Fokin' Geometrie

Mr. Šnobl & Heinrich der Vysoký

23. března 2022

Geometrické metody fyziky 1

Libor Šnobl[1]

10. května 2021

[1]Rukopis přednášky do LaTeXu přepsal student Jaroslav Kysela, upozorněním na chyby a překlepy přispěla řada dalších studentů. Tento text dosud neobsahuje texty cvičení, které jsou nedílnou součástí kurzu a objasňují motivaci pojmů zde zavedených a jejich využití ve fyzice.

Obsah

1 Diferencovatelné variety **3**
1.1 Cvičení 5

2 Tečné vektory k varietě **7**
2.1 Zavedení tečného vektoru pomocí křivek 7
2.2 Zavedení tečného vektoru pomocí zobrazení 8
2.3 Cvičení 10

3 Tečný bundle, vektorová pole, integrální křivky **12**
3.1 Cvičení 15

4 Abstraktnější pohled na vektorová pole **18**
4.1 Cvičení 21

5 Diferenciální formy **23**
5.1 Cvičení 26

6 Operace s diferenciálními formami **28**
6.1 Cvičení 31

7 Zobrazení indukovaná zobrazením variet, podvariety **34**
7.1 Tečné a kotečné zobrazení 34
7.2 Indukovaná zobrazení řezů fibrovaných prostorů 35
7.3 Podvariety 36
7.4 Cvičení 37

8 Lieova derivace **39**
8.1 Vlastnosti Lieovy derivace 40
8.2 Cvičení 43

9 Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky **44**
9.1 Cvičení 47

10 Integrace forem **50**
10.1 Cvičení 53

11 Integrace na varietách s hranicí, Stokesova věta **55**
11.1 Poincaréovo lemma 58
11.2 Cvičení 60

12 Variety s dodatečnou strukturou **62**
12.1 Cvičení 66

Kapitola 1

Diferencovatelné variety

Geometrickými vlastnostmi matematických struktur se zabývají dvě základní oblasti matematiky:

- **Algebraická geometrie** zkoumá útvary v daném prostoru ($\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{CP}^n, \dots$) zadané jako množina řešení (systémů) polynomiálních rovnic, tzv. algebraické variety (angl. variety), které mohou obsahovat různé typy singularit, viz např. $x \cdot y = 0$ v $\mathbb{R}^2[x, y]$. Jedná se o velice abstraktní oblast matematiky.
- **Diferenciální geometrie**, neboli globální analýza, zkoumá topologické prostory, které jsou lokálně ztotožnitelné s $\mathbb{R}^n$, ze kterého se na ně přenáší pojmy známé z analýzy. Podstatné jsou vnitřní vlastnosti a jejich popis v různých souřadnicích, nikoliv způsob vnoření do nějakého vektorového či afinního prostoru. Základním pojmem je tzv. diferencovatelná (neboli hladká) varieta (angl. manifold).

My se budeme věnovat základním pojmům druhé jmenované. Nejprve uveďme pár definic:

Definice 1.1. Topologický prostor (M, τ) je **Hausdorffův** právě tehdy, když pro každá dvě různá $x, y \in M$ navzájem různá existují $U = U^\circ \ni x$, $V = V^\circ \ni y$ taková, že $U \cap V = \emptyset$.

Definice 1.2. Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \tau, \{V_\beta\}_{\beta \in J} \in \tau$ jsou dvě otevřená pokrytí topologického prostoru (M, τ), tj. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$, pak $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$ je **zjemněním** $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ právě tehdy, když pro každé $\beta \in J$ existuje $\alpha \in I$ takové, že $V_\beta \subset U_\alpha$.

Definice 1.3. Otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ topologického prostoru (M, τ) je **lokálně konečné** právě tehdy, když pro každý bod $x \in M$ existuje konečná podmnožina $J \subset I$ taková, že $\forall \alpha \in I \setminus J$ platí $x \notin U_\alpha$.

Definice 1.4. Topologický prostor (M, τ) je **parakompaktní** právě tehdy, když ke každému otevřenému pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ existuje lokálně konečné zjemnění.

Definice 1.5. Nechť (M, τ) je topologický prostor, $U = U^\circ \subset M$, $V = V^\circ \subset \mathbb{R}^n$. Pak homeomorfizmus $\varphi : U \to V$ nazýváme **mapa** či **lokální souřadnice** na M. U nazýváme **souřadnicové okolí** v M.

Definice 1.6. Otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ topologického prostoru (M, τ) vybavené mapami $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme **atlas** na M a n nazýváme **dimenzí atlasu**. Atlas obvykle značíme $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. (Připomeňme, že $\varphi_\alpha(U_\alpha) = (\varphi_\alpha(U_\alpha))^\circ \subset \mathbb{R}^n$.)

Poznamenejme, že existence atlasu výrazně omezuje možnou strukturu uvažovaného topologického prostoru, neboť znamená, že topologický prostor je lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^n$. Dimenzí topologického prostoru vybaveného atlasem rozumíme dimenzi daného atlasu, $\dim M = n$. Z konstrukce je zřejmé, že libovolné dva atlasy na stejném topologickém prostoru musí mít stejnou dimenzi.

Označme C^∞ prostor hladkých, tj. libovolněkrát diferencovatelných, funkcí, a C^ω prostor analytických funkcí (tj. funkcí, jejichž Taylorův rozvoj konverguje v okolí každého bodu).

Definice 1.7. Buď $k \in \mathbb{N}$, popř. $k \in \{\infty, \omega\}$. Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ na M je **třídy C^k** právě tehdy, když zobrazení

$$\tau_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

je třídy C^k pro všechna $\alpha, \beta \in I$ taková, že $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Definice 1.8. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}$ (1.1) z předchozí definice nazýváme **přechodová funkce**.

Definice 1.9. Mapa (U, φ) je **C^k–kompatibilní** s atlasem $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I} \Leftrightarrow (\forall \alpha \in I : U \cap U_\alpha \neq \emptyset)$ $(\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ je třídy C^k a současně $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je třídy C^k, tj. $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je difeomorfizmus třídy C^k).

Standardně budeme uvažovat C^∞, tj. funkce libovolněkrát diferencovatelné.

Definice 1.10. Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ třídy C^k na M je **maximální** právě tehdy, když obsahuje všechny mapy s ním C^k-kompatibilní. Maximální atlas třídy C^∞ na M nazýváme **diferencovatelná** či **hladká struktura** na M.

Definice 1.11. Topologický Hausdorffův parakompaktní prostor (M, τ) vybavený diferencovatelnou strukturou nazýváme **diferencovatelná varieta** (neboli **hladká varieta**).

Místo parakompaktnosti se často žádá silnější podmínka, a sice aby byl prostor (M, τ) **lokálně kompaktní** (tj. každý bod p má kompaktní okolí neboli kompaktní množinu obsahující otevřenou množinu obsahující p) se **spočetnou bází topologie**, to znamená, že existuje spočetná indexová množina I a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} : U_\alpha = U_\alpha^\circ$ takové, že každá otevřená množina V je sjednocením množin z $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, tj. $\exists J \subset I : V = \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$.

Díky lokálnímu ztotožnění topologického prostoru M s prostorem $\mathbb{R}^n$ pomocí atlasu můžeme na M derivovat, zkoumat hladkost atd. Většinou se setkáme s varietami pokrytými nejvýše spočetným systémem map. Pak lze topologii τ převést pomocí φ_α^{-1} z $\mathbb{R}^n$ a nemusí být zadána předem. Maximalita atlasu se vyžaduje za účelem jednoznačnosti pojmu varieta. Při praktickém počítání použijeme spíše atlas s minimálním počtem map.

Pokud chceme vyznačit, že na zadané varietě M pracujeme v konkrétních zvolených souřadnicích $(x_1, \ldots, x_n)$, používáme pro zadání variety často zkrácené označení $M[x_1, \ldots, x_n]$. Až zavedeme orientaci variety v kapitole 10, budeme též předpokládat, že takto vyznačené souřadnice $(x_1, \ldots, x_n)$ jsou kladně orientované.

Definice 1.12. Spojité zobrazení $\phi : M \to N$ dvou diferencovatelných variet M a N je **hladké** (tj. třídy C^∞) právě tehdy, když pro každou mapu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ z atlasu M a pro každou mapu (V_β, ψ_β) z atlasu N, kde $\phi(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \emptyset$, je zobrazení $\psi_\beta \circ \phi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \phi^{(-1)}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^m \to \psi_\beta(\phi(U_\alpha) \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ hladké, kde $m = \dim M$ a $n = \dim N$.

U variet budeme dále vždy implicitně uvažovat zobrazení, která jsou hladká, nebude-li výslovně uvedeno jinak.

Definice 1.13. Hladkou bijekci $\phi : M \to N$ takovou, že ϕ^{-1} je též hladké, nazýváme **difeomorfizmus** variet M a N.

Difeomorfní variety považujeme za ekvivalentní a pro praktické účely je ztotožňujeme, např. $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$ (viz cvičení).

Diferencovatelné variety v mnoha případech zadáváme pomocí vazeb, tj. jako vzor $F^{(-1)}(y_0)$ nějakého vybraného bodu $y_0 \in \mathbb{R}^r$ při daném zobrazení $F : \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r$. Topologii na $F^{(-1)}(y_0)$ uvažujeme indukovanou z $\mathbb{R}^{n+r}$ (indukuje se tak lokální kompaktnost, spočetná báze a to, že prostor je Hausdorffův), mapy vytváříme pomocí věty o implicitní funkci. Její aplikací dostáváme následující větu.

Věta 1.14. Buď $F : \mathbb{R}^{r+n} \to \mathbb{R}^r$ třídy C^∞, $y_0 \in \mathbb{R}^r$,

$$F^{(-1)}(y_0) = \{x \in \mathbb{R}^{r+n} | F(x) = y_0\} \neq \emptyset \tag{1.2}$$

a nechť pro všechna $x \in F^{(-1)}(y_0)$ platí $\operatorname{rank} \mathrm{d}F(x) = \dim \mathbb{R}^r = r$. Pak $F^{(-1)}(y_0)$ je diferencovatelnou varietou dimenze n s mapami vytvořenými s využitím věty o implicitní funkci.

Máme-li dvě variety $(M, \tau, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I})$, $(N, \sigma, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J})$, $\dim M = m, \dim N = n$, pak lze na $M \times N$ přirozeně zavést **součinovou topologii** $\tau \times \sigma$ (otevřené množiny jsou konečné průniky kartézských součinů otevřených množin a libovolná jejich sjednocení). S mapami $\chi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\chi_{\alpha\beta}(u, v) = (\varphi_\alpha(u), \psi_\beta(v))$, je pak taková množina $M \times N$ $(m + n)$-rozměrnou diferencovatelnou varietou.

Pokud $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, tak může nastat situace, kdy jsou všechny přechodové funkce $\tau_{\alpha\beta} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ na svém definičním oboru holomorfní. Pak říkáme, že atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ je **holomorfní** a definuje n-rozměrnou **komplexní varietu**. Každá n-rozměrná komplexní varieta je $2n$-rozměrnou reálnou varietou, opačná implikace obecně neplatí. Vzhledem k různým možným způsobům ztotožnění $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{C}^n$ může jedna $2n$–rozměrná reálná varieta odpovídat mnoha (i nekonečně) neekvivalentním strukturám komplexní variety.

1.1 Cvičení

Cvičení 1.1. Ukažte, že $\mathbb{R}^n$ se standardní topologií je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bazí topologie.

Cvičení 1.2. Ukažte, že pokud množina M je vybavená konečným systémem podmnožin $\{U_i\}_{i \in I}$, $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ a bijekcí $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ takovým, že

$$\tau_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

je homeomorfismus kdykoliv je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, je možné na M zavést přirozeným způsobem topologii takovou, že $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ je atlas třídy C^0 na M. Pokud všechna τ_{ij} jsou třídy C^k, máme atlas třídy C^k.

Cvičení 1.3. Ukažte, že sféra

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

je diferencovatelnou varietou.

Návod. S^2 je topologický prostor s topologií indukovanou z $\mathbb{R}^3$. Zkonstruujeme atlas tvořený dvěma mapami

$$\begin{aligned} U_N &= S^2 - \{(0,0,-1)\}, \qquad \varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^2[U,V] : \qquad \varphi_N(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right), \\ U_S &= S^2 - \{(0,0,1)\}, \qquad \varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^2[u,v] : \qquad \varphi_S(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{-y}{1-z}\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ukažte, že zobrazení $\varphi_{N,S}$ přiřazují bodům z S^2 průnik přímky spojující daný bod (x,y,z) s jižním, resp. severním, pólem $(0,0,-1)$ ((0,0,1)) s rovinou xy, s otočením orientace v případě mapy φ_S. Jedná se o tzv. **stereografické projekce**. Ověřte, že se jedná o homeomorfismy. Nalezněte přechodovou funkci

$$\tau_{SN}(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}\right) \tag{1.4}$$

a ukažte že je třídy C^∞ na svém definičním oboru a podobně její inverze.

Vzhledem k tomu, že uvedené mapy lze reinterpretovat jako zobrazení do $\mathbb{C}$, $z = u + \mathrm{i}v$, $Z = U + \mathrm{i}V$ a přechodové funkce mají pak tvar $\tau_{SN}(z) = \frac{1}{z}$, $\tau_{NS}(Z) = \frac{1}{Z}$, tj. jsou holomorfní, jedná se též o komplexní varietu.

Cvičení 1.4. Ukažte, že **komplexní projektivní prostor**

$$\mathbb{CP}^n = \{\mathbb{C}-\mathrm{span}\{\vec{v}\} | \vec{v} \in \mathbb{C}^{n+1}, \vec{v} \neq 0\}$$

je diferencovatelnou varietou dimenze $2n$ a též komplexní varietou dimenze n.

Návod. Systém souřadnicových okolí a map konstruujeme následovně: zavedeme souřadnice na $\mathbb{C}^{n+1} : \vec{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ a definujeme okolí

$$\begin{aligned} &U_i = \{\mathbb{C}-\mathrm{span}\{\vec{v}\} | \vec{v} \in \mathbb{C}^{n+1}, v_i \neq 0\}, \\ &\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi_i(v_0, v_1, \ldots, v_n) = \left(\frac{v_0}{v_i}, \frac{v_1}{v_i}, \ldots, \frac{v_{i-1}}{v_i}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, \ldots, \frac{v_n}{v_i}\right). \end{aligned}$$

kde $i = 0, \ldots, n$. Nalezněte odpovídající přechodové funkce a ověřte jejich hladkost, resp. holomorfnost.

Obdobně lze definovat též **reálný projektivní prostor**

$$\mathbb{RP}^n = \{\mathbb{R}-\mathrm{span}\{\vec{v}\} | \vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1}, \vec{v} \neq 0\}$$

jako diferencovatelnou varietu dimenze n.

Cvičení 1.5. Ukažte, že komplexní projektivní prostor $\mathbb{CP}^1 = \{\mathbb{C}-\mathrm{span}\{\vec{v}\} | \vec{v} \in \mathbb{C}^2, \vec{v} \neq 0\}$ je izomorfní sféře S^2.

Návod. Vhodným způsobem ztotožněte obrazy map v $\mathbb{CP}^1$ a S^2 a ověřte, že je to konzistentní při přechodu k jiným mapám.

Kapitola 2

Tečné vektory k varietě

Chceme zavést na diferencovatelné varietě obdobu tečného vektoru k ploše či křivce a derivace ve směru vektoru v $\mathbb{R}^n$. Vzhledem k tomu, že nemáme k dispozici vektorový prostor, do něhož by naše varieta byla vnořená a v němž bychom mohli tečné vektory konstruovat, máme zobecněním vlastností tečných vektorů ke křivkám a plochám dvě přirozené možnosti: definovat tečné vektory pomocí křivek a pomocí zobrazení z prostoru hladkých funkcí na varietě do reálných čísel, odrážejícího vlastnosti směrové derivace. Nejprve obě možnosti prozkoumáme a pak ukážeme, že takto zkonstruované pojmy tečného vektoru jsou ve skutečnosti matematicky ekvivalentní.

2.1 Zavedení tečného vektoru pomocí křivek

Definice 2.1. Hladké zobrazení $\gamma : (a, b) \to M$, kde $a < 0 < b$, nazýváme **(hladká) křivka** na varietě M vycházející z bodu $p_0 = \gamma(0)$.

Definice 2.2. Vektorový prostor hladkých (C^∞) funkcí na varietě M značíme $C^\infty(M)$.

Zavádíme ekvivalenci mezi křivkami vycházejícími z $p_0 \in M$:

$$\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \tilde{\gamma})\bigg|_{t=0}, \quad \forall f \in C^\infty(M). \tag{2.1}$$

Protože $f \circ \gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $0 \in (a, b)$, má derivace $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ smysl.

Definice 2.3. Tečný vektor X k varietě M v bodě $p_0 \in M$ je třída ekvivalence křivek $[\gamma]$ vycházejících z bodu p_0.

Definice 2.4. Derivace funkce f ve směru tečného vektoru $X = [\gamma]$, $f \in C^\infty(M)$, je pro libovolnou $\gamma \in [\gamma]$ dána vztahem

$$Xf = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\bigg|_{t=0}. \tag{2.2}$$

Z definice ekvivalence křivek je zřejmé, že derivace funkce ve směru tečného vektoru nezávisí na výběru křivky reprezentující třídu ekvivalence.

Uvažujme nyní lokální souřadnice $x^i = \varphi^i(p)$, kde $p \in U = U^\circ$, $\varphi^i : U \to \mathbb{R}$, a zvolme $p_0 \in U$ s lokálními souřadnicemi $x^i_0 = \varphi^i(p_0)$ a libovolnou funkci $f \in C^\infty(M)$. Reálnou funkci

$$F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = \varphi(U)^\circ \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{2.3}$$

nazýváme **vyjádření funkce f v lokálních souřadnicích** φ (či souřadnicích (x^i)). Většinou ji značíme stejně jako samotnou funkci f a použité souřadnice vyplývají z kontextu.

Následně můžeme tečný vektor ztotožnit se směrovou derivací

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}, \tag{2.4}$$

kde $X^i = X\varphi^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^i \circ \gamma)\big|_{t=0} \in \mathbb{R}$. Všimněme si, že $\varphi^i \circ \gamma$ je i-tá složka křivky γ v souřadnicovém vyjádření φ.

Důvodem pro ztotožnění tečného vektoru a jemu odpovídající směrové derivace (2.4) je skutečnost, že dle vztahu pro derivaci složené funkce máme pro libovolnou hladkou funkci $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} F \quad &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^i \circ \gamma)\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})\right|_{x_0} \quad = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)\right|_{t=0} \quad = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\right|_{t=0}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

(kde $x_0^i = \varphi^i(\gamma(0))$). Tedy $Xf = \sum_{i=1}^{n} X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} F$.

Obvykle píšeme $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p_0}$ místo $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p_0)}$, tj. ztotožňujeme bod a jeho souřadnicové vyjádření v souřadnicích použitých v daném výrazu.

Poznámka 2.5. Souřadnice až na výjimky píšeme s horními indexy. Nadále budeme využívat **sumační konvenci** – index vyskytující se jednou nahoře a jednou dole se sčítá od 1 do dimenze variety.

Nechť $\vec{X} = (X^i) \in \mathbb{R}^n$. Pak zobrazení $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definované jako $X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p_0}$ je působením tečného vektoru $[\gamma]$, kde křivku γ je v souřadnicích (x^i) možné zapsat například ve tvaru $\gamma^i(t) = x^i(p_0) + t\,X^i$.

