

$$\mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C}), l \geq 1$$

$$C_l: \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad l-2 \quad l-1 \quad l \end{array}$$

$$\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}), l \geq 1$$

$$D_l: \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad l-3 \quad l-1 \quad l \end{array}$$

$$\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}), l \geq 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

II) Výjimečné algebry

$$E_6: \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7: \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \end{array}$$

$$E_8: \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \end{array}$$

$$F_4: \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2: \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\alpha_j\| = \sqrt{\frac{a_{jk}}{a_{jj}}} \|\alpha_j\|$$

9. Konečné rep. prostých $\mathbb{C}$ -Lie, $\mathfrak{su}(3)$ a el. část. váhy

Věta: (Weylova)

Konečně-rozměrné reprezentace poloprosté $\mathbb{C}$ -Lieovy algebry je přech redueibní

Necht $\mathfrak{g}$ je rep $\mathfrak{g}$ na V kon-dim nad $\mathbb{C}$

$\mathfrak{g}_0$ je abelovská podalgebra $\Rightarrow \mathcal{G}(\mathfrak{g}_0) \subset \mathcal{G}(V)$ je podalgebra komutujících operátorů na V

pro $\alpha \in \Delta$ je $\mathbb{C}$ -span $\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha\}$ je podalgebra $\mathfrak{g}$ izomorfní $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$\Rightarrow \mathbb{C}$ -span $\{\mathcal{G}(X_\alpha), \mathcal{G}(X_{-\alpha}), \mathcal{G}(T_\alpha)\}$ je reprezentace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na $V \Rightarrow$ Přech redueibní

$\Rightarrow$ Máme $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ tak, že $\mathbb{C}$ -span $\{\mathcal{G}(X_\alpha), \mathcal{G}(X_{-\alpha}), \mathcal{G}(T_\alpha)\}$ je ireduceibní rep. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na V_λ

$\Rightarrow$ Pak $\mathcal{G}(T_\alpha)$ působí diagonálně $\Rightarrow \mathcal{G}(T_\alpha)$ je diagonalizovatelný

$\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}$ -span $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \Rightarrow \mathbb{C}$ -span $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \Rightarrow \mathcal{G}(\mathfrak{g}_0)$ je vekt. podprostor $\mathcal{G}(V)$ komutujících diagonalizovat. op.

$\Rightarrow V$ lze rozložit na společné v. podprostory $\mathcal{G}(\mathfrak{g}_0)$:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}_0^*} V_\lambda \quad V_\lambda := \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \text{Ker}(\mathcal{G}(H) - \lambda(H) \text{id}_V)$$

Def: Necht $\mathfrak{g}$ je poloprostá $\mathbb{C}$ -Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0, \Delta$ a $\mathcal{G}$ její kon-dim reprezentace na V nad $\mathbb{C}$.

• Váha reprezentace $\mathcal{G}$: každé $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ takové, že $V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \text{Ker}(\mathcal{G}(H) - \lambda(H) \text{id}_V) \neq \{0\}$

• Příslušný V_λ : váhový podprostor

• Váhový diagram reprezentace $\mathcal{G}$: všechny váhy vyjádřené v $(h^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

• Váhová mřížka reprezentace $\mathcal{G}$: $\gamma := \{\lambda \in h^* \mid \lambda(T_\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta\} \subset h^*$

• Kořeny $\equiv$ nenulové váhy αd , $V_0 = \mathfrak{g}_0$ pro αd

$\mathcal{G}(\mathcal{G}(T_\alpha)) \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \lambda(T_\alpha) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in h^*$

$\nexists \lambda_1, \lambda_2 \in \gamma, \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \quad m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 \in \gamma$, Báze mřížky $\equiv$ báze γ vůči $\mathbb{Z}$ in komb

Věta: Necht $\mathcal{G}$ je rep. poloprosté $\mathbb{C}$ -Lieovy algebry na kon-dim V nad $\mathbb{C}$.

Necht $\Delta_{\mathcal{G}}$ je množina všech jejích vah. Pak

i) $\Delta_{\mathcal{G}} \subset \gamma$

ii) $V = \bigoplus_{\lambda \in \Delta_{\mathcal{G}}} V_\lambda$

iii) $\Delta_{\mathcal{G}}$ je invariantní vzhledem k působení Weylové grupy přísluš Δ , tj. $s_\alpha: \Delta_{\mathcal{G}} \rightarrow \Delta_{\mathcal{G}}$

iv) $\{\lambda, \lambda - \varepsilon \alpha, \dots, \lambda - \lambda(T_\alpha) \alpha\} \subset \Delta_{\mathcal{G}}, \varepsilon := \text{sgn } \lambda(T_\alpha)$

v) $\dim V_\lambda = \dim V_{s_\alpha(\lambda)}$

- Def:**
- $\lambda \in \Delta$, $\dim V_\lambda \dots$ násobnost váhy λ
 - váha $\lambda \in \Delta$ je dominantní $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta^+ \quad \lambda(\alpha) \geq 0$ (stejně: dominantní prvky)
 Máme k dispozici $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$
 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$
 (stejně: dominantní prvky)
 váhové mřížky)
 - váha $\lambda \in \Delta$ je nejvyšší $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta^+ \quad \lambda + \alpha$ není vahou reprezentace ρ
 $\hookrightarrow$ každá reprezentace má alespoň jednu nejvyšší váhu