Při změně souřadnic $(x^i) \to (\tilde{x}^i)$ se souřadnicové vyjádření tečného vektoru mění podle vztahu pro derivaci složené funkce: $X^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^i(\gamma(t))\big|_{t=0}$ a $\tilde{X}^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{x}^i(\gamma(t))\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|_{p_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^j(\gamma(t))\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|_{p_0} X^j$, z čehož plyne vztah

$$X = \tilde{X}^i \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_{p_0} = X^j \left.\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|_{p} \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_{p_0} = X^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{p_0}. \tag{2.6}$$

2.2 Zavedení tečného vektoru pomocí zobrazení

Definice 2.6. Tečný vektor X k varietě M v bodě $p \in M$ je zobrazení $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ vyhovující následujícím podmínkám:

1. $X(af + g) = aXf + Xg, \quad \forall f, g \in C^\infty(M), \forall a \in \mathbb{R}$, tj. **linearita**,
2. $X(fg) = f(p)(Xg) + (Xf)g(p), \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$, tzv. **Leibnizovo pravidlo**,
3. $\forall f, g \in C^\infty(M) : (\exists U = U^\circ \ni p,\ f|_U = g|_U \Rightarrow Xf = Xg)$, tzv. **lokalita**.

Věta 2.7. Uvedené dvě definice tečného vektoru jsou ekvivalentní.

Důkaz. $X = [\gamma] \to X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, X^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^i \circ \gamma)\big|_{t=0}$ splňuje linearitu, Leibnizovo pravidlo i lokalitu.

Naopak, mějme $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ vyhovující vlastnostem uvedeným v definici 2.6. Definujme $X^i = X\varphi^i$, kde $\varphi = (x^i)$ jsou souřadnice na okolí U bodu p. K tomu přísně vzato potřebujeme φ^i jako funkci na celém M, k jejímu definování využijeme podmínku lokality. Nechť $U_1 \subset U_2$ jsou vzory otevřených do sebe vnořených koulí v $\mathbb{R}^n \cap \varphi(U)$ se středem v bodě $\varphi(p)$, tj. $U_1 \subset U_2 \subset U$. Předpokládejme pro určitost, že koule $\varphi(U_1)$ má poloměr ϵ a $\varphi(U_2)$ poloměr 2ϵ. Definujeme:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^i &= x^i && \text{na } U_1, \\ \tilde{\varphi}^i &= 0 && \text{na } M \setminus U_2, \\ \tilde{\varphi}^i &= \text{hladká interpolace} && \text{na } U_2 \setminus U_1. \end{aligned}$$

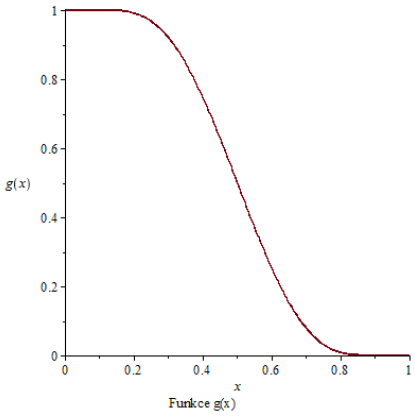
Existence vhodné interpolující funkce se ukáže využitím následující funkce $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, viz [4]: uvážíme nejprve funkci $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-1)x}\right), & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ nebo } 1 \leq x. \end{cases}$$

Tato funkce je hladká na $\mathbb{R}$, jak se snadno ověří jejím explicitním derivováním a limitami $x \to 0^+$ a $x \to 1^-$. Následně se její integrací definuje nová hladká funkce $g(x)$,

$$g(x) = \frac{\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y}{\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y}, \tag{2.7}$$

která je hladká na $\mathbb{R}$, rovná 1 pro $x \leq 0$ a nulová pro $x \geq 1$.



Zavedením $F(q) = g\left(\frac{||\varphi(q)-\varphi(p)||}{\epsilon} - 1\right)$ pak dostáváme hladkou funkci F na U rovnou 1 uvnitř koule U_1 a rovnou 0 mimo kouli U_2. Jejím součinem se souřadnicovými funkcemi φ^i pak nacházíme hledané $\tilde{\varphi}^i$ na U, které hladce dodefinujeme na celou varietu M jako nulovou funkci na $M \setminus U$.

Z této konstrukce plyne existence $\tilde{\varphi}^i \in C^\infty(M)$ a $X^i = Xx^i \equiv X\tilde{\varphi}^i$ nezávisí na volbě U_1, U_2 (díky podmínce lokality). Definujme $\widetilde{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, což je vyjádření tečného vektoru podle první definice 2.3. Chceme ukázat, že $\forall f \in C^\infty(M)$ platí $Xf = \widetilde{X}f$. Funkce $f \in C^\infty(U_1)$ (viz rozšíření souřadnicových funkcí výše) má v lokálních souřadnicích tvar $f(x^1, \ldots, x^n)$. Bez újmy na obecnosti zvolíme souřadnice tak, že $\varphi(p) = \vec{0}$. Z Taylorova

rozvoje pro funkci f plyne: $f(\vec{x}) = f(\vec{0}) + x^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\vec{0}} + g(\vec{x})$, kde g je nějaká hladká funkce na okolí $\vec{0}$, $g(\vec{0}) = 0$, $\left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_{\vec{0}} = 0$ a tedy:

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) - f(\vec{0}) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t\vec{x})\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t\vec{x})\,\mathrm{d}t \\
&= -[(1-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t\vec{x})]_0^1 + \int_0^1 (1-t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(t\vec{x})\,\mathrm{d}t \\
&= x^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\vec{0}} + \int_0^1 (1-t) x^i x^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(t\vec{x})\,\mathrm{d}t \\
&= x^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\vec{0}} + \underbrace{x^i x^j \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} g(t\vec{x})\,\mathrm{d}t}_{g(\vec{x}) = x^i x^j g_{ij}(\vec{x})},
\end{aligned}$$

kde $g_{ij}(\vec{x}) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(t\vec{x})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} g(t\vec{x})\,\mathrm{d}t$ jsou nějaké hladké funkce na oblasti konvergence Taylorova rozvoje. Z linearity a Leibnizova pravidla plyne $X(\mathit{konst.}) = 0$ a tedy: $Xf = 0 + X^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\vec{0}} + X(x^i x^j g_{ij}(\vec{x}))$. Použitím Leibnizova pravidla navíc dostáváme $X(x^i x^j g_{ij}(\vec{x})) = 0$, neboť nám po jeho aplikaci zůstane v každém členu alespoň jedno $x^i|_0 = 0$. Celkem $Xf = \widetilde{X} f$ a obě definice tečného vektoru jsou tedy ekvivalentní. ■

Důsledek 2.8. Množina tečných vektorů k M v $p \in M$ má přirozenou strukturu vektorového prostoru.

Důkaz. Uvažovaná zobrazení $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor, neboť součet a konstantní násobek zobrazení splňujících podmínky v definici 2.6 je též splňuje. ■

Definice 2.9. Tečný prostor T_pM k varietě M v bodě $p \in M$ je vektorový prostor tvořený tečnými vektory k M v p. Dimenze tečného prostoru k M v $p \in M$ je rovná dimenzi variety, $\dim T_pM = \dim M$.

2.3 Cvičení

Cvičení 2.1. Uvažujte dvě variety M_ϵ, kde $\epsilon = \pm 1$. Každá je popsaná dvěma mapami $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2, \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$ takovými, že

$$\mathrm{Ran}(\varphi_1) = (0, 2\pi) \times (-1, 1), \qquad \mathrm{Ran}(\varphi_2) = (-\pi, \pi) \times (-1, 1).$$

Přechodová funkce τ_{12} má definiční obor $((0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)) \times (-1, 1)$ a je dána předpisem

$$\begin{aligned}
\tau_{12}(\theta, \sigma) &= (\theta, \sigma), && 0 \le \theta \le \pi, \\
&= (\theta - 2\pi, \epsilon\sigma) = (\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}), && \pi \le \theta \le 2\pi.
\end{aligned}$$

Určete, o jaké geometrické objekty se jedná.

Výsledek. Plášť válce, resp. Möbiův list.

Cvičení 2.2. Uvažujte variety a mapy z cvičení 2.1 a bod $p_0 \in U_1 \cap U_2$. Převeďte tečný vektor

$$X = \alpha \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{p_0} + \beta \left.\frac{\partial}{\partial\sigma}\right|_{p_0}$$

vyjádřený v souřadnicích $[\theta, \sigma]$ v mapě φ_1 do souřadnic $[\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}]$ v mapě φ_2.

Výsledek. Výsledek se liší dle hodnoty $\theta(p_0)$:

- $\theta(p_0) \in (0, \pi) : X = \alpha \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{p_0} + \beta \left.\frac{\partial}{\partial\sigma}\right|_{p_0}$,
- $\theta(p_0) \in (\pi, 2\pi) : X = \alpha \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{p_0} + \beta \left.\frac{\partial}{\partial\sigma}\right|_{p_0}$.

Cvičení 2.3. Uvažujte varietu $M = \mathbb{R}^+$ s mapami $\varphi_1 : M \to \mathbb{R}^+ : \varphi_1(x) = x$ a $\varphi_2 : M \to \mathbb{R} : y \equiv \varphi_2(x) = \ln(x)$. Tečný vektor $X = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{p_0} \in T_{x_0}M$ vyjádřete v souřadnicích y.

Výsledek. $X = \frac{1}{x_0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right|_{p_0} = \frac{1}{\exp y_0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right|_{p_0}$.

Cvičení 2.4. Uvažujte sféru S^2 popsanou stereografickými projekcemi a tečné vektory $X_1 = \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p$, $X_2 = \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p$ v bodě $p \in U_N \cap U_S$. Najděte vyjádření těchto vektorů v souřadnicích $[U, V]$ na U_N.

Výsledek. $X_1 = (V^2 - U^2) \left.\frac{\partial}{\partial U}\right|_p - 2UV \left.\frac{\partial}{\partial V}\right|_p$, $X_2 = 2UV \left.\frac{\partial}{\partial U}\right|_p + (V^2 - U^2) \left.\frac{\partial}{\partial V}\right|_p$.

Cvičení 2.5. V $\mathbb{R}^3$ uvažujte kartézské souřadnice $[x, y, z]$ a sférické souřadnice $[r, \theta, \phi]$,

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta. \tag{2.8}$$

Tečné vektory $X_1 = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p$, $X_2 = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$, $X_3 = \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p$ a $X_4 = \left.\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right|_p$ převeďte do sférických souřadnic.

Návod. Je snazší vyjádřit Jacobiho matici $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ a určit její inverzi než počítat vyjádření souřadnic r, θ, ϕ pomocí x, y, z a následně počítat parciální derivace.

Výsledek.

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sin\theta\cos\phi \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_p - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta} \left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_p, \\
X_2 &= \sin\theta\sin\phi \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r} \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_p + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} \left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_p, \\
X_3 &= \cos\theta \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p - \frac{\sin\theta}{r} \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_p, \\
X_4 &= \left.\frac{\partial}{\partial\phi}\right|_p.
\end{aligned}$$

Kapitola 3

Tečný bundle, vektorová pole, integrální křivky

V předchozí kapitole zavedené tečné vektory jsou vázány na konkrétní bod variety. Jsou tudíž vhodnými objekty k popisu např. rychlosti částice v konkrétním bodě její trajektorie (jak je ostatně vidět i z jejich definice pomocí tříd ekvivalence křivek). V řadě situací v matematice a fyzice se ale setkáváme s tím, že vektor je zadán v každém bodě prostoru, např. vektor intenzity elektrického pole. V této kapitole si proto zkonstruujeme vhodný, tomu odpovídající, matematický objekt, tzv. vektorové pole.

Zaveďme disjunktní sjednocení všech $T_pM,\ p \in M$:

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM = \{X_p \in T_pM |\ p \in M\}, \tag{3.1}$$

tj. $V \in TM \Leftrightarrow \exists\, p \in M, X \in T_pM : V = X$.

Na TM zavádíme zobrazení $\pi : TM \to M$, $\pi(X_p) = p$. Na TM můžeme přirozeným způsobem zavést strukturu diferencovatelné variety. Buď $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x^i_\alpha))\}_{\alpha\in I}$ diferencovatelný atlas na M, $\dim M = n$. Pak zavedeme na TM atlas $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, kde $V_\alpha = \pi^{(-1)}(U_\alpha)$ a $\psi_\alpha : V_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ jsou definovány předpisem:

$$\psi_\alpha(X_p) = (x^1_\alpha(p), \ldots, x^n_\alpha(p), X^1_\alpha(p), \ldots, X^n_\alpha(p)),\ \text{kde}\ X_p = X^i_\alpha(p)\ \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}\bigg|_p .$$

Zobrazení ψ_α je bijekce. Zvolíme na TM takovou topologii, aby bylo ψ_α i π spojité, tj. vzory otevřených množin při zobrazeních ψ_α i π definujeme jako otevřené množiny v TM a doplníme jejich konečné průniky a libovolná sjednocení. Přechodové zobrazení má tvar ($\tau_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1},\ X_p = X^i_\beta\ \frac{\partial}{\partial x^i_\beta}\Big|_p$):

$$\tau_{\alpha\beta}(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha, X^1_\alpha, \ldots, X^n_\alpha) = (x^1_\beta(x_\alpha), \ldots, x^n_\beta(x_\alpha), X^1_\beta, \ldots, X^n_\beta),$$

kde $X^i_\beta = \frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\Big|_p \cdot X^j_\alpha$. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}$ je hladké, neboť zobrazení

$$(X^1_\alpha, \ldots, X^n_\alpha) \to \left(\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\bigg|_p \cdot X^j_\alpha\right)_{i=1}^n$$

je hladké jako funkce $2n$ proměnných x^i a X^i a $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je hladké dle předpokladu.

Definice 3.1. Diferencovatelnou varietu TM nazýváme **tečný fibrovaný prostor** (též **tečný bundle**). TM je speciálním případem tzv. fibrovaného prostoru.

Definice 3.2. Fibrovaný prostor (angl. fibre bundle) je diferencovatelná varieta E, nazývaná **totální prostor**, vybavená následujícími dodatečnými strukturami:

1. Diferencovatelnou varietou M zvanou **báze** neboli **bázová varieta** se surjektivním zobrazením $\pi : E \to M$ zvaným **projekce** a otevřeným pokrytím $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M$.
2. Diferencovatelnou varietou F zvanou **typické vlákno** s difeomorfizmy $\psi_\alpha : \pi^{(-1)}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ zvanými **lokální trivializace** splňujícími (π_1 je projekce na první složku kartézského součinu $U_\alpha \times F$):

$$\pi_1 \circ \psi_\alpha = \pi|_{\pi^{(-1)}(U_\alpha)}\,.$$

Definice 3.3. Nechť $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}(p) : F \to F$ takové, že

$$(\forall u \in F)\left((p, \tau_{\alpha\beta}(p)u) = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, u)\right),$$

nazýváme **přechodová funkce na vlákně** při přechodu z trivializace (U_α, ψ_α) do trivializace (U_β, ψ_β).

Je třeba si neplést $\tau_{\alpha\beta}$ s přechodovou funkcí u variet. Přechodová funkce na vlákně je zobrazením typického vlákna sama na sebe a parametricky závisí na uvažovaném bodě bázové variety.

Poznámka 3.4. Fibrovaný prostor $(E, M, F, \pi, \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I})$ často značíme jen E nebo $E \xrightarrow{\pi} M$, jsou-li další struktury jasné z kontextu.

Často klademe omezení na přípustné lokální trivializace: připouštíme pouze takové trivializace, kdy všechny přechodové funkce na vlákně leží ve vhodně vybrané grupě zobrazení $F \to F$, tj. ve vhodné podgrupě grupy všech difeomorfizmů $\mathrm{Diff}(F)$. Vybranou grupu nazýváme **strukturní grupa** fibrovaného prostoru E. Může jít o případy, kdy má F dodatečnou strukturu, jako např. vektorový prostor nebo varieta s metrikou.

Pokud F má strukturu vektorového prostoru, je přirozené požadovat, aby strukturní grupa fibrovaného prostoru E s typickým vláknem F byla grupa regulárních lineárních operátorů $GL(F)$ nebo její vhodná podgrupa (např. grupa ortogonálních operátorů v případě vektorového prostoru se skalárním součinem). Takový fibrovaný prostor nazýváme **vektorový fibrovaný prostor**.

Definice 3.5. Pro dané $p \in M$ nazýváme $\pi^{(-1)}(p)$ **vlákno nad bodem p**. $\pi^{(-1)}(p)$ je diferencovatelná varieta izomorfní typickému vláknu F (izomorfizmus není určen jednoznačně, při zvolené trivializaci předpis pro něj zní: $x \to \pi_2(\psi_\alpha(x)),\ x \in \pi^{(-1)}(p)$).

Definice 3.6. Řez fibrovaného prostoru E definujeme jako hladké zobrazení $\sigma : M \to E$ vyhovující podmínce $\pi \circ \sigma = id$. Množinu všech řezů E značíme $\Gamma(E)$.

Poznámka 3.7. Řezy vektorového fibrovaného prostoru tvoří vektorový prostor vzhledem k bodovému sčítání, $(\alpha\sigma_1 + \sigma_2)(p) = \alpha\sigma_1(p) + \sigma_2(p)$.

Definice 3.8. Lokální řez na okolí $U = U^\circ \subset M$ je hladké zobrazení $\sigma : U \to E$ splňující $\pi \circ \sigma = id|_U$.

Definice 3.9. Zobrazením fibrovaných prostorů (E, M, F, π) a $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{\pi})$ (angl. bundle map) nazveme dvojici zobrazení $\phi : E \to \tilde{E}$ a $\varphi : M \to \tilde{M}$ vyhovující podmínce: $\tilde{\pi} \circ \phi = \varphi \circ \pi$.

Definice 3.10. Fibrovaný prostor $E \xrightarrow{\pi} M$ je **triviální**, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení fibrovaných prostorů $E \xrightarrow{\pi} M$ a $M \times F \xrightarrow{\pi_1} M$.

Definice 3.11. Vektorové pole X na varietě M je řez tečného bundlu, tj. $X \in \Gamma(TM)$. Množinu všech vektorových polí na varietě M značíme $\mathcal{X}(M)$ nebo $\Gamma(TM)$ (viz důsledek 4.8 níže).

Jinak řečeno, vektorové pole přiřazuje každému $p \in M$ tečný vektor $X(p) \in T_pM$ hladkým způsobem, tj. v libovolných souřadnicích $X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$, kde $X^i \in C^\infty(U)$.

Definice 3.12. Integrální křivka vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$ vycházející z bodu $p_0 \in M$ je hladké zobrazení $\gamma : (a, b) \to M,\ a < 0 < b,\ \gamma(0) = p_0$, takové, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t) \equiv \dot{\gamma}(t) = X|_{\gamma(t)}\,. \tag{3.2}$$

Přitom $\dot{\gamma}(t)$ je definováno jako tečný vektor v $\gamma(t) \in M$ určený třídou ekvivalence $[\tilde{\gamma}]$, kde $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t + s)$, $s \in (a - t, b - t)$.

V lokálních souřadnicích máme integrální křivku popsánu jako řešení autonomní soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma^i(t) = X^i\left(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)\right), \quad \gamma^i(0) = x^i(p_0), \quad \forall i \in \hat{n},\ \text{kde } \gamma^i(t) = x^i(\gamma(t)). \tag{3.3}$$

Definice 3.13. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je **úplné** právě tehdy, když lze každou jeho integrální křivku rozšířit na integrální křivku zobrazující celé $\mathbb{R}$ do M.

Sloučením všech integrálních křivek vycházejících z jednotlivých bodů variety do jedné matematické struktury dostáváme

Definice 3.14. Tok vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je zobrazení $\Psi_X : U \to M$, kde $U = U^\circ \subset M \times \mathbb{R}$ a $M \times \{0\} \subset U$, takové, že $(\forall p \in M)(\Psi_X(p, 0) = p)$ a $\Psi_X(p, t) = \gamma_X^p(t)$ je integrální křivka vektorového pole X vycházející z bodu $p \in M$.

Z teorie diferenciálních rovnic vyplývá, že existuje právě jedno hladké zobrazení Ψ_X na určitém maximálním souvislém okolí U. Dále budeme často psát $\Psi_X^t(p) \equiv \Psi_X(p, t)$, kde $\Psi_X^t : M \to M$.

V lokálních souřadnicích (x^i), kde jsme označili $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$, máme:

$$\begin{gathered}\Psi_X \leftrightarrow (\Psi_X^i) : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}^n,\ V_1 = V_1^\circ \subset \mathbb{R}^n,\ V_2 = V_2^\circ \subset \mathbb{R},\ 0 \in V_2 : \\ \frac{\partial}{\partial t}\Psi_X^i(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, t) = X^i(\Psi_X(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, t)), \quad \forall(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n) \in V_1,\ t \in V_2, \\ \Psi_X^i(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, 0) = \tilde{x}^i, \quad \forall(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n) \in V_1.\end{gathered}$$

Poznamenejme, že konkrétní tvar integrálních křivek či toku daného vektorové pole samozřejmě závisí na použitých souřadnicích. Jak uvidíme ve cvičeních, složitost řešení soustavy (3.3) se může v závislosti na zvolených souřadnicích dosti podstatně lišit. Lze

ukázat, že pro vektorové pole nenulové na okolí bodu $p \in M$ vždy existují lokální souřadnice na nějakém, možná menším, okolí bodu $p \in M$, v nichž má dané vektorové pole tvar $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Bohužel nalezení těchto souřadnic je ekvivalentní nalezení toku vektorového pole X.

Z autonomie soustavy (3.3) a věty o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic vyplývá

Důsledek 3.15. $\Psi^s_X \circ \Psi^t_X(p) = \Psi^{s+t}_X(p)$, pokud má levá strana smysl, tj. $(\Psi^t_X(p), s) \in U,\ (p,t) \in U$.

Z tohoto důsledku též plyne, že pokud daná integrální křivka protne sama sebe, tak už se uzavírá, tj. integrální křivky jsou izomorfní buďto otevřenému intervalu (vč. celého $\mathbb{R}$) nebo kružnici.

3.1 Cvičení

Cvičení 3.1. V $\mathbb{R}^2[x,y]$ uvažujte vektorová pole $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. Najděte jejich integrální křivky a určete, zda jsou tato vektorová pole úplná.

Řešení. Pro X_1 máme rovnice pro integrální křivku $\gamma_1(t)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_1^1(t) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(\gamma_1(t)) = x(\gamma_1(t)) = \gamma_1^1(t),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_1^2(t) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(\gamma_1(t)) = y(\gamma_1(t)) = \gamma_1^2(t),\\ \gamma_1^1(0) &= x_0, \quad \gamma_1^2(0) = y_0.\end{aligned}$$

Tyto rovnice jsou na sobě nezávislé a separovatelné, tudíž nacházíme řešení ve tvaru $\ln(\gamma_1^1(t)) = t + C_1$, $\ln(\gamma_1^2(t)) = t + C_2$. Dosazením počáteční podmínky pak máme

$$\gamma_1(t) = (x_0 \exp t, y_0 \exp t)\ (\equiv \Psi_{X_1}(x_0, y_0, t))\,.$$

Analogicky, pro vektorové pole X_2 máme rovnice pro integrální křivku $\gamma_2(t)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_2^1(t) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(\gamma_2(t)) = -y(\gamma_2(t)) = -\gamma_2^2(t),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_2^2(t) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(\gamma_2(t)) = x(\gamma_2(t)) = \gamma_2^1(t),\\ \gamma_2^1(0) &= x_0, \quad \gamma_2^2(0) = y_0.\end{aligned}$$

Tuto soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty řešíme dosazením řešení v předpokládaném tvaru $\gamma_2(t) = (a,b)\cdot\exp(\lambda t)$. Tím dostáváme soustavu homogenních lineárních rovnic:

$$\lambda \cdot a + b = 0, \quad -a + \lambda \cdot b = 0.$$

Matice soustavy $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ musí být singulární, aby existovalo nenulové řešení, tudíž máme $\lambda = \pm\mathrm{i}$. Po nalezení odpovídajících konstant a, b pro každou z uvedených hodnot λ nacházíme superpozicí těchto řešení obecné řešení naší soustavy diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\gamma_2(t) = (\gamma_2^1(t), \gamma_2^2(t)) = C_1 \cdot (1, -\mathrm{i}) \cdot \exp(\mathrm{i}t) + C_2 \cdot (1, \mathrm{i}) \cdot \exp(-\mathrm{i}t).$$

Dosazením počáteční podmínky a úpravou výsledku do explicitně reálného tvaru získáváme integrální křivku ve tvaru

$$\gamma_2(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t) \ (\equiv \Psi_{X_2}(x_0, y_0, t)) \,.$$

Evidentně obě integrální křivky γ_1, γ_2 jsou pro libovolnou počáteční podmínku definovány pro libovolnou hodnotu $t \in \mathbb{R}$, obě vektorová pole jsou tedy úplná. Jako množiny bodů jsou tyto křivky v prvém případě polopřímky daného směru vycházející z počátku souřadnic, ale jej neobsahující, resp. konstantní křivka $\gamma_1(t) = (0,0)$, v druhém případě kružnice se středem v počátku, resp. opět konstantní křivka $\gamma_2(t) = (0,0)$.

Cvičení 3.2. Vektorová pole z cvičení 3.1 převeďte do polárních souřadnic $[r, \varphi]$, kde

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{3.4}$$

a najděte jejich integrální křivky v těchto souřadnicích.

Řešení. Dosazením transformace tečných vektorů při změně souřadnic dostáváme

$$\begin{aligned} X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} =& r\cos\varphi\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \\ &+ r\sin\varphi\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}, \\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} =& r\cos\varphi\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) - \\ &- r\sin\varphi\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}. \end{aligned}$$

Integrální křivky mají proto jednoduchý tvar, $\gamma_1(t) = (r_0 \exp t, \varphi_0)$, $\gamma_2(t) = (r_0, \varphi_0 + t)$.

Cvičení 3.3. Je vektorové pole $X = x^2\frac{\partial}{\partial x}$ na $\mathbb{R}[x]$ úplné?

Výsledek. $\Psi^t_x(x) = \frac{x}{1-tx}$. Není definováno $\Psi^{\frac{1}{x}}(x)$, tudíž není úplné.

Cvičení 3.4. Najděte tok vektorového pole $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(TM)$, kde $M = \mathbb{R}^3[x,y,z]$.

Výsledek. $\Psi^t_X(x,y,z) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, z + (x^2+y^2)t)$.

Cvičení 3.5. Na $S^2[U,V]$ uvažujte vektorové pole $X = (V^2 - U^2)\frac{\partial}{\partial U} - 2UV\frac{\partial}{\partial V}$ na U_N. Najděte jeho integrální křivky.

Řešení. Řešíme rovnice

$$\dot{U} = V^2 - U^2, \qquad \dot{V} = -2UV. \tag{3.5}$$

Z druhé rovnice vyloučíme U a dosadíme do první rovnice, čímž získáme jednu diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\ddot{V}}{2V} - \frac{3}{4}\frac{(\dot{V})^2}{V^2} + V^2 = 0.$$

Po přenásobení integračním faktorem $\frac{\dot{V}}{V^2}$ ji lze jednou zintegrovat na separovatelnou diferenciální rovnici 1. řádu

$$\frac{1}{4V^3}(\dot{V})^2 = C - V.$$

Následným výpočtem kvadratury a dosazením počáteční podmínky nacházíme řešení rovnice (3.5) ve tvaru

$$\gamma(t) = \left(\frac{U_0 + t(U_0^2 + V_0^2)}{1 + 2tU_0 + t^2(U_0^2 + V_0^2)}, \frac{V_0}{1 + 2tU_0 + t^2(U_0^2 + V_0^2)} \right).$$

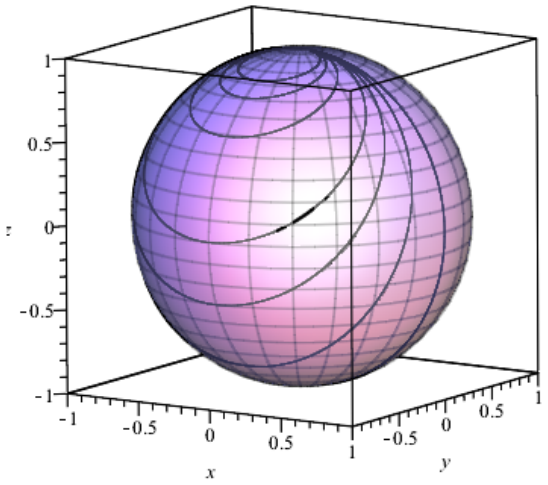
Cvičení 3.6. Převeďte vektorové pole X z cvičení 3.5 do souřadnic $[u, v]$ na U_S, ukažte, že vektorové pole X lze definovat jako hladké vektorové pole na celé sféře S^2, nalezněte jeho tok v souřadnicích $[u, v]$ a výsledek převeďte do souřadnic $[U, V]$.

Návod. Využitím cvičení 2.4 máme $X = \frac{\partial}{\partial u}$, tj. X lze hladce definovat ve všech bodech pokrytých atlasem, což je celá varieta S^2, $\Psi_X^t(u, v) = (u + t, v)$ a převedením počáteční podmínky ze souřadnic $[U, V]$ a výsledku do souřadnic $[U, V]$ nacházíme

$$\Psi_X^t(U, V) = \left(\frac{U + t(U^2 + V^2)}{1 + 2tU + t^2(U^2 + V^2)}, \frac{V}{1 + 2tU + t^2(U^2 + V^2)} \right).$$

Cvičení 3.7. Zjistěte, zda je vektorové pole z cvičení 3.5 po dodefinování jako ve cvičení 3.6 úplné.

Návod. V tomto případě je třeba dbát na to, ve kterém souřadnicovém okolí se pohybujeme. Zdánlivě vektorové pole $X = (V^2 - U^2)\frac{\partial}{\partial U} - 2UV\frac{\partial}{\partial V}$ úplné není, neboť pro $V_0 = 0$ lze pro konečnou hodnotu křivkového parametru t opustit souřadnicové okolí U_N. Nicméně po převedení do souřadnic $[u, v]$ vidíme, že v těchto souřadnicích problém zmizí, limitě $|U| \to \infty$ odpovídá bod $(u, v) = (0, 0)$, kterým integrální křivka vektorového pole $X = \frac{\partial}{\partial u}$ bez problému hladce prochází. Vektorové pole X je tudíž úplné. Viz obrázek integrálních křivek níže. Poznamenejme, že integrální křivky nejsou až na jednu výjimku uzavřené, limitně pro $t \to \pm\infty$ vycházejí z a vcházejí do severního pólu $N = (0, 0, 1)$. Ten ale leží na samostatné konstantní integrální křivce, neboť v něm je vektorové pole $X = (V^2 - U^2)\frac{\partial}{\partial U} - 2UV\frac{\partial}{\partial V}$ rovné nule.



Kapitola 4

Abstraktnější pohled na vektorová pole

Na vektorová pole definovaná v předchozí kapitole lze nahlížet ještě jiným způsobem, obdobně jako tečné vektory lze definovat jako tečné vektory ke křivkám nebo jako zobrazení z prostoru funkcí do číselného tělesa. Tento jiný úhel pohledu nám přirozeněji ukáže některé vlastnosti vektorových polí. K tomu nejprve potřebujeme definovat několik pojmů z oblasti abstraktní algebry.

Definice 4.1. Algebra $A = (V, m)$ je dvojice tvořená vektorovým prostorem V nad tělesem reálných čísel a bilineárním zobrazením m, násobením v algebře A,

$$m : V \times V \to V. \tag{4.1}$$

Množinu V nazýváme **nosič algebry** A.

Pokud bude použité násobení m v algebře A zřejmé z kontextu, často nerozlišujeme mezi algebrou a jejím nosičem, $A \equiv V$.

V matematice se takto zavedená algebra někdy přesněji označuje jako **(lineární) algebra nad tělesem** $\mathbb{R}$, neboť je možné obecněji uvažovat algebry jako moduly nad okruhy vybavené binární operací násobení prvků z modulu. Pro naše účely jiné algebry nebudeme potřebovat, proto přívlastky lineární či nad tělesem $\mathbb{R}$ nebudeme užívat.

Definice 4.2. Algebra (V, m) je:

1. **asociativní** právě tehdy, když $m(u, m(v, w)) = m(m(u, v), w)$ pro všechna $u, v, w \in V$,
2. **komutativní** neboli **abelovská** právě tehdy, když $m(u, v) = m(v, u)$ pro všechna $u, v \in V$,
3. **Lieova** právě tehdy, když platí následující dvě podmínky pro všechna $u, v, w \in V$:
   (a) $m(u, v) = -m(v, u)$, tj. **antisymetrie**,
   (b) $m(u, m(v, w)) + m(v, m(w, u)) + m(w, m(u, v)) = 0$, tj. **Jacobiho identita**.

Vhodné značení pro násobení v algebře vybíráme podle vlastností operace – např. asociativní násobení značíme jako součin, $m(x, y) = x \cdot y$, násobení v Lieově algebře nazýváme **Lieova závorka** a značíme $m(x, y) = [x, y]$.

Příklad 4.3. Algebry lze zavést mj. následujícími způsoby:

- $(\mathcal{L}(V), \circ)$, kde $\mathcal{L}(V)$ je prostor lineárních operátorů na vektorovém prostoru V a $\circ$ je skládání lineárních operátorů, je asociativní algebra,
- $(\mathcal{L}(V), [\cdot,\cdot])$, kde $[A,B] = A \circ B - B \circ A$, je Lieova algebra,
- $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$, kde $\{\cdot,\cdot\}$ je Poissonova závorka, je Lieova algebra,
- $(C^\infty(M), \cdot)$, kde $(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p)$ pro $f, g \in C^\infty(M)$, $p \in M$, je komutativní asociativní algebra.

Definice 4.4. Derivace algebry (V, m) je lineární zobrazení $D : V \to V$ vyhovující podmínce

$$D(m(x,y)) = m(D(x), y) + m(x, D(y)), \quad \forall x, y \in V. \tag{4.2}$$

Příklad 4.5. Nechť $(V, .)$ je asociativní algebra. Ukážeme, že na $(V, .)$ je operace

$$D_C : V \to V, \quad D_C(A) = [C, A] = C.A - A.C$$

derivací.
Důkaz. $D_C(A.B) = C.A.B - A.B.C = C.A.B - A.C.B + A.C.B - A.B.C = (C.A - A.C).B + A.(C.B - B.C) = (D_C(A)).B + A.(D_C(B))$. ■

Příklad 4.6. $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$, $f \in C^\infty(M)$, $D_f(g) = \{f, g\}$.

Věta 4.7. Uvažujme hladkou varietu M a $C^\infty(M)$ jako asociativní komutativní algebru s násobením daným předpisem $(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p)$. Označme $\mathcal{X}(M)$ vektorový prostor všech derivací algebry $C^\infty(M)$, tj. všech zobrazení $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ s vlastnostmi $X(af+g) = aXf + Xg$, $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$. Pak lze vzájemně jednoznačně zobrazit $\mathcal{X}(M)$ na množinu všech vektorových polí $\Gamma(TM)$ předpisem $X(p)(f) \equiv (Xf)(p)$, kde $X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$. Jinak řečeno,

$$\mathcal{X}(M) \simeq \Gamma(TM). \tag{4.3}$$

Důkaz. Nechť $X \in \Gamma(TM)$, tj. máme hladké zobrazení $X : M \to TM$, $X(p) \in T_pM$. Definujme $\widetilde{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ předpisem $(\widetilde{X}f)(p) = X(p)f$. Z hladkosti X vyplývá, že $\widetilde{X}f$ je v každých lokálních souřadnicích hladké zobrazení, tj. je hladké i na celé varietě M. Z vlastností tečných vektorů pak vyplývá linearita a podmínka na derivaci (4.2) v libovolném bodě $p \in M$,

$$\widetilde{X}(fg)(p) = (\widetilde{X}f)(p)g(p) + f(p)(\widetilde{X}g)(p).$$

Naopak, buď $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$. Definujme

$$X(p) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \; X(p)f = (\widetilde{X}f)(p).$$

Evidentně platí $X(p)(af+g) = aX(p)f + X(p)g$, $X(p)(f \cdot g) = X(p)f \cdot g(p) + f(p) \cdot X(p)g$. Dále ověříme podmínku lokality, tj.

$$\forall f, g \in C^\infty(M) : \, (\exists U = U^\circ \ni p, \; f|_U = g|_U \Rightarrow X(p)f = X(p)g)\,.$$

Ekvivalentně ji můžeme přepsat ve tvaru:

$$\forall f \in C^\infty(M) : \, (\exists U = U^\circ \ni p, \; f|_U = 0 \Rightarrow X(p)f = 0)\,.$$

Uvažujeme tedy funkci f, která je nulová na okolí U bodu p. V lokálních souřadnicích lze do U vnořit otevřenou krychli se středem v bodě p. Dále zkonstruujeme pomocnou funkci $g \in C^\infty(M)$ takovou, že $(\forall q \notin U)(g(q) = 0)$ a $g(p) = 1$, sestavenou vhodným přeškálováním intervalu a kartézským součinem funkcí tvaru $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Lze snadno ověřit, že $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\lim_{x\to 1^-} g_0^{(n)}(x) = 0)$. Tudíž máme funkci gf nulovou na celé varietě M, pro níž musí platit $\widetilde{X}(fg) = 0$ a tedy

$$0 = \left(\widetilde{X}(fg)\right)(p) = \left(\widetilde{X}(f)g + f\widetilde{X}(g)\right)(p) = g(p) \cdot X(p)f + f(p) \cdot X(p)g,$$

kde $f(p) = 0$ a $g(p) = 1$. Celkem zjišťujeme, že $X(p)f = 0$, tj. $X(p)$ vyhovuje i lokalitě. Už tedy víme, že $X(p) \in T_pM$. Zbývá dokázat hladkost vzniklého vektorového pole, tj. $X \in \Gamma(TM)$. Ta vyplývá z toho, že $\widetilde{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, a tudíž složky vektorového pole v souřadnicovém vyjádření, které se dají určit způsobem $X^i(p) = \widetilde{X}(x^i)(p)$, jsou hladké funkce.

(Je vhodné si uvědomit, že díky již dokázané lokalitě $X(p)$, tj. nezávislosti $(\widetilde{X}f)(p)$ na chování f mimo okolí bodu p, lze k $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ definovat jeho zúžení $\widetilde{X}\Big|_U \in \mathcal{X}(U)$ tak, že $(\forall q \in U)\ (\forall f \in C^\infty(M))\ ((\widetilde{X}\Big|_U f)(q) = (\widetilde{X}f)(q))$. Poté můžeme $\widetilde{X}\Big|_U$ aplikovat na souřadnicové funkce $x^i : U \to \mathbb{R}$ a definovat v lokálních souřadnicích $X = \widetilde{X}\Big|_U (x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$, kde $\widetilde{X}\Big|_U (x^i) \in C^\infty(U)$.) ■

Poznámka 4.8. Nadále budeme ztotožňovat $\mathcal{X}(M)$ a $\Gamma(TM)$ a využívat definici vektorového pole vhodnější pro právě řešenou úlohu.

Věta 4.9. Množina všech derivací $\mathrm{Der}(A)$ dané algebry A tvoří Lieovu algebru.