Nechť $\rho: g \rightarrow gl(V)$ je reprezentace a λ je její nejvyšší váha. Pro libovolné $v \in V, v \neq 0$ zavádíme:

$$R_\lambda := \text{span} \{ \rho(x_1) \dots \rho(x_k) v \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x_i \in g \}$$

$$R_\lambda \subset V, \rho(x) R_\lambda \subset R_\lambda \quad \forall x \in g$$

Věta: R_λ je invariantní podprostor reprezentace ρ . $\rho|_{R_\lambda} : g \rightarrow gl(R_\lambda)$
 $\rho \neq 0$ je ireducibilní
 $\Rightarrow R_\lambda = V$
 je ireducibilní
 $\dim R_\lambda \cap \dim V_\lambda = 1$, tj. $R_\lambda \cap V_\lambda = \text{span} \{v\}$

Věta: Nechtě ρ, ρ' jsou ireducibilní reprezentace na V, V' se stejnou nejvyšší vahou. Pak $\exists T: V \rightarrow V'$ automorfismus v.p. tak, že

$$T \circ \rho(x) = \rho'(x) \circ T \quad \forall x \in g$$

Důsledek: Ireducibilní reprezentace je plně určena svou nejvyšší vahou

Def: g je poloprostá $\mathbb{C}$ -Lieova algebra, $\rho_0, \Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-, \Delta^+ = \{ \alpha_j \}_{j=1}^l$. Duální bázi k bázi $\{T_{\alpha_j}\}_{j=1}^l$ nazýváme **Fundamentální váhy** Lieovy algebry g .
 Jim příslušející reprezentace nazýváme **Fundamentální reprezentace**.

- Fundamentální reprezentace existuje
- Fund. váhy lze určit z Cartanovy matice A
 $\lambda_j = A^{-1} \cdot \alpha_j$
 $\alpha_j(T_{\alpha_k}) = \frac{1}{2} \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle = a_{jk} = a_{js} \lambda_s(T_{\alpha_k})$

Věta: Každé $\dim g_0$ -tici celých čísel $m_1, \dots, m_l$ existuje právě jedna ireducibilní reprezentace poloprosté $\mathbb{C}$ -Lieovy algebry jejíž nejvyšší váha je $\lambda := \sum_{j=1}^l m_j \lambda_j$
 $\hookrightarrow$ Fund. váhy

GRUPA $SU(3)$:

$\hookrightarrow$ jednoduchá, souvislá, kompaktní

- $\dim SU(3) = 8$
- $\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Gell-Mann, Zweig: Nukleony jsou složeny z hypotetických (později dokazovaných) částic = kvarků

Báze $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$: Gell-Mannovy matice:

$$I_3 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_+ := E_{12} = E_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

izospin

$$Y := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad U_+ := E_{23} = E_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hypernáboj $Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$

$$V_+ := [I_+, U_+] = E_{13} = E_{\alpha+\beta}$$

$$I_- := (I_+)^T = E_{21} \quad V_- := (V_+)^T = E_{31}$$

$$U_- := (U_+)^T = E_{32} \quad (\text{Báze } \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) : \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))$$

• $\text{ad}: \text{su}(3)_c \rightarrow \text{gl}(\text{su}(3)_c)$ 8 - rozměrná



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

• Definice $\mathbf{3}: \text{su}(3)_c \rightarrow \text{gl}(C^3)$ 3-rozměrná (Fundamentální)

$$|\mathbf{u}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{d}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{s}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ baryonové číslo $B = \frac{1}{3}$
kvarky

8 různých reprezentací:

$$\bar{\mathbf{3}}: g \rightarrow \text{gl}(V^*) \quad \forall x \in g \quad \forall \lambda \in V^* \quad (\bar{\mathbf{3}}(x)\lambda)v := -\lambda(g(x)v) \quad \forall v \in V$$

• Antifundamentální $\bar{\mathbf{3}}: \text{su}(3)_c \rightarrow \text{gl}(C^{3*})$

Δ antikvarky

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$|\bar{\mathbf{u}}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$|\bar{\mathbf{d}}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$|\bar{\mathbf{s}}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

• Kvarky ani antikvarky nemají celočíselný el. náboj: $(Q = I_3 + \frac{1}{2}Y)$ i v přírodě se vyskytují pouze částice s celočíselným el. nábojem: $\begin{matrix} S+B \\ \hookrightarrow \text{podivnost} \end{matrix}$

i) Vázané stavy kvark, antikvarky $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ $\rightarrow$ triviální $(B=0)$

váhy se při tenz. součinu sčítají



8: kaony $K^-, K^+, K^0, \bar{K}^0$ **1:** $\bar{\eta}$

piony π^+, π^-

(v nule): π^0, η

ii) vázané stavy trojice kvarků $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{40} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$