Důkaz. To, že $\mathrm{Der}(A)$ je vektorový prostor, je zřejmé. Lieova závorka na $\mathrm{Der}(A)$ se definuje $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$. Ověření:

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2]\ m(u,v) &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)m(u,v) \\
&= D_1\left(m(D_2u, v) + m(u, D_2v)\right) - D_2\left(m(D_1u, v) + m(u, D_1v)\right) \\
&= m(D_1D_2u, v) + m(D_2u, D_1v) + m(D_1u, D_2v) + m(u, D_1D_2v) \\
&\quad - m(D_2D_1u, v) - m(D_1u, D_2v) - m(D_2u, D_1v) - m(u, D_2D_1v) \\
&= m(D_1D_2u, v) + m(u, D_1D_2v) - m(D_2D_1u, v) - m(u, D_2D_1v) \\
&= m([D_1, D_2]u, v) + m(u, [D_1, D_2]v).
\end{aligned}$$

Antisymetrie $[\cdot,\cdot]$ a Jacobiho identita vyplývají ze způsobu definice $[\cdot,\cdot]$. ■

Důsledek 4.10. $(\mathcal{X}(M), [\cdot,\cdot])$ je nekonečněrozměrná *Lieova algebra vektorových polí* na varietě M s Lieovou závorkou definovanou způsobem $(\forall X, Y \in \mathcal{X}(M))([X,Y] = X \circ Y - Y \circ X)$.

Často uvažujeme i vektorová pole definovaná na podmnožině $U \subset M$ jako $X : U \to TM$, $\pi \circ X = id|_U$. Pokud $U = U^\circ$, pak všechny vlastnosti $\mathcal{X}(M)$ platí i pro $\mathcal{X}(U)$. Jinak některé pojmy, např. $[\cdot,\cdot]$, mohou ztratit význam.

Souřadnicové vyjádření komutátoru vektorových polí vyjádříme následovně. Nechť (x^i) jsou souřadnice na $U = U^\circ$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$, $f \in C^\infty(U)$. Pak

$$\begin{aligned}[X,Y]f &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} f\right) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} f\right) \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} f - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} f = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} f\end{aligned}$$

a tedy

$$[X,Y] = \left(X(Y^j) - Y(X^j)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{4.4}$$

4.1 Cvičení

Cvičení 4.1. Určete komutátory vektorových polí

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.5}$$

na $\mathbb{R}^3[x,y,z]$. Ukažte, že $\mathbb{R}-\mathrm{span}\{X_1, X_2, X_3\}$ tvoří podalgebru v $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$.

Výsledek. $[X_1, X_2] = -X_3$, $[X_2, X_3] = -X_1$, $[X_3, X_1] = -X_2$.

Cvičení 4.2. V $\mathbb{R}[x]$ uvažujte vektorová pole $X_k = x^k \frac{\partial}{\partial x}$, $k = 0, 1, \ldots$. Ukažte, že $\mathbb{R}-\mathrm{span}\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ tvoří Lieovu algebru a že jediné její konečněrozměrné podalgebry dimenze větší než 1 generované prvky X_k jsou $\mathbb{R}-\mathrm{span}\{X_1, X_k\}$, kde $k = 0$ nebo $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ a $\mathbb{R}-\mathrm{span}\{X_0, X_1, X_2\}$.

Návod. Využijte

$$\begin{aligned}[X_k, X_l] &= X_k(x^l)\frac{\partial}{\partial x} - X_l(x^k)\frac{\partial}{\partial x} = l x^{k+l-1}\frac{\partial}{\partial x} - k x^{k+l-1}\frac{\partial}{\partial x} = \\ &= (l-k)x^{k+l-1}\frac{\partial}{\partial x} = (l-k)X_{k+l-1}.\end{aligned}$$

Cvičení 4.3. Ukažte, že obecné rychlosti v Lagrangeově mechanice se při změně obecných souřadnic transformují jako tečné vektory ke konfigurační varietě, zatímco obecné hybnosti $p_j = \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q^i}$ se transformují jinak a určete jak.

Návod. Obecné rychlosti získáváme derivací trajektorie v daném bodě, tj. jsou tečnými vektory definovanými pomocí trajektorie - křivky. Při změně souřadnic $\tilde q^j = \tilde q^j(q^k)$ transformují

$$\dot{\tilde q}^j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde q^j(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde q^j(q(t)) = \left.\frac{\partial \tilde q^j}{\partial q^k}\right|_{q(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q^k(t) = \left.\frac{\partial \tilde q^j}{\partial q^k}\right|_{q(t)} \dot q^k. \tag{4.6}$$

Obecné hybnosti se při změně souřadnic $\tilde q^j = \tilde q^j(q^k)$ transformují podle předpisu

$$\begin{aligned}\tilde p_i &= \frac{\partial \tilde L(\tilde q, \dot{\tilde q})}{\partial \dot{\tilde q}^i} = \frac{\partial L\left(q(\tilde q), \dot q(\tilde q, \dot{\tilde q})\right)}{\partial \dot{\tilde q}^i} = \left.\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q^j}\right|_{q=q(\tilde q), \dot q = \dot q(\tilde q, \dot{\tilde q})} \frac{\partial \dot q^j(q,\dot q)}{\partial \dot{\tilde q}^i} = \\ &= p_j \frac{\partial \dot q^j(q,\dot q)}{\partial \dot{\tilde q}^i} = p_j \frac{\partial q^j}{\partial \tilde q^i},\end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme využili transformaci (4.6) po záměně q a $\tilde q$. Pro zjednodušení zápisu jsme potlačili indexy v argumentech vyznačujících funkční závislosti.

Cvičení 4.4. Na varietě $M = \mathbb{R}^2[p,q]$ uvažujte tzv. Hamiltonovská vektorová pole

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q},$$

kde $H = H(p,q) \in C^\infty(M)$. Hledejte integrální křivky vektorového pole X_H pro následující volby funkce H:

1. $H = \frac{1}{2}p^2$,
2. $H = \frac{1}{2}p^2 + \kappa q$,
3. $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$,

a porovnejte je s řešením Hamiltonových pohybových rovnic pro volnou částici, konstantní silové pole a harmonický oscilátor v jednom prostorovém rozměru.

Cvičení 4.5. Ukažte, že S^3 lze chápat jako fibrovaný prostor nad $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ s vláknem S^1.

Návod. Jedná se o tzv. **Hopfovu fibraci**. Sféru S^3 uvažujeme jako jednotkovou sféru v $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$,

$$S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 |\, |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}.$$

Projekci $\pi : S^3 \to \mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ definujeme předpisem $\pi(z_1, z_2) = \mathbb{C}-\mathrm{span}\{(z_0, z_1)\}$. Vlákno nad bodem $V = \mathbb{C}-\mathrm{span}\{(z_0, z_1)\}$ je pak tvořeno všemi vektory z S^3, které svým lineárním obalem definují stejný jednorozměrný podprostor V, tj. jsou rovny $\alpha \cdot (z_0, z_1)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Vlákno nad bodem je tudíž izomorfní množině komplexních jednotek

$$\{\alpha \in \mathbb{C} |\, |\alpha| = 1\} \simeq S^1.$$

Pro dokončení popisu struktury fibrovaného prostoru $S^3 \to S^2$ zbývá zkonstruovat lokální trivializace. K tomu stačí uvážit atlas na $\mathbb{CP}^1$ z cvičení 1.4. Máme souřadnicová okolí a mapy

$$\begin{aligned} U_0 &= \{\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(1,z)\} | z \in \mathbb{C}\}, \quad \varphi_0(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(1,z)\}) = z, \\ U_1 &= \{\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(z,1)\} | z \in \mathbb{C}\}, \quad \varphi_1(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(z,1)\}) = z. \end{aligned}$$

Lokální trivializace definujeme předpisem

$$\begin{aligned} \psi_0(\alpha \cdot (1,z)) &= \left(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(1,z)\}, \frac{\alpha}{|\alpha|}\right), \qquad \forall \alpha \cdot (1,z) \in S^3, \\ \psi_1(\alpha \cdot (z,1)) &= \left(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(z,1)\}, \frac{\alpha}{|\alpha|}\right), \qquad \forall \alpha \cdot (z,1) \in S^3. \end{aligned}$$

Pro přechodovou funkci na vlákně pak nacházíme ($\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$)

$$\begin{aligned} &\psi_1\left(\psi_0^{-1}\left(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(1,z)\}, \alpha\right)\right) = \psi_1\left(\alpha \cdot \frac{(1,z)}{\sqrt{1+|z|^2}}\right) = \psi_1\left(\alpha\frac{z}{|z|} \cdot \frac{(1/z,1)}{\sqrt{1+|1/z|^2}}\right) = \\ &= \left(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(1/z,1)\}, \alpha\frac{z}{|z|}\right) = \left(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(1/z,1)\}, \tau_{01}(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(1,z)\})\alpha\right), \end{aligned}$$

tudíž přechodová funkce na vlákně má tvar $\tau_{01}(\mathbb{C}-\mathrm{span}\{(1,z)\})\alpha = \frac{z}{|z|} \cdot \alpha$.

Kapitola 5

Diferenciální formy

V každém bodě variety můžeme uvažovat i další vektorové prostory, které jsou odvozené z tečného prostoru nějakou operací, např. dualizací nebo tenzorovým součinem. Z nich pak můžeme analogicky jako v případě tečného fibrovaného prostoru dále budovat nové vektorové fibrované prostory, sloužící pro popis různých užitečných geometrických objektů na varietách.

Definice 5.1. Kotečný prostor T_p^*M k varietě M v bodě p je vektorový prostor duální k tečnému prostoru T_pM. Prvky T_p^*M obvykle značíme řeckými písmeny a nazýváme **1-formy v bodě** p, tedy

$$\omega : T_pM \to \mathbb{R}, \quad \omega(aX + Y) = a\,\omega(X) + \omega(Y), \quad \forall X, Y \in T_pM, \forall a \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Mějme lokální souřadnice (x^i) na $U = U^\circ \subset M$, $p \in U$. Pak báze T_pM má tvar $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)_{i=1}^n$. Bázi T_p^*M k ní duální, tj. funkcionály $\varphi^i \in T_p^*M : \varphi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p\right) = \delta^i_j$, značíme $\left(\mathrm{d}x^i|_p\right)_{i=1}^n$ (důvod pro toto značení bude zřejmý později, viz kapitola 6). Jinak psáno tedy $\mathrm{d}x^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p\right) = \delta^i_j$. Souřadnice 1-formy $\omega \in T_p^*M$ v bázi $(\mathrm{d}x^i|_p)$ značíme ω_i, tj.

$$\omega = \omega_i\, \mathrm{d}x^i\big|_p, \qquad \text{kde} \quad \omega_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right). \tag{5.2}$$

Při změně souřadnic $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$, $\omega = \omega_i\, \mathrm{d}x^i|_p = \tilde{\omega}_i\, \mathrm{d}\tilde{x}^i|_p$ máme

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_p = \left.\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$$

a tedy

$$\tilde{\omega}_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\right|_p \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\right|_p \omega_j. \tag{5.3}$$

V důsledku pro transformaci bazických funkcionálů platí vztahy

$$\mathrm{d}\tilde{x}^k\big|_p = \left.\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}\right|_p \mathrm{d}x^j\big|_p. \tag{5.4}$$

Definice 5.2. Podobně jako jsme zavedli tečný fibrovaný prostor, zavádíme i strukturu známou jako **kotečný fibrovaný prostor** neboli **kotečný bundle** (angl. cotangent bundle) T^*M, který obsahuje

1. totální prostor $T^*M = \coprod_{p\in M} T^*_pM$,
2. projekci $\pi : T^*M \to M$ splňující $\pi(\omega) = p$, $\forall \omega \in T^*_pM$,
3. typické vlákno $F \simeq \mathbb{R}^n$,
4. lokální trivializace – buďte $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} : \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M,\ U_\alpha = U^\circ_\alpha$ souřadnicová okolí se souřadnicemi (x^i_α), pak definujeme systém lokálních trivializací $(V_\alpha, \psi_\alpha), V_\alpha = \pi^{(-1)}(U_\alpha)$, $\psi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \times F$, kde $(\omega = \omega^\alpha_i \,\mathrm{d}x^i_\alpha|_p)$:

$$\psi_\alpha(\omega) = (p, (\omega^\alpha_i)^n_{i=1})$$

(kde α indexuje trivializace, tj. není sčítacím indexem).

Topologii na T^*M zavádíme jako topologii indukovanou vzory otevřených množin při $\psi_\alpha,\ \alpha \in I$.

Buď $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Pak z předchozí definice vyplývá, že přechodové funkce na vlákně tvaru

$$\tau_{\alpha\beta}(p)\,((\omega^\alpha_i)^n_{i=1}) = \left(\frac{\partial x^k_\alpha}{\partial x^i_\beta}\ \omega^\alpha_k\right)^n_{i=1},$$

kde $\omega = \omega^\alpha_i \,\mathrm{d}x^i_\alpha|_p = \omega^\beta_j \,\mathrm{d}x^j_\beta\big|_p$, $\psi_\beta \circ \psi^{-1}_\alpha(p, (\omega^\alpha_i(p))^n_{i=1}) = (p, \big(\omega^\alpha_k \frac{\partial x^k_\alpha}{\partial x^j_\beta}(p)\big)^n_{j=1})$, jsou *inverzemi* přechodových funkcí na vlákně tečného bundlu a tečný a kotečný bundle jsou tedy geometricky odlišné struktury. Připomeňme, že přechodové funkce na vlákně $\tau_{\alpha\beta}(p)$ jsou lineární operátory na typickém vlákně $F = \mathbb{R}^n$ a hladce závisejí na volbě bodu $p \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Z výsledků cvičení 4.3 vidíme, že zatímco pro popis stavů v Lagrangeově mechanice na konfigurační varietě M je vhodným matematickým objektem tečný fibrovaný prostor TM, pro popis stavů v Hamiltonově formulaci využíváme kotečný fibrovaný prostor T^*M. Pokud je systém explicitně závislý na čase, tak v obou případech musíme do popisu zahrnout i časovou souřadnici, tj. pracujeme na $TM[q^i, \dot q_j] \times \mathbb{R}[t]$, resp. $T^*M[q^i, p_j] \times \mathbb{R}[t]$.

Definice 5.3. Diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ na M je řez kotečného fibrovaného prostoru, $\omega \in \Gamma(T^*M)$. Většinou značíme $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$.

V lokálních souřadnicích (x^i) na souřadnicovém okolí U bodu p máme vyjádření formy $\omega \in \Gamma(T^*M)$ ve tvaru $\omega(p) = \omega_i(p)\ \mathrm{d}x^i|_p$, kde $\omega_i \in C^\infty(U)$.

Definice 5.4. Buď $1 < k \le n = \dim M$ a bod $p \in M$. Pak ***k*-forma v bodě $\boldsymbol{p}$** je k-lineární totálně antisymetrické zobrazení

$$\omega : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k\text{-krát}} \to \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Tedy pro libovolnou k–tici tečných vektorů $X_1, \ldots, X_k \in T_pM$ a libovolnou permutaci indexů $\pi \in S_k = \mathrm{Bij}(\{1, \ldots, k\})$ platí:

$$\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \omega(X_1, \ldots, X_k).$$

Vektorový prostor všech k-forem v bodě p značíme $\Lambda^k(T^*_pM)$ nebo $\boldsymbol{\Lambda^k_pM}$, $\dim \Lambda^k_pM = \binom{n}{k}$.

Buď $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)_{i=1}^n$ báze T_pM, $\left(\mathrm{d}x^i|_p\right)_{i=1}^n$ báze T_p^*M, $i_1,\ldots,i_k \in \hat{n}$. Bazické vektory prostoru $\Lambda_p^k M$ značíme $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge \mathrm{d}x^{i_k}|_p$, kde $i_1<i_2<\ldots<i_k$. Definujeme je způsobem:

$$\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\bigg|_p,\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\bigg|_p\right)=\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sgn}\pi\,\delta_{j_1}^{i_{\pi(1)}}\ldots\delta_{j_k}^{i_{\pi(k)}},\quad j_1,\ldots,j_k=1,\ldots,n. \tag{5.6}$$

Symbol $\wedge$ se nazývá **skobka** (angl. wedge).

Pro další použití můžeme rovnicí (5.6) definovat k–formy $\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}|_p$ i pro libovolné seřazení indexů, ty ale pak již netvoří bázi z důvodu jejich zřejmé lineární závislosti.

Příklad 5.5. $\mathbb{R}^3[x^1,x^2,x^3]: \mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^1}\right)=-1$, $\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3\left(\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^1}\right)=0$

Pro snadnější práci s k–formami zavádíme tzv. **multiindexy**, kde $j_1,\ldots,j_k\in\{1,\ldots,n\}$ a $|J|=k$ označuje délku multiindexu. Máme

- $J=(j_1,\ldots,j_k)$ obecný multiindex délky k,
- $\vec{J}=(j_1,\ldots,j_k),\ 1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n$ vzestupně uspořádaný multiindex,
- $\delta_J^I=\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sgn}\pi\,\delta_{j_1}^{i_{\pi(1)}}\ldots\,\delta_{j_k}^{i_{\pi(k)}}$, tj. δ_J^I je různé od nuly pouze, pokud J je permutací I, pak znaménko permutace určuje, zda je δ_J^I rovna $+1$ nebo -1,
- $\mathrm{d}x^{\vec{J}}=\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{j_k}$,
- $\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right)=\delta_J^I$.

Souřadnicové vyjádření $\omega\in\Lambda_p^kM$ pak můžeme psát

$$\omega=\sum_{j_1<\ldots<j_k}\omega_{j_1\ldots j_k}\,\mathrm{d}x^{j_1}\big|_p\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{j_k}\big|_p=\omega_{\vec{J}}\,\mathrm{d}x^{\vec{J}}\Big|_p, \tag{5.7}$$

kde $\omega_{\vec{J}}=\omega_{j_1\ldots j_k}=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\big|_p,\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\big|_p\right)$. Tudíž $(\mathrm{d}x^{i_1}|_p\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}|_p)_{i_1<\ldots<i_k}$ neboli $\mathrm{d}x^{\vec{I}}\Big|_p$ tvoří bázi vektorového prostoru Λ_p^kM (jehož dimenze je rovna $\binom{n}{k}$).

Podobně jako v případě tečného a kotečného prostoru konstruujeme disjunktním sjednocením Λ_p^kM vektorový fibrovaný prostor značený $\Lambda^k(T^*M)$ nebo Λ^kM,

$$\Lambda^k(T^*M)=\coprod_{p\in M}\Lambda^k(T_p^*M). \tag{5.8}$$

Jeho bazickou varietou je M, projekcí $\pi:\Lambda^kM\to M$, kde $\pi(\omega)=p$ pro $\omega\in\Lambda_p^kM$, a typickým vláknem $F=\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Lokální trivializace na prostoru Λ^kM zavádíme pomocí atlasu $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ na varietě M způsobem $\psi_\alpha:\pi^{(-1)}(U_\alpha)\to U_\alpha\times F$, kde $p\in U_\alpha$, $\omega\in\Lambda_p^kM$, $\omega=\omega_{\vec{J}}\,\mathrm{d}x_\alpha^{\vec{J}}\Big|_p$, $(\omega_{j_1,\ldots,j_k})_{j_1<j_2<\ldots<j_k}$ je $\binom{n}{k}$-tice čísel:

$$\psi_\alpha(\omega_{\vec{J}}\,\mathrm{d}x^{\vec{J}}|_p)=(p,(\omega_{j_1,\ldots,j_k})_{j_1<j_2<\ldots<j_k}).$$

Definice 5.6. Řez $\omega\in\Gamma(\Lambda^kM)$ nazýváme **diferenciální *k*-forma** na varietě M. Značíme $\Omega^k(M)=\Gamma(\Lambda^kM)$.

Poznamenejme, že je možné též používat vyjádření diferenciální k-formy jako antisymetrického multilineárního zobrazení z kartézského součinu prostorů vektorových polí do hladkých funkcí na varietě,

$$\begin{aligned}\Omega^k(M) = \{\, \omega : \mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M) |\ & (\forall X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M))(\forall \pi \in S_k) \\ & \Rightarrow (\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}\pi\ \omega(X_1, \ldots, X_k)) \text{ a současně} \\ & (\forall p \in M)(\forall X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k \in \mathcal{X}(M))(\forall j \in \{0, 1, \ldots, k\} : X_j(p) = Y_j(p)) \\ & \Rightarrow (\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega(Y_1, \ldots, Y_k)(p))\}.\end{aligned}$$

Označme $\Lambda^0_p M \equiv \mathbb{R}$.

Direktním součtem všech nenulových $\Lambda^k_p M$ (tj. $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, kde $n = \dim M$) dostáváme 2^n-rozměrný vektorový prostor $\Lambda^\bullet_p M$, tedy:

$$\Lambda^\bullet_p M = \Lambda^0_p M \oplus \Lambda^1_p M \oplus \ldots \oplus \Lambda^n_p M.$$

K němu příslušný vektorový fibrovaný prostor (tj. vybudovaný podobně jako výše) značíme $\Lambda^\bullet(T^*M)$ nebo $\Lambda^\bullet M$. Prostor jeho řezů značíme $\Omega^\bullet(M) = \Gamma(\Lambda^\bullet M)$.

Definice 5.7. Prvky $\Omega^\bullet(M)$ nazýváme **diferenciální formy** na varietě M.

Každá diferenciální forma $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ se dá jednoznačně rozložit na $\omega(p) = \sum_{k=0}^n \omega^{(k)}$, kde $\omega^{(k)} \in \Omega^k(M)$, tj. lokálně:

$$\omega(p) = \sum_{k=0}^{n} \omega^{(k)}, \quad \text{kde} \quad \omega^{(k)}(p) = \sum_{|J|=k} \omega_{\vec{J}}(p) \mathrm{d}x^{\vec{J}}.$$

5.1 Cvičení

Cvičení 5.1. V $\mathbb{R}^3$ uvažujte kartézské souřadnice (x, y, z) a sférické souřadnice (r, θ, φ) (viz (2.8)). Následující diferenciální formy převeďte z jedněch souřadnic do druhých

$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$.

Výsledek.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= \sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}y &= \sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}z &= \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \\ x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z &= r\,\mathrm{d}r, \\ y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y &= -r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z &= r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}r &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z\right), \\ \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{xz\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{yz\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z\right), \\ \mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{x^2+y^2}\left(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\right), \\ \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Cvičení 5.2. Na sféře S^2 uvažujte stereografické souřadnice (u,v), (U,V) a sférické souřadnice (θ,φ):

$$(u,v)=\left(\frac{\sin\theta\cos\varphi}{1-\cos\theta},\frac{-\sin\theta\sin\varphi}{1-\cos\theta}\right).$$

Převeďte 1–formy $\mathrm{d}U$, $\mathrm{d}V$ do souřadnic (u,v) a 2–formu $\omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$ do souřadnic (u,v), (U,V).

Výsledek.

$$\mathrm{d}U=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left((v^2-u^2)\mathrm{d}u-2uv\mathrm{d}v\right),\quad \mathrm{d}V=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left(2uv\mathrm{d}u+(v^2-u^2)\mathrm{d}v\right),$$
$$\omega=\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\frac{4}{(1+U^2+V^2)^2}\mathrm{d}U\wedge\mathrm{d}V.$$

Cvičení 5.3. Na varietě M dimenze n uvažujte dva souřadné systémy $(x^1,\ldots,x^n)$ a $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$. Ukažte, že pro

$$\omega=\omega_{12\ldots n}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^n=\tilde{\omega}_{12\ldots n}\mathrm{d}\tilde{x}^1\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^n\in\Omega^n(M)$$

platí

$$\tilde{\omega}_{12\ldots n}=\omega_{12\ldots n}\det\frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)}.$$

Návod. Ze vztahu (5.6) zapište vzorec pro transformaci formy maximálního stupně pomocí determinantu odpovídající Jacobiho matice $\frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)}$. Máme $\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^k}=\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^k}\frac{\partial}{\partial x^j}$ a tedy platí

$$\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^n\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^n}\right)=\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^1}\ldots\frac{\partial x^{j_n}}{\partial\tilde{x}^n}\mathrm{d}x^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^n\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_n}}\right)$$
$$=\sum_{\pi\in S_n}\frac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial\tilde{x}^1}\ldots\frac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial\tilde{x}^n}\mathrm{d}x^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^n\left(\frac{\partial}{\partial x^{\pi(1)}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{\pi(n)}}\right)=\sum_{\pi\in S_n}\frac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial\tilde{x}^1}\ldots\frac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial\tilde{x}^n}\mathrm{sgn}\pi=$$
$$=\det\frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)},$$

což implikuje dle rovnice (5.7)

$$\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^n=\det\frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)}\mathrm{d}\tilde{x}^1\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^n.$$

Kapitola 6

Operace s diferenciálními formami

Na prostorech k–forem v konkrétním bodě $p \in M$ a na řezech fibrovaných prostorů diferenciálních forem lze zavést několik užitečných operací, které z určitého úhlu ohledu je možné chápat jako zobecnění tzv. vektorové analýzy známé z fyziky pro $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, viz cvičení 6.1. Nyní se jimi budeme zabývat abstraktně, příklady jejich využití budou podrobněji nastíněny zejména v kapitole 9.

Definice 6.1. Na vektorovém prostoru $\Lambda_p^\bullet M$ zavádíme binární operaci zvanou **vnější součin** následujícím způsobem ($\tau \in \Lambda_p^k M,\ \omega \in \Lambda_p^l M,\ X_1, \ldots, X_{k+l} \in T_p M$):

$$\tau \wedge \omega\,(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \sum_{\substack{\vec{I}, \vec{J} \\ |I|=k, |J|=l}} \delta^{\vec{I}\,\vec{J}}_{(1,\ldots,k+l)}\ \tau\,(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})\ \omega\,(X_{j_1}, \ldots, X_{j_l})\,. \tag{6.1}$$

Pro obecné prvky $\tau, \omega \in \Lambda_p^\bullet M$ vnější součin definujeme distributivně:

$$\tau = \tau^{(0)} + \tau^{(1)} + \ldots + \tau^{(n)},\ \omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \ldots + \omega^{(n)} \Rightarrow \tau \wedge \omega = \sum_{a,b=0}^{n} \tau^{(a)} \wedge \omega^{(b)}.$$

Z této definice je zřejmé, že $\tau \wedge \omega \in \Lambda_p^{k+l} M$ (multilinearita je vidět po roznásobení pravé strany, antisymetrie využitím $\operatorname{sgn} \pi_1 \circ \pi_2 = \operatorname{sgn} \pi_1 \cdot \operatorname{sgn} \pi_2$).

Příklad 6.2. Nechť $\tau = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ a $\omega = \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$. Pak

$$\tau \wedge \omega = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}.$$

Věta 6.3. Vnější součin splňuje následující vlastnosti:

1. bilinearita, tj.

   $(a\tau_1 + \tau_2) \wedge \omega = a\tau_1 \wedge \omega + \tau_2 \wedge \omega,\ \tau \wedge (a\omega_1 + \omega_2) = a\tau \wedge \omega_1 + \tau \wedge \omega_2,$ kde $\omega_\ldots, \tau_\ldots \in \Lambda_p^\bullet M,\ a \in \mathbb{R},$

2. $\tau \wedge \omega = (-1)^{k \cdot l}\ \omega \wedge \tau,$ kde $\omega \in \Lambda_p^k M,\ \tau \in \Lambda_p^l M,$

3. asociativita, tj. $(\sigma \wedge \tau) \wedge \omega = \sigma \wedge (\tau \wedge \omega) \equiv \sigma \wedge \tau \wedge \omega,$ kde $\sigma, \tau, \omega \in \Lambda_p^\bullet M.$

Důkaz. Bilinearita je zřejmá. Druhá z vlastností se ukáže následovně. Nechť $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$. Pak:

$$\begin{aligned}\tau \wedge \omega\,(X_1,\dots,X_{k+l}) &= \omega \wedge \tau\,(X_{l+1},\dots,X_{k+l},X_1,\dots,X_l)\\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1, & \dots & ,k, & k+1,\dots,k+l\\ l+1,\dots,k+l,1, & \dots & ,l\end{pmatrix}\,\omega\wedge\tau\,(X_1,\dots,X_{k+l})\\ &= (-1)^{k\cdot l}\,\omega\wedge\tau\,(X_1,\dots,X_{k+l}).\end{aligned}$$

A konečně, důkaz asociativity vyplývá z následujícího řetězce úprav. Nechť $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$, $\sigma \in \Lambda_p^m M$. Pak ($X_{\vec{I}} \equiv (X_{i_1},\dots,X_{i_k})$):

$$\begin{aligned}\omega\wedge(\tau\wedge\sigma)(X_1,\dots,X_{k+l+m}) &= \sum_{\substack{\vec{I},\vec{M}\\ |I|=k,|M|=l+m}} \delta^{\vec{I}\,\vec{M}}_{(1,\dots,k+l+m)}\;\omega\left(X_{\vec{I}}\right)\;(\tau\wedge\sigma)\left(X_{\vec{M}}\right)\\ &= \sum_{\substack{\vec{I},\vec{M}\\ |I|=k,|M|=l+m}}\;\sum_{\substack{\vec{J},\vec{K}\\ |J|=l,|K|=m}} \delta^{\vec{I}\,\vec{M}}_{(1,\dots,k+l+m)}\;\delta^{\vec{J}\,\vec{K}}_{\vec{M}}\;\omega\left(X_{\vec{I}}\right)\tau\left(X_{\vec{J}}\right)\sigma\left(X_{\vec{K}}\right)\\ &= \sum_{\substack{\vec{I},\vec{J},\vec{K}\\ |I|=k,|J|=l,|K|=m}} \delta^{\vec{I}\,\vec{J}\,\vec{K}}_{(1,\dots,k+l+m)}\;\omega\left(X_{\vec{I}}\right)\;\tau\left(X_{\vec{J}}\right)\;\sigma\left(X_{\vec{K}}\right).\end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme využili skutečnost, že $\delta^{\vec{I}\,\vec{M}}_{O}\;\delta^{\vec{J}\,\vec{K}}_{\vec{M}} = \delta^{\vec{I}\,\vec{J}\,\vec{K}}_{O} = \delta^{\vec{N}\,\vec{K}}_{O}\delta^{\vec{I}\,\vec{J}}_{\vec{N}}$. Pro formu $(\omega\wedge\tau)\wedge\sigma$ bychom dostali tentýž výsledek pro $((\omega\wedge\tau)\wedge\sigma)\,(X_1,\dots,X_{k+l+m})$. ■

V lokálních souřadnicích (x^i) máme $\tau = \tau_{\vec{I}}\,\mathrm{d}x^{\vec{I}} \in \Lambda_p^k M,\ |I|=k,\ \omega = \omega_{\vec{J}}\,\mathrm{d}x^{\vec{J}} \in \Lambda_p^l M,\ |J|=l$, a tedy:

$$\begin{aligned}\tau\wedge\omega = \tau_{\vec{I}}\cdot\omega_{\vec{J}}\;\mathrm{d}x^{\vec{I}}\wedge\mathrm{d}x^{\vec{J}} &= (\tau\wedge\omega)_{\vec{A}}\,\mathrm{d}x^{\vec{A}}, \qquad (6.2)\\ \text{kde } (\tau\wedge\omega)_{\vec{A}} = (\tau\wedge\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x^{a_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{a_{k+l}}}\right) &= \delta^{\vec{I}\,\vec{J}}_{\vec{A}}\;\tau_{\vec{I}}\;\omega_{\vec{J}},\\ \mathrm{d}x^{\vec{I}}\wedge\mathrm{d}x^{\vec{J}} = \delta^{\vec{I}\,\vec{J}}_{\vec{A}}\mathrm{d}x^{\vec{A}},\ |A| &= k+l.\end{aligned}$$

Takto zkonstruovanou 2^n-rozměrnou asociativní nekomutativní algebru $\Lambda_p^\bullet M$ s operací vnější součin nazýváme **vnější algebra** v bodě $p \in M$. Vnější součin zavádíme i na $\Omega^\bullet(M)$ způsobem:

$$(\tau\wedge\omega)(p) = \tau(p)\wedge\omega(p), \quad \tau,\omega\in\Omega^\bullet(M),\ p\in M.$$

Tím se $\Omega^\bullet(M)$ stává algebrou. Je však současně též tzv. $C^\infty(M)$**-modulem**, neboť máme násobení $\omega\in\Omega^\bullet(M)$ libovolnou funkcí $f\in C^\infty(M)$: $(f\omega)(p) = f(p)\omega(p)$ a platí $f(\omega_1+\omega_2) = (f\omega_1)+(f\omega_2)$, $(fg)\omega = f(g\omega)$. Struktury $C^\infty(M)$-modulu a algebry na $\Omega^\bullet(M)$ jsou kompatibilní ve smyslu:

$$(f\tau)\wedge\omega = \tau\wedge(f\omega) = f(\tau\wedge\omega), \quad f\in C^\infty(M),\ \tau,\omega\in\Omega^\bullet(M). \qquad (6.3)$$

Definice 6.4. Na prostoru diferenciálních forem $\Omega^\bullet(M)$ zavádíme **vnější derivaci**, což je lineární zobrazení $\mathrm{d}:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$ vyhovující následujícím podmínkám:

1. $\mathrm{d}(\tau\wedge\omega) = \mathrm{d}\tau\wedge\omega + (-1)^k\tau\wedge\mathrm{d}\omega$, kde $k\in\{0,1,\dots,n\}$, $\tau\in\Omega^k(M)$, $\omega\in\Omega^\bullet(M)$,

2. $\mathrm{d}f(X) = Xf, \quad \text{kde } f \in C^\infty(M) \equiv \Omega^0(M),\ X \in \mathcal{X}(M),$

3. $\mathrm{d}^2\omega = 0, \quad \omega \in \Omega^\bullet(M).$

Druhá podmínka v lokálních souřadnicích (x^i) znamená, že $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$, tj. vnější derivace funkce je prostě její derivací (totálním diferenciálem). Současně je zřejmý význam označení bazických 1-forem $\mathrm{d}x^i$. Jsou to skutečně diferenciály souřadnicových funkcí x^i.

Věta 6.5. Operátor vnější derivace na varietě M existuje a je definujícími podmínkami určen jednoznačně.

Důkaz. Existenci a jednoznačnost operátoru d ukážeme v souřadnicích. Pak ukážeme, že na výběru souřadnic nezávisí.

V souřadnicích (x^i) na okolí $p \in M$ budeme zkoumat $\mathrm{d}\omega(p)$, nejprve pro $f \in C^\infty(M)$. Obecně máme $\mathrm{d}f = (\mathrm{d}f)_i\,\mathrm{d}x^i$ a tedy $\mathrm{d}f(X) = (\mathrm{d}f)_i\,X^i$ pro libovolný tečný vektor $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$. Z druhé vlastnosti vnější derivace současně vyplývá, že $\mathrm{d}f(X) = Xf = X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$. Celkem tedy zjišťujeme, že $(\mathrm{d}f)_i\,(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ a $\mathrm{d}f(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,\mathrm{d}x^i$.

Využitím první vlastnosti pro formu $\omega = \omega_{\vec{J}}\mathrm{d}x^{\vec{J}}$ definujeme

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_{\vec{J}} \wedge \mathrm{d}x^{\vec{J}} = \frac{\partial \omega_{\vec{J}}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{\vec{J}}. \tag{6.4}$$

Dále ověříme, zda takto definovaná operace splňuje vlastnosti $\mathrm{d}^2 = 0$, $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \ldots$ pro formy ve tvaru $\omega_a = f_a\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}$ (dále rozšiřujeme linearitou):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k},\\
\mathrm{d}^2\omega &= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}}_{\text{sym. v } i,j}\ \underbrace{\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i}_{\text{antisym. v } i,j} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \mathrm{d}(f_1 f_2)\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_l}\\
&= (f_2\,\mathrm{d}f_1 + f_1\,\mathrm{d}f_2) \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_l}\\
&= (\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}) \wedge (f_2\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_l})\\
&\quad + (-1)^k (f_1\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}) \wedge (\mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_l})\\
&= \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2.
\end{aligned}$$

Při změně souřadnic máme $\omega = f\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = f\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}}\,\mathrm{d}\tilde{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{j_k}$ a

tedy vnější derivace formy ω definovaná předpisem (6.4) v souřadnicích $\tilde{x}^i$ vychází

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{d}}\omega &= \mathrm{d}\left(f\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial\tilde{x}^{j_k}}\right)\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^{j_k}\\
&= \mathrm{d}f\wedge\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial\tilde{x}^{j_k}}\right)\mathrm{d}\tilde{x}^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^{j_k}\\
&\quad + f\left(\Bigg(\underbrace{\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{j}\partial\tilde{x}^{j_1}}}_{\text{sym v } j_1,j}\cdots\Bigg)\underbrace{\mathrm{d}\tilde{x}^{j}\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^{j_1}}_{\text{antisym v } j_1,j}\wedge\ \ldots\ +\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{j_1}}\underbrace{\frac{\partial^2 x^{i_2}}{\partial\tilde{x}^{j}\partial\tilde{x}^{j_2}}}_{\text{sym. v } j_2,j}\cdots\right)\underbrace{\mathrm{d}\tilde{x}^{j}\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^{j_1}\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^{j_2}\wedge\ \ldots}_{\text{antisym. v } j_2,j}\ +\ \ldots\right)\\
&= \mathrm{d}f\wedge\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial\tilde{x}^{j_k}}\right)\mathrm{d}\tilde{x}^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^{j_k}\\
&= \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}=\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že takto definovaná operace d nezávisí na volbě lokálních souřadnic. ■

Speciální třídy k-forem

- diferenciální forma $\omega\in\Omega^\bullet(M)$ je **uzavřená** právě tehdy, když $\mathrm{d}\omega=0$,
- diferenciální forma $\omega\in\Omega^\bullet(M)$ je **exaktní** právě tehdy, když existuje $\tau\in\Omega^\bullet(M)$: $\omega=\mathrm{d}\tau$.

Všimněme si, že exaktní forma je automaticky též uzavřená. Ve fyzice o diferenciální formě τ často mluvíme jako o potenciálu pro formu ω. Potenciál může být skalární, pokud τ je funkce, vektorový, pokud τ je 1–forma apod.

Později, v kapitole 11 ukážeme, že pro libovolnou uzavřenou formu $\omega\in\Omega^k(M),\ k\geq 1$ a bod $p\in M$ existuje jeho okolí $U=U^0$, $p\in U$ a $\tau\in\Omega^{k-1}(U)$ takové, že $\omega|_U=\mathrm{d}\tau$.

Definice 6.6. Uvažujme bod $p\in M$, k–formu $\omega\in\Lambda^k_pM$ a tečný vektor $X\in T_pM$. $(k-1)$-formu v bodě p definovanou předpisem

$$i_X\omega(X_1,\ldots,X_{k-1})=\omega(X,X_1,\ldots,X_{k-1}). \tag{6.5}$$

nazýváme **vnitřní součin** či **zúžení** X a ω a značíme $i_X\omega\equiv X\llcorner\omega$.

Pro $\omega\in\Omega^k(M)$, $X\in\mathcal{X}(M)$ je vnitřní součin definován bodově. Speciálně pro $\omega\in\Lambda^1_pM=T^*_pM$ nebo $\omega\in\Omega^1(M)$ se zavádí značení $i_X\omega=\omega(X)\equiv\langle\omega,X\rangle\equiv\langle X,\omega\rangle$, kde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je párování T_pM a $T^*_pM\equiv\Lambda^1_pM$.

6.1 Cvičení

Cvičení 6.1. V $\mathbb{R}^3$ popsaném v kartézských souřadnicích definujme následující přiřazení

$$A=A^x\frac{\partial}{\partial x}+A^y\frac{\partial}{\partial y}+A^z\frac{\partial}{\partial z}\in\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)\leftrightarrow A^{(1)}=A^x\mathrm{d}x+A^y\mathrm{d}y+A^z\mathrm{d}z\in\Omega^1(\mathbb{R}^3)$$
$$\leftrightarrow A^{(2)}=A^x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+A^y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+A^z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\in\Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Ukažte explicitním výpočtem, že pak platí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= (\mathrm{grad} f)^{(1)}, \\ \mathrm{d}A^{(1)} &= (\mathrm{rot} A)^{(2)}, \\ \mathrm{d}A^{(2)} &= (\mathrm{div} A)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Dále ukažte, že $\mathrm{d}^2 = 0$ je ekvivalentní identitám $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$ a $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$.