$\hookrightarrow$ proton, neutron

• už neplatí, dnes je 6 kvarků

• 60. léta

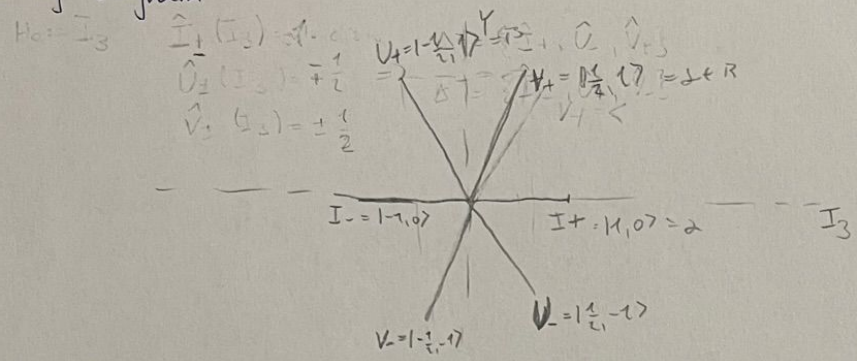
• nízkenergetická limita (pokud se v interakcích nevyskytují těžké kvarky)

- $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}\text{-span}\{I_3, Y\}$, Skalární součin: $K(I_3, Y) = 0$
 $K(I_3, I_3) = \frac{C}{2}$
 $K(Y, Y) = \frac{2C}{3}, C > 0$

$$\frac{\|I_3\|}{\|Y\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Koroňové a váhové vektory budeme znát v. číslo op. I_3, Y : $I_3|\lambda, \mu\rangle = \lambda|\lambda, \mu\rangle$
 $Y|\lambda, \mu\rangle = \mu|\lambda, \mu\rangle$

• Koroňový diagram



- Váhový diagram ad: $\oplus 2 \times$ bod v počátku za prvky Cartanovy podalgebry
 $\mathfrak{ad}: \mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}}) \Rightarrow$ ~~strana~~ ad je 8-rozměrná

- Definující reprezentace $\rho: \mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$, 3-rozměrná (fundamentální)

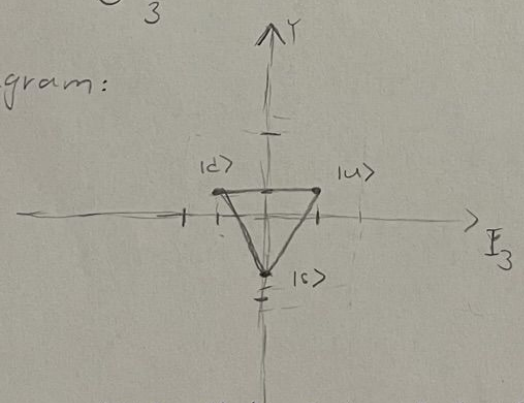
$$\Lambda_{\rho} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \quad \lambda_1(I_3) = \frac{1}{2} \quad \lambda_2(I_3) = -\frac{1}{2} \quad \lambda_3(I_3) = 0$$

$$\lambda_1(Y) = \frac{1}{3} \quad \lambda_2(Y) = \frac{1}{3} \quad \lambda_3(Y) = -\frac{2}{3}$$

$$V_{\lambda_1} = \mathbb{C}\text{-span}\{|u\rangle\} \xrightarrow{\text{horní}}, V_{\lambda_2} = \mathbb{C}\text{-span}\{|d\rangle\} \xrightarrow{\text{dolní}}, V_{\lambda_3} = \mathbb{C}\text{-span}\{|s\rangle\} \xrightarrow{\text{podivný}}$$

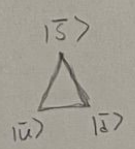
Baryonové číslo: $B = \frac{1}{3}$

Váhový diagram:



- Antifundamentální reprezentace: sdružená k té druhé: $\bar{\rho}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$

$\Rightarrow$ antikvarky, Baryonové číslo $B = \frac{1}{3}$



- Z kvarků musí být vytvořeny částice s celočíslem $\frac{1}{2}$ nábojem (jinak se v přírodě netykají)
možnosti: vázané stavy kvark-antikvark

- $3 \otimes \bar{3} \Rightarrow$ koroňový diagram

• rozkládá se do ireducibilních reprezentací: $8 \oplus 1$

- Vázané stavy trojice kvarků $3 \otimes 3 \otimes 3$ $B=1$
 $= 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$

Mezonový outlet (piony, kaony)
 $\pi^+, \pi^0, \pi^-, K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-, \bar{K}^+$
 $B=0$
 $\xrightarrow{\text{kvarky}}$
 $\xrightarrow{\text{antikvarky}}$