Tento příklad naznačuje, že při využívání křivočarých souřadnic, ve kterých není zřejmé, jak zapsat Maxwellovy rovnice, je pro popis intenzity elektrického pole vhodné využívat 1–formu, pro popis vektoru magnetické indukce 2–formu. Později uvidíme, že tomu tak skutečně je a budeme schopni Maxwellovy rovnice psát přirozeným způsobem v libovolném souřadném systému.

Uvedené ztotožnění je závislé na výběru souřadnic, pokud ho chceme definovat obecně, potřebujeme pojmy metrika a Hodgeův duál, viz kapitola 12.

Cvičení 6.2. V $\mathbb{R}^2$ uvažujte kartézské a polární souřadnice. Podobně jako v předchozím příkladě definujme

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2).$$

Nalezněte vyjádření vektorového pole $\mathrm{grad} f$ v polárních souřadnicích a porovnejte jej s výrazem pro vnější derivaci funkce $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Výsledek.

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

Cvičení 6.3. Magnetický monopól je hypotetická konfigurace magnetického pole formálně stejného tvaru jako elektrické pole bodového náboje. Uvažujte vektor magnetické indukce odpovídající magnetickému monopólu lokalizovanému v počátku kartézských souřadnic v $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{g}{r^3}\vec{x} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}).$$

Přiřaďte mu příslušnou 2–formu magnetické indukce $B = (\vec{B})^{(2)}$. Ukažte, že B je uzavřená, tj. $\vec{B}$ vyhovuje Maxwellově rovnici $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Ve sférických souřadnicích nalezněte formy A_N, A_S na $U_N = \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{(}0, 0, z) | z \leq 0\}$, $U_S = \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{(}0, 0, z) | z \geq 0\}$ takové, že $B|_{U_N} = \mathrm{d}A_N$, $B|_{U_S} = \mathrm{d}A_S$.

Výsledek.

$$\begin{aligned} B &= g \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi, \\ A_N &= g(1 - \cos\theta)\mathrm{d}\varphi = g\frac{z - r}{r(x^2 + y^2)}(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y), \\ A_S &= -g(1 + \cos\theta)\mathrm{d}\varphi = g\frac{z + r}{r(x^2 + y^2)}(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y), \end{aligned}$$

a ověřte, že A_N, A_S je limitou možné hladce dodefinovat na celém U_N, resp. U_S.

Cvičení 6.4. Na varietě $S^2[u,v]$ uvažujte formu $\omega = \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\,(2uv\mathrm{d}u + (v^2-u^2)\mathrm{d}v)$. Určete $\mathrm{d}\omega$. Dále hledejte $\alpha \in \Omega^1(S^2)$ takové, že $\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v}{(1+u^2+v^2)^2}$.

Výsledek. Máme

$$\mathrm{d}\omega = 0,$$

což souvisí s tím, že v souřadnicích (U,V) máme $\omega = \mathrm{d}V$. Formu $\alpha \in \Omega^1(S^2)$ se nepodaří nalézt. Později uvidíme důkaz, že to nelze, jakékoliv lokálně dobře definované řešení při pokusu o rozšíření na celou sféru S^2 někde diverguje (tj. zadané $\mathrm{d}\alpha$ je příkladem formy uzavřené, ale nikoliv exaktní). Lokálně α existuje, např. v podobě

$$\begin{aligned}\alpha = -\frac{1}{4}\,(1+\cos\theta)\,\mathrm{d}\phi &= \frac{1}{2(1+u^2+v^2)}\,(u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u)\\ &= \frac{1}{2(1+U^2+V^2)(U^2+V^2)}\,(V\mathrm{d}U - U\mathrm{d}V)\,.\end{aligned}$$

Kapitola 7

Zobrazení indukovaná zobrazením variet, podvariety

Uvažujme dvě variety M a N a hladké zobrazení $\phi : M \to N$. Budeme nyní zkoumat, jaká zobrazení lze na základě zobrazení $\phi : M \to N$ definovat mezi různými vektorovými prostory definovanými v bodech variet M a N a mezi prostory řezů odpovídajících vektorových fibrovaných prostorů s bázovými varietami M a N. Dále budeme analyzovat, ve kterých situacích je třeba se omezit pouze na zobrazení se speciálními vlastnostmi, např. difeomorfizmy.

7.1 Tečné a kotečné zobrazení

Definice 7.1. Tečné zobrazení $\phi_\star$ v bodě $p \in M$ indukované zobrazením ϕ je zobrazení $\phi_\star : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ definované předpisem

$$(\phi_\star(X))f = X(f \circ \phi), \qquad X \in T_pM,\ f \in C^\infty(N). \tag{7.1}$$

Z definice vidíme, že zobrazení $\phi_\star$ je lineární. V souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ$, kde $p \in U$, (y^a) na $V = V^\circ$, kde $\phi(p) \in V$, máme $\phi_\star$ vyjádřené předpisem $\phi_\star(X) = (\phi_\star(X))^a \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}$ a tedy

$$\phi_\star(X) = X^i \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}, \tag{7.2}$$

jak vyplývá ze vztahu $(\phi_\star(X))^a = (\phi_\star(X))y^a = X(\varphi^a)$, kde $\varphi^a = y^a \circ \phi$, $X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

Definice 7.2. Kotečné zobrazení $\phi^\star$ v bodě $\phi(p) \in N$ indukované zobrazením ϕ je zobrazení $\phi^\star : T^*_{\phi(p)}N \to T^*_pM$ definované předpisem

$$(\phi^\star(\omega))X = \omega(\phi_\star(X)), \qquad X \in T_pM,\ \omega \in T^*_{\phi(p)}N. \tag{7.3}$$

V souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ$, kde $p \in U$, (y^a) na $V = V^\circ$, kde $\phi(p) \in V$, máme pro $\phi^\star$ vyjádření $\phi^\star(\omega) = (\phi^\star(\omega))_i \left.\mathrm{d}x^i\right|_p$, $\omega = \omega_a \left.\mathrm{d}y^a\right|_{\phi(p)}$, $\phi_\star\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}$ (viz výše), z čehož plyne vztah $(\phi^\star(\omega))_i = \omega\left(\phi_\star\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)\right) = \omega_a \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p$ a tedy

$$\phi^\star(\omega) = \omega_a \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p \left.\mathrm{d}x^i\right|_p .$$

Kotečné zobrazení $\phi^\star$ můžeme dále přirozeně rozšířit na $\phi^\star : \Lambda^k_{\phi(p)}N \to \Lambda^k_p M$ následujícím způsobem:

$$(\phi^\star(\omega))(X_1,\dots,X_k) = \omega(\phi_\star(X_1),\dots,\phi_\star(X_k)), \qquad X_1,\dots,X_k \in T_pM,\, \omega \in \Lambda^k_{\phi(p)}N. \tag{7.4}$$

Dále budeme obvykle místo $\phi_\star(X)$, resp. $\phi^\star(\omega)$, psát $\phi_\star X$, resp. $\phi^\star\omega$.

7.2 Indukovaná zobrazení řezů fibrovaných prostorů

Máme definována zobrazení $\phi_\star$ v bodě p, $\phi^\star$ v bodě $\phi(p)$. Lze je rozšířit na zobrazení celého $\mathcal{X}(M)$, resp. $\Omega^\bullet(M)$? V případě kotečného zobrazení ano. Pro libovolnou k-formu $\omega \in \Omega^k(N)$ definujeme $\phi^\star(\omega) \in \Omega^k(M)$ předpisem

$$(\phi^\star\omega)(p)(X_1,\dots,X_k) = \omega(\phi(p))(\phi_\star(X_1|_p),\dots,\phi_\star(X_k|_p))), \qquad X_1,\dots,X_k \in \mathcal{X}(M) \tag{7.5}$$

(linearita, antisymetrie, závislost pouze na $X_i(p)$ je zřejmá, hladkost je vidět v lokálních souřadnicích).

Pro $f \in C^\infty(N)$ definujeme $\phi^\star f = f \circ \phi$, z čehož plyne vztah $(\phi_\star X)f = X(\phi^\star f)$.

Příklad 7.3. Pro $\gamma : \mathbb{R}[t] \to M$ máme $\gamma_\star \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\big|_{t=0} = [\gamma]$. Obecněji: $\gamma_\star \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\big|_t = \dot\gamma(t)$.

Definice 7.4. Výše zavedené zobrazení $\phi^\star : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ nazýváme **pullback** při zobrazení $\phi : M \to N$.

Naopak $\phi_\star : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ obecně definovat nelze. Důvody jsou dva:

1. $(\phi_\star X)(\phi(p)) \equiv \phi_\star(X|_p)$ není definován na celém N, ale jen na $\phi(M)$,
2. $(\phi_\star X)(\phi(p))$ nemusí být korektně definováno: pokud existují dva body $p, \tilde p \in M$ takové, že $\phi(p) = \phi(\tilde p)$ a současně platí $\phi_\star(X_p) \neq \phi_\star(X_{\tilde p}) \in T_{\phi(p)}N$, pak není jasné, kterou hodnotu bychom měli pro $\phi_\star X$ v bodě $\phi(p)$ vybrat.

Pokud je ϕ difeomorfizmus, pak $\phi_\star : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ existuje a je definováno předpisem

$$(\phi_\star X)(\phi(p)) = \phi_\star(X|_p). \tag{7.6}$$

Pokud je ϕ pouze prosté, ale nikoliv surjektivní, je $\phi_\star X$ definováno jako prvek $\mathcal{X}(\phi(M))$, kde $\phi(M)$ není nutně otevřená množina. Podobně, pokud pro dané ϕ a X nevzniká problém s nejednoznačností, můžeme použít pro výsledek konstrukce bod po bodu označení $\phi_\star X$.

Máme-li difeomorfizmus $\phi : M \to N$, můžeme definovat též $\phi^\star : \mathcal{X}(N) \to \mathcal{X}(M)$ jako

$$(\phi^\star X)f = X(f \circ \phi^{-1}),\ \text{kde } f \in C^\infty(M),\ \text{tj. } \phi^\star X = (\phi^{-1})_\star X,\ \text{neboli } \phi^\star \circ \phi_\star = \mathrm{id}|_{\mathcal{X}(M)}\,.$$

Všimněme se, že změna souřadnic na $U = U^\circ$ je speciálním případem difeomorfizmu $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na $\tilde U \subset \mathbb{R}^n$ a dříve zavedené změny složek vektoru, resp. formy, při změně souřadnic je možné odvodit z obecných vztahů pro tečné, resp. kotečné, zobrazení.

Při skládání zobrazení $\phi : M \to N$, $\psi : N \to O$ dostáváme pro tečné a kotečné zobrazení identity

$$(\psi \circ \phi)_\star = \psi_\star \circ \phi_\star, \quad (\psi \circ \phi)^\star = \phi^\star \circ \psi^\star. \tag{7.7}$$

Dosazením do definice vnějšího součinu a z definice $\phi^\star$ dále obdržíme vztah

$$\phi^\star(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^\star\omega_1 \wedge \phi^\star\omega_2. \tag{7.8}$$

Připomeňme se, že odvození použité při důkazu nezávislosti $\mathrm{d}\omega$ na výběru souřadnic, viz důkaz věty 6.5, není přímo závislé na tom, že se jednalo o difeomorfismus. Tudíž platí pro libovolnou diferenciální formu $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ a zobrazení ϕ vztah $\mathrm{d}\phi^\star\omega = \phi^\star\mathrm{d}\omega$, tj.

$$\mathrm{d}_M \circ \phi^\star = \phi^\star \circ \mathrm{d}_N, \tag{7.9}$$

kde d_M, resp. d_N, je vnější derivace na varietě M, resp. N.

Věta 7.5. Buď $\phi : M \to N$, $p \in M$, $X \in T_pM$, $\omega \in \Lambda^k_{\phi(p)}N$. Pak platí

$$\phi^\star(i_{\phi_\star(X)}\omega) = i_X(\phi^\star\omega). \tag{7.10}$$

Důkaz. Dosazením. ■

Na $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ lze tvrzení věty 7.5 aplikovat, pokud ϕ je difeomorfizmus.

Věta 7.6. Pro difeomorfizmus $\phi : M \to N$ platí pro libovolnou dvojici $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\phi_\star[X, Y] = [\phi_\star(X), \phi_\star(Y)]. \tag{7.11}$$

Důkaz. Nechť $p \in M$, $f \in C^\infty(N)$ a ϕ je difeomorfizmus, tj. $\phi(M) = N$. Pak máme

$$\begin{aligned}(\phi_\star[X,Y])(\phi(p))f &= [X,Y](f\circ\phi)(p) = X(Y(f\circ\phi))(p) - Y(X(f\circ\phi))(p)\\ &= X(\phi_\star Y(f)\circ\phi)(p) - Y(\phi_\star X(f)\circ\phi)(p)\\ &= (\phi_\star X(\phi_\star Y(f))\circ\phi)(p) - (\phi_\star Y(\phi_\star X(f))\circ\phi)(p)\\ &= ([\phi_\star X, \phi_\star Y]f)(\phi(p))\end{aligned}$$

pro libovolný bod variety N, který jsme mohli vyjádřit ve tvaru $\phi(p)$ díky tomu, že ϕ je bijekce. ■

7.3 Podvariety

Pomocí vlastností hladkého zobrazení $\phi : M \to N$ definujeme dva odlišné pojmy podvariety.

Definice 7.7. Mějme $\phi : M \to N$ hladké zobrazení. ϕ nazýváme **vnoření** (angl. immersion) M do N, pokud $\phi_\star$ je prosté v každém bodě $p \in M$. M pak nazýváme **vnořená podvarieta** variety N.

Definice 7.8. Pokud ϕ je prosté vnoření takové, že pro každý bod $p \in M$ existuje okolí $U = U^\circ \subset N$ bodu $\phi(p)$ a souřadnice $(y^a)_{a=1}^{\dim N}$ na U takové, že $\phi(M) \cap U = \{q \in U |\, y^a(q) = 0,\, a = 1, \ldots, k\}$, kde $k = \dim N - \dim M$, nazýváme zobrazení ϕ **vložení** (angl. embedding) a M nazýváme **(vložená) podvarieta** variety N kodimenze k.

Obecně platí

Věta 7.9. Whitneyho věta o vnoření: Každá diferencovatelná varieta dimenze n je difeomorfní nějaké vložené C^ω-podvarietě Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. (*Bez důkazu.*)

Bohužel uvedená vložená podvarieta není původní varietou určena zdaleka jednoznačně a proto není vhodné obecné variety studovat jako podvariety v $\mathbb{R}^n$.

7.4 Cvičení

Cvičení 7.1. Uvažujte sféru $S^2[\theta,\varphi]$ zobrazenou do $\mathbb{R}^3[x,y,z]$ zobrazením ϕ zadaným rovnicemi

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = b\sin\theta\sin\varphi, \quad z = c\cos\theta,$$

kde $a,b,c \in \mathbb{R}^+$. Určete, zda se jedná o vnoření a případně též o vložení. Spočítejte

$$\phi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{(\theta_0,\varphi_0)}\right),\ \phi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right|_{(\theta_0,\varphi_0)}\right),\ \phi^\star(\mathrm{d}x),\ \phi^\star(\mathrm{d}y),\ \phi^\star(\mathrm{d}z),$$
$$\phi^\star(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z),\ \phi^\star\left(\frac{x\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{y\mathrm{d}y}{b^2}+\frac{z\mathrm{d}z}{c^2}\right).$$

Výsledek.

$$\phi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{(\theta_0,\varphi_0)}\right) = a\cos\theta_0\cos\varphi_0\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b\cos\theta_0\sin\varphi_0\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p - c\sin\theta_0\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p,$$
$$\phi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right|_{(\theta_0,\varphi_0)}\right) = -a\sin\theta_0\sin\varphi_0\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b\sin\theta_0\cos\varphi_0\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p,$$
$$\phi^\star(\mathrm{d}x) = a\cos\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta - a\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,$$
$$\phi^\star(\mathrm{d}y) = b\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\theta + b\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,$$
$$\phi^\star(\mathrm{d}z) = -c\sin\theta\mathrm{d}\theta,\ \phi^\star(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) = 0,\ \phi^\star\left(\frac{x\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{y\mathrm{d}y}{b^2}+\frac{z\mathrm{d}z}{c^2}\right) = 0,$$

kde $p = \phi(\theta_0,\varphi_0)$. Z maximální hodnosti ϕ_* je vidět, že se jedná o vnoření (pro korektnost by mělo být prověřeno chování zobrazení ϕ v okolí singulárních bodů sférických souřadnic $\theta = 0,\pi$ v jiném souřadném systému, např. ve stereografických souřadnicích). Jedná se i o vložení, vhodné souřadnice z definice 7.8 jsou například sférické úhlové souřadnice θ,ϕ doplněné funkcí $R = \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} - 1$, v nichž máme $\phi(S^2) = \{(\theta,\phi,R)|R=0\}$.

Cvičení 7.2. Nalezněte integrální křivku γ vektorového pole

$$X = z\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3[x,y,z])$$

z bodu $(x,y,z) = (1,0,0)$. Výsledné zobrazení $\gamma : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}^3[x,y,z]$ promítněte do roviny xy, $\phi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}^2[x,y]$, $\phi(t) = (\gamma^x(t),\gamma^y(t))$. Určete $\phi_*(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0})$, $\phi^\star(a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y)$, $\phi^\star(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$. Jaké podmínce musí vyhovovat $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}[t])$, aby existovalo $\phi_*(Y)$ definované na obrazu $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$?

Výsledek.

$$\gamma(t) = (\cos\frac{t^2}{2}, -\sin\frac{t^2}{2}, t), \quad \phi(t) = (\cos\frac{t^2}{2}, -\sin\frac{t^2}{2}),$$
$$\phi_*\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right) = -t_0\sin\frac{t_0^2}{2}\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\phi(t_0)} - t_0\cos\frac{t_0^2}{2}\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\phi(t_0)},$$
$$\phi^\star(a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y) = -t\left(a\sin\frac{t^2}{2} + b\cos\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t, \quad \phi^\star(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = 0,$$

přenesené vektorové pole $\phi_*(X)$ existuje, pokud pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $Y = Y^t(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, kde $Y^t\left(\sqrt{t^2+4\pi}\right) = \sqrt{\frac{t^2}{t^2+4\pi}}Y^t(t)$.

Cvičení 7.3. Uvažujte zobrazení

$$\psi : \mathbb{R}[t] \to S^1[\varphi] : \psi(t) = t,$$

tj. při vyjádření kružnice jako množiny bodů v $\mathbb{R}^2[x,y]$ máme

$$\psi(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Jedná se o vnoření, resp. vložení?

Výsledek. Vnoření ano, neboť $\psi_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t_0}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}|_{\psi(t_0)}$, tj. ψ_* má hodnost 1, o vložení nikoliv, neboť ψ není prosté.

Cvičení 7.4. Uvažujte varietu M a její kotečný fibrovaný prostor $T^*M \xrightarrow{\pi} M$. Definujme diferenciální 1–formu $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ na kotečném fibrovaném prostoru následovně

$$\lambda(\alpha) = \pi^\star(\alpha), \qquad \alpha \in T^*M.$$

Na M zvolme souřadnice $(x^i)_{i=1}^n$ a na T^*M souřadnice $(x^i, p_i)_{i=1}^n$, kde

$$x^i(\alpha) = x^i(\pi(\alpha)), \qquad p_i\left(\alpha = \alpha_j\, \mathrm{d}x^j\big|_q\right) = \alpha_i.$$

Nalezněte souřadnicové vyjádření diferenciální 1–formy λ, spočítejte $\omega = \mathrm{d}\lambda$ a ukažte, že pro každý nenulový $X \in T_\alpha(T^*M)$ je $i_X\omega \in T^*_\alpha(T^*M)$ nenulové.

Výsledek.

$$\lambda = p_i \mathrm{d}x^i, \quad \omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i,$$
$$X = X^i_x \frac{\partial}{\partial x^i} + X^p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \neq 0 \Longleftrightarrow i_X\omega = X^p_i \mathrm{d}x^i - X^j_x \mathrm{d}p_i \neq 0.$$

Kapitola 8

Lieova derivace

Dosud zavedené pojmy umožňují na varietě derivovat funkce ve směru tečného vektoru a určovat vnější derivaci diferenciálních forem, která je zobecněním totálního diferenciálu funkcí. Neumíme však derivovat obecnější objekty, tj. diferenciální formy či vektorová pole, ve směru tečného vektoru či vektorového pole. V této kapitole si jeden možný způsob derivování, tzv. Lieovu derivaci, zavedeme, později, v kapitole 12, uvidíme i jinou možnost, tzv. kovariantní derivaci.

Uvažujme tok Ψ_X daného vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$. Z definice Ψ_X vyplývá, že pro libovolný bod $p \in M$ a konstanty $s, t \in \mathbb{R}$ takové, že levá strana následujícího výrazu má smysl, platí (viz důsledek 3.15):

$$\Psi_X(\Psi_X(p,s),t) = \Psi_X(p,t+s). \tag{8.1}$$

Pro dostatečně malé okolí U každého $p \in M$ existuje ε takové, že zobrazení Ψ_X^t je pro $|t| < \varepsilon$ difeomorfizmus U na $\Psi_X^t(U)$ a tedy na tomto okolí $\exists (\Psi_X^t)^{-1} : (\Psi_X^t)^{-1} = \Psi_X^{-t}$. Pro následující úvahy, kde nás bude zajímat limita $\lim_{t\to 0}$ v nějakém $p \in M$, tedy lze chápat Ψ_X^t jako difeomorfizmus za implicitního předpokladu, že t má hodnoty dostatečně blízké 0.

Definice 8.1. Buď $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^\bullet(M)$. Definujeme **Lieovu derivaci** diferenciální formy ω ve směru vektorového pole X předpisem

$$\mathscr{L}_X \omega = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\Psi_X^{t\star}\omega - \omega). \tag{8.2}$$

Pro libovolný bod $p \in M$ tedy platí:

$$\mathscr{L}_X \omega(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} ((\Psi_X^{t\star}\omega)(p) - \omega(p))) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\Psi_X^{t\star}\left(\omega\left(\Psi_X^t(p)\right)\right) - \omega(p)\right).$$

Vidíme, že $\mathscr{L}_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$.

Pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(M)$ platí

$$\mathscr{L}_X f = Xf, \tag{8.3}$$

neboť pro každý bod $p \in M$ je $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(\Psi_X^t(p)) - f(p)) = Xf(p)$.

Definice 8.2. Buď $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ vektorová pole. Definujeme **Lieovu derivaci** vektorového pole Y ve směru vektorového pole X předpisem

$$\mathscr{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\Psi_X^{t\star}(Y) - Y). \tag{8.4}$$

Protože platí $\lim_{t\to 0}\Psi^t_{X\star}(Z)=Z$, můžeme postupnými úpravami získat

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Psi^{t\star}_X(Y)-Y\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Psi^{-t}_{X\star}(Y)-Y\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\Psi^{-t}_{X\star}(Y-\Psi^t_{X\star}(Y))=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y-\Psi^t_{X\star}(Y)\right).$$

Takže ekvivalentní definici Lieovy derivace vektorového pole je možné psát ve tvaru

$$\mathscr{L}_X Y=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y-\Psi^t_{X\star}(Y)\right). \tag{8.5}$$

V dalším výkladu se setkáme též s obecnějšími objekty než s vektorovými poli a diferenciálními formami, tzv. tenzory, které také bude třeba derivovat.

Definice 8.3. Kovariantní tenzor T k**–tého řádu** na varietě M je k-lineární (hladké) zobrazení $T:(\mathcal{X}(M))^k\to C^\infty(M)$ takové, že $T(X_1,\dots,X_k)(p)$ závisí pouze na hodnotách $X_1(p),\dots,X_k(p)$ vektorových polí $X_1,\dots,X_k$ v bodě p.

Definice 8.4. Kontravariantní tenzor S k**–tého řádu** na varietě M je k-lineární zobrazení takové, že $S:(\Omega^1(M))^k\to C^\infty(M)$ a $S(\omega^1,\dots,\omega^k)(p)$ závisí pouze na hodnotách $\omega^1(p),\dots,\omega^k(p)$ diferenciálních 1–forem $\omega^1,\dots,\omega^k$ v bodě p.

Pro $\phi:M\to N$ a kovariantní tenzor T na N definujeme jeho pullback předpisem

$$(\phi^\star T)(X_1,\dots,X_k)(p)=T(\phi(p))\left(\phi_\star\left(X_1|_p\right),\dots,\phi_\star\left(X_k|_p\right)\right), \tag{8.6}$$

obdobně pro difeomorfizmus $\phi:M\to N$ a kontravariantní tenzor S na M definujeme

$$(\phi_\star S)(\omega^1,\dots,\omega^k)\left(\phi(p)\right)=S(\phi^\star\omega^1,\dots,\phi^\star\omega^k)(p). \tag{8.7}$$

S pomocí těchto označení definujeme Lieovu derivaci libovolného kovariantního tenzoru na varietě M analogicky k definici Lieovy derivace pro formy. Pro kontravariantní tenzory užijeme definice Lieovy derivace pro vektorová pole.

8.1 Vlastnosti Lieovy derivace

Věta 8.5. Lieova derivace má následující vlastnosti:

1. $\mathrm{d}\circ\mathscr{L}_X=\mathscr{L}_X\circ\mathrm{d}$, tj. pro libovolnou diferenciální formu $\omega\in\Omega^\bullet(M)$ platí $\mathrm{d}\mathscr{L}_X\omega=\mathscr{L}_X\mathrm{d}\omega$,
2. $\mathscr{L}_X\circ i_Y=i_Y\circ\mathscr{L}_X+i_{\mathscr{L}_X(Y)}$,
3. pro libovolnou dvojici diferenciálních forem $\omega,\tau\in\Omega^\bullet(M)$ platí $\mathscr{L}_X(\omega\wedge\tau)=\mathscr{L}_X\omega\wedge\tau+\omega\wedge\mathscr{L}_X\tau$,
4. pro každou trojici vektorových polí platí $\mathscr{L}_X[Y,Z]=[\mathscr{L}_XY,Z]+[Y,\mathscr{L}_XZ]$.

Důkaz. Vlastnost 1 plyne z rovnice (7.9), vlastnost 3 z rovnice (7.8). Vlastnost 2 ukážeme následovně:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X i_Y\omega&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Psi^{t\star}_X i_Y\omega-i_Y\omega\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi^{t\star}_X Y}(\Psi^{t\star}_X\omega)-i_Y\omega\right)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi^{t\star}_X Y}(\Psi^{t\star}_X\omega)-i_{\Psi^{t\star}_X Y}(\omega)+i_{\Psi^{t\star}_X Y}(\omega)-i_Y\omega\right)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi^{t\star}_X Y}(\Psi^{t\star}_X\omega-\omega)\right)+i_{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\Psi^{t\star}_X(Y)-Y)}\omega=i_Y(\mathscr{L}_X\omega)+i_{\mathscr{L}_X(Y)}\omega.\end{aligned}$$

Z vlastnosti 2 dostáváme využitím $\mathscr{L}_X \mathrm{d}f = \mathrm{d}(Xf)$ pro funkci $f \in C^\infty(M)$ důsledek:

$$\mathscr{L}_X(Yf) = \mathscr{L}_X(i_Y\,\mathrm{d}f) = i_Y \mathscr{L}_X \mathrm{d}f + i_{\mathscr{L}_X(Y)}\mathrm{d}f = i_Y\,\mathrm{d}(Xf) + \mathscr{L}_X(Y)f,$$

z čehož plyne $X(Yf) = Y(Xf) + (\mathscr{L}_X(Y))f$ neboli

$$\mathscr{L}_X(Y) = [X, Y]. \tag{8.8}$$

Z tohoto vztahu a vlastnosti komutátorů pak plyne vlastnost 4. ■

Je užitečné si uvědomit

Důsledek 8.6. Jakékoliv zobrazení $A : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ vyhovující pro jisté vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ podmínkám

$$A(\omega \wedge \tau) = (A\omega) \wedge \tau + \omega \wedge (A\tau), \quad \mathrm{d} \circ A = A \circ \mathrm{d}, \quad Af = Xf,$$

pro všechny diferenciální formy $\omega, \tau \in \Omega^\bullet(M)$ a hladké funkce $f \in C^\infty(M)$ už nutně musí být totožné s $\mathscr{L}_X$.

Důkaz. Viz $A(\mathrm{d}x^k) = \mathrm{d}(Ax^k) = \mathrm{d}(Xx^k) = \mathscr{L}_X(\mathrm{d}x^k)$ a vlastnosti Lieovy derivace z věty 8.5. ■

Lemma 8.7. Platí $i_X(\omega \wedge \tau) = i_X\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge i_X\tau$, kde $\omega \in \Lambda^k_p M$, $\tau \in \Lambda^l_p M$, $X \in T_pM$.

Důkaz.

$$i_{X_0}(\omega \wedge \tau)(X_1, , \ldots, X_{k+l-1}) = \sum_{\substack{\vec{I}\,\vec{J} \\ |I|=k, |J|=l}} \delta^{\vec{I}\,\vec{J}}_{(0,1,\ldots,k+l-1)} \omega(X_{\vec{I}})\tau(X_{\vec{J}}) = \sum_{0 \in \vec{I}}(\ldots) + \sum_{0 \in \vec{J}}(\ldots) =$$

$$= \sum_{\substack{\vec{H}\,\vec{J} \\ |H|=k-1, |J|=l}} \delta^{\vec{H}\,\vec{J}}_{(1,\ldots,k+l-1)} \omega(X_0, X_{\vec{H}})\tau(X_{\vec{J}}) + \sum_{\substack{\vec{I}\,\vec{G} \\ |I|=k, |G|=l-1}} (-1)^k \delta^{\vec{I}\,\vec{G}}_{(1,\ldots,k+l-1)} \omega(X_{\vec{I}})\tau(X_0, X_{\vec{G}}) =$$

$$= (i_{X_0}\omega \wedge \tau)(X_1, \ldots, X_{k+l-1}) + (-1)^k(\omega \wedge \ i_{X_0}\tau)(X_1, \ldots, X_{k+l-1}).$$

■

Věta 8.8. Na $\Omega^\bullet(M)$ platí

$$\mathscr{L}_X = \mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d}. \tag{8.9}$$

Důkaz. Využitím důsledku 8.6 a lemmatu 8.7. Na funkcích $i_X f = 0$, $i_X \mathrm{d}f = Xf = \mathscr{L}_X f$. Dále

$$\mathrm{d}(\mathrm{d} \circ \ i_X + i_X \circ \mathrm{d}) = \mathrm{d}^2 \circ i_X + \mathrm{d} \circ i_X \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ i_X \circ \mathrm{d} = (\mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d}) \circ \mathrm{d}.$$

Pro ověření všech vlastností ještě zbývá dokázat distributivitu vzhledem k vnějšímu součinu,

$$\begin{aligned}(\mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d})\,\omega \wedge \tau &= \mathrm{d}i_X\omega \wedge \tau + (-1)^k \mathrm{d}\omega \wedge i_X\tau + (-1)^{k-1} i_X\omega \wedge \mathrm{d}\tau + \omega \wedge \mathrm{d}i_X\tau \\ &\quad + i_X\mathrm{d}\omega \wedge \tau + (-1)^k i_X\omega \wedge \mathrm{d}\tau + (-1)^{k+1}\mathrm{d}\omega \wedge i_X\tau + \omega \wedge i_X\mathrm{d}\tau \\ &= ((\mathrm{d}i_X + i_X\mathrm{d})\omega) \wedge \tau + \omega \wedge ((\mathrm{d}i_X + i_X\mathrm{d})\tau).\end{aligned}$$

■

Důsledek 8.9. Nechť $\omega \in \Omega^1(M),\ X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Pak platí tzv. **Cartanův vzorec** pro vnější derivaci 1–formy

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]). \tag{8.10}$$

Důkaz. Připomeňme, že $i_X\omega = \omega(X) \in C^\infty(M)$. Využitím rovnice (8.9) dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X,Y) &= i_Y i_X \mathrm{d}\omega = i_Y(\mathscr{L}_X\omega - \mathrm{d}i_X\omega) = (i_Y \circ \mathscr{L}_X)\omega - Y(\omega(X)) \\ &= (\mathscr{L}_X \circ i_Y)\omega - i_{\mathscr{L}_X(Y)}\omega - Y(\omega(X)) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).\end{aligned}$$

■

Zobecněním předchozího vzorce získáváme vztah platný pro libovolnou diferenciální k–formu.

Věta 8.10 (**Cartanův vzorec**)**.** Vnější derivaci diferenciální formy $\omega \in \Omega^k(M)$ vyhodnocenou na $k+1$ vektorových polích $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_1,\ldots,X_{k+1}) = &\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}X_j(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}))+ \\ &+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}),\end{aligned} \tag{8.11}$$

kde stříšky znamenají, že se daný prvek jako argument vynechá.

Důkaz. Indukcí s využitím

$$i_{X_{k+1}}\ldots i_{X_1}\mathrm{d}\omega = -i_{X_{k+1}}\ldots i_{X_2}\mathrm{d}i_{X_1}\omega + i_{X_{k+1}}\ldots i_{X_3}(i_{X_2}\mathscr{L}_{X_1}\omega) = \ldots,$$

kde $i_{X_2}\mathscr{L}_{X_1}\omega = \mathscr{L}_{X_1}i_{X_2}\omega - i_{[X_1,X_2]}\omega$, atd. ■

Všimněme si, že levá strana Cartanova vzorce (8.11) závisí jen na $X_i|_p$, výrazy na pravé straně závisejí i na X_i v okolí $p \in M$. Z odvození ovšem vyplývá, že pravá strana jako celek závisí jen na $X_i|_p$.

Věta 8.11. Pro libovolná vektorová pole $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ platí

$$[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y] = \mathscr{L}_{[X,Y]}. \tag{8.12}$$

Důkaz. Pro funkce a vektorová pole zřejmé, pro formy:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X &= \mathrm{d}i_X\mathrm{d}i_Y + \mathrm{d}i_Xi_Y\mathrm{d} + i_X\mathrm{d}^2i_Y + i_X\mathrm{d}i_Y\mathrm{d} - \\ &\quad - \mathrm{d}i_Y\mathrm{d}i_X - \mathrm{d}i_Yi_X\mathrm{d} - i_Y\mathrm{d}^2i_X - i_Y\mathrm{d}i_X\mathrm{d} \\ &= \mathrm{d}\circ\mathscr{L}_X\circ i_Y - \mathrm{d}\circ i_Y\circ\mathscr{L}_X + \mathscr{L}_X\circ i_Y\circ\mathrm{d} - i_Y\circ\mathscr{L}_X\circ\mathrm{d} \\ &= \mathrm{d}i_{[X,Y]} + i_{[X,Y]}\mathrm{d} = \mathscr{L}_{[X,Y]}.\end{aligned}$$

■

Důkaz věty 8.11 lze provést též jinak, využitím již známých vlastností z věty 8.5:

$$[i_X\mathrm{d} + \mathrm{d}i_X, \mathscr{L}_Y] = \ldots = -i_{\mathscr{L}_Y(X)}\mathrm{d} - \mathrm{d}i_{\mathscr{L}_Y(X)}.$$

8.2 Cvičení

Cvičení 8.1. Vyjádřete Lieovu derivaci vektorového pole $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, diferenciální 1–formy $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$ a diferenciální 2–formy $\tau = \tau_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ podle vektorového pole $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Výsledek.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X Y &= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \\
\mathscr{L}_X \omega &= \left(X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \mathrm{d}x^j, \\
\mathscr{L}_X \tau &= \left(X^i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x^i} + \tau_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \tau_{ji} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right) \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k.
\end{aligned}$$

Cvičení 8.2. Ukažte, že Lieova derivace libovolné uzavřené diferenciální formy je exaktní.

Návod. Využitím věty 8.8.

Cvičení 8.3. Na $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ uvažujte vektorová pole $X_1 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ a $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Spočítejte

$$\mathscr{L}_{X_a} \mathrm{d}x, \quad \mathscr{L}_{X_a} \mathrm{d}y, \quad \mathscr{L}_{X_a} \mathrm{d}z, \quad \mathscr{L}_{X_a} (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z), \quad a = 1, 2.$$

Výsledek.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{X_1} \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y, \quad && \mathscr{L}_{X_1} \mathrm{d}y = \mathrm{d}x, \quad && \mathscr{L}_{X_1} \mathrm{d}z = 0, \quad && \mathscr{L}_{X_a} (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = 0, \\
&\mathscr{L}_{X_a} \mathrm{d}x = \mathrm{d}x, \quad && \mathscr{L}_{X_a} \mathrm{d}y = \mathrm{d}y, \quad && \mathscr{L}_{X_a} \mathrm{d}z = \mathrm{d}z, \quad && \mathscr{L}_{X_a} (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = 3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Cvičení 8.4. Je zřejmé, že pokud pro vektorová pole $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ platí $\Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(p) = \Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(p)$ pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$, $p \in M$, pro něž mají výrazy smysl, tak též platí $[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y] = 0$. Ukažte, že naopak $[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y] = 0$ implikuje $\Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(p) = \Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(p)$, kdykoliv mají výrazy na obou stranách rovnice smysl.

Návod. Zderivujte dokazovanou identitu podle jednoho z parametrů, např. t, a využijte větu o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Viz též důkaz věty 9.11 dále.

Cvičení 8.5. Nechť ω je 2–forma na T^*M z cvičení 7.4 a $f, g \in C^\infty(T^*M)$. Definujme vektorové pole $X_f \in \mathcal{X}(T^*M)$ požadavkem

$$i_{X_f} \omega = -\mathrm{d}f.$$

Ukažte, že $X_f \in \mathcal{X}(T^*M)$ je tím určeno jednoznačně. Dále ukažte, že $\mathscr{L}_{X_f} \omega = 0$ a že $X_f(g) = \mathscr{L}_{X_f} g = 0$ právě tehdy, když $X_g(f) = \mathscr{L}_{X_g} f = 0$. Jednotlivá odvození provádějte abstraktně bez využití souřadnic i v souřadnicích (x^i, p_j) na T^*M zavedených ve cvičení 7.4.

Kapitola 9

Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

V této kapitole využijeme vybudovaný geometrický aparát k matematicky korektnímu popisu Hamiltonovy formulace klasické mechaniky. Uvidíme, že základním pojmem je tzv. symplektická 2–forma, která v sobě kóduje Poissonovy závorky na fázovém prostoru a též umožňuje přirozené zavedení pojmu kanonické transformace. Hamiltonovy pohybové rovnice jsou pak popsány jako rovnice pro integrální křivky jistého, tzv. hamiltonovského, vektorového pole.

Uvažujme varietu N a její kotečný bundle T^*N. Ze cvičení 4.3 již víme, že je vhodným objektem pro matematický popis fázového prostoru mechanického systému s konfiguračním prostorem N. Na T^*N existuje význačná, tzv. **kanonická 1-forma** definovaná následujícím předpisem: buď $\pi : T^*N \to N$ projekce ve fibrovaném prostoru T^*N. Definujeme $\lambda \in \Gamma(T^*(T^*N))$ předpisem

$$\lambda(\omega) = \pi^\star(\omega), \quad \omega \in T^*N, \tag{9.1}$$

viz cvičení 7.4.

V lokálních souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ \subset N$ zavádíme souřadnice (p_i) na T^*U: $p_i(\omega_k(q)\,\mathrm{d}x^k) = \omega_i(q)$ pro $q \in U$. Společně (x^i, p_i) tvoří souřadnice na T^*U. V nich máme $\lambda \in \Gamma(T^*(T^*U))$ vyjádřenu ve tvaru

$$\lambda = p_i\,\mathrm{d}x^i. \tag{9.2}$$

Dále můžeme uvažovat **kanonickou (Cartanovu-Poincarého) 2–formu** $\omega = \mathrm{d}\lambda$. V lokálních souřadnicích (x^i, p_i) má evidentně tvar

$$\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i. \tag{9.3}$$

Z konstrukce je ω exaktní a tudíž uzavřená. Dále je **nedegenerovaná** ve smyslu

$$\forall \alpha \in T^*N, X \in T_\alpha(T^*N),\ X \neq 0 : (\exists Y \in T_a(T^*N) : \omega(\alpha)(X,Y) \neq 0)\,. \tag{9.4}$$

Poznamenejme, že libovolná nedegenerovaná 2-forma umožňuje bijektivně zobrazit tečný a kotečný prostor předpisem $X \in T_\alpha(T^*N) \to i_X\omega \in T^*_\alpha(T^*N)$.

Uvedené vlastnosti kanonické 2–formy (9.3) jsou základem pro následující zobecnění.

Definice 9.1. Diferencovatelná varieta M vybavená nedegenerovanou uzavřenou diferenciální 2-formou ω se nazývá **symplektická**. Formu ω pak nazýváme **symplektická 2–forma**.

Příklad 9.2. $M = T^*N$ s formou $\omega = \mathrm{d}\lambda$.

Lemma 9.3. Nechť V je vektorový prostor, ω je nedegenerovaná 2-forma na V. Pak $\dim V$ je nutně sudá.

Důkaz. Nechť (e_i) je báze V, (e^i) je duální báze V^*. Pak $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, e^i \wedge e^j$, $e^i(e_j) = \delta^i_j$, tj. $\omega(X^i e_i, Y^j e_j) = X^i Y^j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i<j} X^i Y^j (\omega_{ij} - \omega_{ji})$. Formu ω budeme nadále charakterizovat antisymetrickou maticí $(\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji})$. Pak máme $\omega(X^i e_i, Y^j e_j) = \sum_{i,j} (\omega)_{ij} X^i Y^j$. Forma ω je nedegenerovaná právě tehdy, když pro všechna $X \neq 0$ je $(\omega)_{ij} X^i \neq 0$, což implikuje $\mathrm{rank}(\omega)_{ij} = \dim V$ a tedy $\det(\omega) \neq 0$. Pro libovolnou antisymetrickou matici A, $A^T = -A$, platí $\det A^T = \det A$ a současně $\det A^T = (-1)^{\dim V} \det A$. Když je $\dim V$ lichá, tak $\det A^T = -\det A = \det A$, tj. $\det A = 0$. Takže nenulovost determinantu $\det(\omega)$ implikuje nutně, že $\dim V$ je sudá. ■

Věta 9.4 (**Darboux**)**.** Buď (M, ω) symplektická varieta a q bod v M. Pak existuje okolí $U = U^\circ \subset M$, $q \in U$, a souřadnice $(p_i, x^i)_{i=1}^{\frac{\dim M}{2}}$ na U takové, že $\omega|_U = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$. *(Bez důkazu.)*

Definice 9.5. Souřadnice z věty 9.4 na symplektické varietě (M, ω) nazýváme **Darbouxovy**.

Nyní se budeme snažit zformulovat hamiltonovskou mechaniku na obecné symplektické varietě (M, ω). Základní poznatek je, že nedegenerovaná forma $\omega \in \Omega^2(M)$ nám umožňuje ztotožnit T_qM a T_q^*M, resp. $\mathcal{X}(M)$ a $\Omega^1(M)$.

Věta 9.6. Zobrazení $\varphi : T_qM \to T_q^*M$, kde $\varphi(X) = i_X\omega(q)$ a ω je symplektická 2-forma, je izomorfizmus vektorových prostorů.

Důkaz. Linearita $\varphi : X \to i_X\omega$ je zřejmá. Dále pro jádro φ z nedegenerovanosti platí: $X \in \ker\varphi \Leftrightarrow i_X\omega(q) = 0 \Leftrightarrow (\forall Y \in T_qM)(i_X\omega(Y) = \omega(X, Y) = 0) \Leftrightarrow X = 0$. ■

Důsledek 9.7. Zobrazení $\varphi : \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$, kde $\varphi(X) = i_X\omega$ a ω je symplektická 2-forma, je izomorfizmus vektorových prostorů.

Důkaz. V každém bodě $q \in M$ máme vzájemně jednoznačné zobrazení φ_q. Hladkost vyplývá z hladké závislosti $i_X\omega$ na X. ■

Definice 9.8. Vektorové pole X na symplektické varietě (M, ω) se nazývá

- **lokálně hamiltonovské** právě tehdy, když $i_X\omega$ je uzavřená, tj. $\mathrm{d}i_X\omega = 0$.
- **hamiltonovské** právě tehdy, když $i_X\omega$ je exaktní ve smyslu: existuje funkce $f \in C^\infty(M)$ taková, že $i_X\omega = -\mathrm{d}f$. Pak značíme $X \equiv X_f$.

Důvod pro předchozí definici vychází z Hamiltonovy mechaniky formulované na kotečném fibrovaném prostoru. Buď $M = T^*N$, $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$ a $H(p_i, x^i) \in C^\infty(M)$. Pak máme

$$X_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \tag{9.5}$$

Tudíž integrální křivky hamiltonovského vektorového pole X_H odpovídajícího funkci $H(p_i, x^i)$ jsou řešením Hamiltonových pohybových rovnic

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \tag{9.6}$$

Věta 9.9. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je lokálně hamiltonovské právě tehdy, když $\mathscr{L}_X\omega = 0$.

Důkaz. ω je uzavřená a tudíž $\mathscr{L}_X\omega = \mathrm{d}i_X\omega + i_X\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}i_X\omega$. ■

Věta 9.10. Nechť N je diferencovatelná varieta, $\tau \in \Omega^\bullet(N)$, $X, Y \in \mathcal{X}(N)$. Pak $\mathscr{L}_X\tau = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $q \in N : \Psi_X^{t\star}(\tau(\Psi_X^t(q))) = \tau(q)$, kdykoliv má $\Psi_X^t(q)$ smysl. Podobně $\mathscr{L}_X Y = 0 \Leftrightarrow \Psi_{X\star}^t(Y) = Y$.

Důkaz.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Psi_X^{t\star}\tau) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\Psi_X^{s+t\star}\tau - \Psi_X^{t\star}\tau) = \lim_{s\to 0}\Psi_X^{t\star}(\frac{1}{s}(\Psi_X^{s\star}\tau - \tau)) = \Psi_X^{t\star}\mathscr{L}_X\tau = 0,$$
$$\Psi_X^{0\star}(\tau) = \mathrm{id}^\star\tau = \tau.$$

■

Věta 9.11. Toky komutujících vektorových polí X, Y komutují. Neboli mějme diferencovatelnou varietu N a $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ takové, že $[X, Y] = 0$. Pak pro všechna $q \in N$, $s, t \in \mathbb{R}$ taková, že výrazy mají smysl, platí

$$\Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(q) = \Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(q). \tag{9.7}$$

Důkaz. Nechť $q \in N$, γ_1 integrální křivka X z q, tj. $\gamma_1(t) = \Psi_X^t(q)$, vybereme pevně $s \in \mathbb{R}$, γ_2 integrální křivka X z $\tilde{q} = \Psi_Y^s(q)$, tj. $\gamma_2(t) = \Psi_X^t(\tilde{q}) = \Psi_X^t(\Psi_Y^s(q))$. Definujeme $\gamma_3(t) = \Psi_Y^s(\gamma_1(t))$. Platí $\dot{\gamma_2}(t) = X(\gamma_2(t))$, $\dot{\gamma_3}(t) = \Psi_{Y\star}^s(\dot{\gamma_1}(t)) = \Psi_{Y\star}^s(X(\gamma_1(t))) = X(\gamma_3(t))$, neboť $\mathscr{L}_X Y = [X, Y]$, a tedy $\Psi_{Y\star}^s(X) = X$. Máme tedy $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, které vyhovují stejné diferenciální rovnici se stejnou počáteční podmínkou a z jednoznačnosti řešení plyne $\gamma_2(t) = \gamma_3(t)$. ■

Definice 9.12. Nechť (M, ω) je symplektická varieta. Pak zobrazení (transformaci) $\phi : M \to M$ nazveme **kanonické** právě tehdy, když $\phi^\star\omega = \omega$.

Definice 9.13. 1–parametrická lokální grupa transformací variety N je takové zobrazení $\phi : U = U^\circ \subset \mathbb{R} \times N \to N$, $\{0\} \times N \subset U$, pro které platí

$$\phi(s, \phi(t, q)) = \phi(s + t, q) \tag{9.8}$$

pro všechna $s, t \in \mathbb{R}$, $q \in N$ taková, že $(t, q) \in U$ a $(s, \phi(t, q)) \in U$, a současně

$$\phi(0, q) = q, \quad q \in N. \tag{9.9}$$

Příkladem 1–parametrické lokální grupy transformací je tok libovolného vektorového pole. Naopak, každá 1–parametrická lokální grupa transformací má díky hladkosti a grupové vlastnosti (9.8) tvar toku vektorového pole pro jednoznačně určené vektorové pole, zvané **generátor** 1–parametrické lokální grupy transformací. Generátor lze najít zderivováním $X(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t, q)\big|_{t=0}$.

Věta 9.14. Nechť (M, ω) je symplektická varieta, $X \in \mathcal{X}(M)$. X je lokálně hamiltonovské právě tehdy, když jeho tok Ψ_X^t definuje 1-parametrickou lokální grupu kanonických transformací variety M.

Důkaz. $\mathscr{L}_X\omega = 0 \Leftrightarrow \Psi_X^{t\star}\omega = \omega$. ■

Definice 9.15. Nechť (M,ω) je symplektická varieta, $f,g\in C^\infty(M)$. **Poissonova závorka** na M je bilineární zobrazení $\{\cdot,\cdot\}:C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ dané předpisem

$$\{f,g\}=i_{X_f}i_{X_g}\omega. \tag{9.10}$$

Všimněme si, že Poissonovu závorku lze vyjádřit mnoha ekvivalentními způsoby

$$\{f,g\}=i_{X_f}i_{X_g}\omega=-i_{X_f}\mathrm{d}g=-X_f(g)=-i_{X_g}i_{X_f}\omega=i_{X_g}\mathrm{d}f=X_g(f). \tag{9.11}$$

Konkrétně v Darbouxových souřadnicích máme $\omega=\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}x^i$, a tedy

$$\{f,g\}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}. \tag{9.12}$$

Věta 9.16. Nechť $f,g\in C^\infty(M)$. Pak

$$X_{\{f,g\}}=-[X_f,X_g]. \tag{9.13}$$

Důkaz. $h=\{f,g\}=i_{X_f}i_{X_g}\omega$, $\mathscr{L}_{X_g}\omega=0$, $\mathscr{L}_{X_f}\omega=0$. Proto $i_{X_h}\omega=-\mathrm{d}(i_{X_f}i_{X_g}\omega)=-\mathscr{L}_{X_f}(i_{X_g}\omega)+i_{X_f}\mathrm{d}(i_{X_g}\omega)=-\mathscr{L}_{X_f}i_{X_g}\omega+i_{X_f}\mathscr{L}_{X_g}\omega=-i_{[X_f,X_g]}\omega-i_{X_g}\mathscr{L}_{X_f}\omega=-i_{[X_f,X_g]}\omega$ a tedy $X_h=-[X_f,X_g]$. ■

Věta 9.17. Poissonova závorka vyhovuje Jacobiho identitě, tj. $(f,g,h\in C^\infty(M))$:

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0.$$

Důkaz. $\{f,\{g,h\}\}=i_{X_f}i_{X_{\{g,h\}}}\omega=-i_{X_f}\mathrm{d}\{g,h\}=-\mathscr{L}_{X_f}\{g,h\}=-\mathscr{L}_{X_f}i_{X_g}i_{X_h}\omega=-i_{\mathscr{L}_{X_f}(X_g)}i_{X_h}\omega-i_{X_g}i_{\mathscr{L}_{X_f}(X_h)}\omega$. Navíc $\mathscr{L}_{X_f}(X_{g/h})=[X_f,X_{g/h}]=-X_{\{f,g/h\}}$, takže $\{f,\{g,h\}\}=i_{X_{\{f,g\}}}i_{X_h}\omega+i_{X_g}i_{X_{\{f,h\}}}\omega=\{\{f,g\},h\}+\{g,\{f,h\}\}$. ■

Věta 9.18. Nechť $f,g\in C^\infty(M)$, $\{f,g\}=0$. Pak $f\circ\Psi^t_{X_g}=f$, $g\circ\Psi^t_{X_f}=g$.

Důkaz. Zřejmý. ■

Naopak, máme-li lokální 1-parametrickou grupu kanonických transformací, pak je její generátor X lokálně hamiltonovské vektorové pole, a tedy existuje na okolí libovolného bodu lokálně definovaná funkce $f\in C^\infty(U)$ taková, že $X=X_f$. Pokud daná grupa kanonických transformací navíc zachovává hamiltonián H, pak lokálně definovaná funkce f je integrál pohybu.

9.1 Cvičení

Cvičení 9.1. Na sféře $S^2[u,v]$ uvažujte 2–formu $\omega=\frac{\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v}{(1+u^2+v^2)^2}$. Ukažte, že ji lze hladce dodefinovat na celé sféře a že ω je symplektická. Nalezněte tvar obecného hamiltonovského vektorového pole na S^2. Zkonstruujte Darbouxovy souřadnice na vhodném souřadnicovém okolí.

Výsledek.

$$\omega=\frac{\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v}{(1+u^2+v^2)^2}=\frac{\mathrm{d}U\wedge\mathrm{d}V}{(1+U^2+V^2)^2}=\frac{1}{4}\sin\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{4}\mathrm{d}\left(\cos\theta\mathrm{d}\varphi\right),$$

možné Darbouxovy souřadnice definované tam, kde lze použít sférické souřadnice, jsou tudíž například $p=-\frac{1}{4}\cos\theta$, $x=\varphi$. Obecné hamiltonovské vektorové pole má tvar

$$X_f=\left(1+u^2+v^2\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

Cvičení 9.2. Ve značení příkladu 9.1 explicitně ověřte $\mathscr{L}_{X_f}\omega = 0$.

Cvičení 9.3. Uvažujme symplektickou varietu (M, ω) a dvoje Darbouxovy souřadnice (p_i, x^i) a (P_i, X^i) na okolí $U = U^\circ$ bodu $q \in M$, $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i = \mathrm{d}P_i \wedge \mathrm{d}X^i$. Vhodnou reinterpretací vztahu mezi (p_i, x^i) a (P_i, X^i) dokažte lokální existenci vytvořující funkce kanonické transformace ϕ definované předpisem

$$\big(p_i(\phi(m)), x^i(\phi(m))\big) = (P_i(m), X^i(m)), \qquad m \in U.$$

Návod. Protože oboje souřadnice jsou Darbouxovy, máme

$$\mathrm{d}\left(p_i \mathrm{d}x^i - P_i \mathrm{d}X^i\right) = \omega - \omega = 0,$$

tj. z lokální exaktnosti uzavřených forem plyne existence $F \in C^\infty(U)$ takové, že

$$\mathrm{d}F = p_i \mathrm{d}x^i - P_i \mathrm{d}X^i. \tag{9.14}$$

(Abychom se vyhnuli komplikovanému značení, tak jsme předpokládali, že F je definována na stejném okolí jako souřadnice (p_i, x^i) a (P_i, X^i), obecně může být potřeba U zúžit na menší otevřené okolí $\tilde{U} = \tilde{U}^\circ \subset U$.) Pokud i soubor funkcí (x^i, X^j) definuje souřadnice na U, můžeme psát

$$p_i \mathrm{d}x^i - P_i \mathrm{d}X^i = \mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i + \frac{\partial F}{\partial X^i}\mathrm{d}X^i,$$

tj. zjišťujeme, že $p_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ a $P_i = -\frac{\partial F}{\partial X^i}$ za předpokladu, že parciální derivace provádíme v souřadnicích (x^i, X^j). Pokud nyní definujeme transformaci ϕ předpisem

$$\big(p_i(\phi(m)), x^i(\phi(m))\big) = (P_i(m), X^i(m))$$

kdykoliv mají výrazy smysl, tj. $P_i(m) \in \mathrm{Ran}(p_i), X^i(m) \in \mathrm{Ran}(x^i)$, máme transformaci ϕ zadánu pomocí vytvořující funkce F prvního druhu známé z teoretické fyziky. Protože $\phi^\star\omega = \mathrm{d}\left(p_i \circ \phi\right) \wedge \mathrm{d}\left(x^i \circ \phi\right) = \mathrm{d}P_i \wedge \mathrm{d}X^i = \omega$, je ϕ kanonická transformace.

Pokud soubor (x^i, P_j) též definuje souřadnice na U, můžeme místo $F \in C^\infty(U)$ uvažovat $\tilde{F} \in C^\infty(U)$ definovanou předpisem $\tilde{F}(m) = F(m) + P_i(m)X^i(m)$, kde $\tilde{F}$ budeme nyní chápat jako funkci na U vyjádřenou v souřadnicích (x^i, P_j). Výpočtem její vnější derivace a využitím (9.14) získáváme

$$p_i(m) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^i}(m), \quad X^i(m) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_i}(m),$$

tj. při definici $X^i(m) = x^i(\phi(m))$, $P_i(m) = p_i(\phi(m))$ máme vytvořující funkci $\tilde{F}$ druhého druhu pro kanonickou transformaci ϕ.

Cvičení 9.4. Najděte vytvořující funkci pro identickou transformaci na symplektické varietě s Darbouxovými souřadnicemi (x^i, p_j).

Výsledek.

$$\tilde{F} = x^i P_i.$$

Cvičení 9.5. Uvažujte symplektickou varietu $M = \mathbb{R}^2[x, p]$, kde (x, p) jsou Darbouxovy souřadnice a $H = x \cdot p$. Najděte příslušné hamiltonovské vektorové pole, jeho tok a vytvořující funkci kanonických transformací daných $\Psi^t_{X_H}$.

Výsledek.

$$X_H = x\frac{\partial}{\partial x} - p\frac{\partial}{\partial p}, \quad \Psi^t_{X_H}(x,p) = (\exp(t)x, \exp(-t)p)\,, \quad \tilde{F}(x,P) = \exp(t)x \cdot P.$$

Cvičení 9.6. Nalezněte všechny funkce $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2[x,p])$ takové, že $\{f, x \cdot p\} = 0$ (kde opět (x,p) jsou Darbouxovy souřadnice).

Výsledek.

$$f(x,p) = g(x \cdot p), \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Kapitola 10

Integrace forem

Jedním z důvodů pro zavedení diferenciálních forem na varietách je to, že na rozdíl od funkcí jsou přirozenými objekty, které se na obecné varietě dají integrovat (za předpokladu, že varietu vybavíme tzv. orientací, viz níže).

Uvažujme na n-rozměrné varietě M n-formu v lokálních souřadnicích (x^i), resp. $(\tilde{x}^j)$. Máme

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{12\ldots n}\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^n = \omega_{1\ldots n}(x(\tilde{x}))\frac{\partial x^1}{\partial\tilde{x}^{i_1}}\ldots\frac{\partial x^n}{\partial\tilde{x}^{i_n}}\,\mathrm{d}\tilde{x}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^{i_n}\\ &= \sum_I \omega_{1\ldots n}\,\delta^I_{(1\ldots n)}\frac{\partial x^1}{\partial\tilde{x}^{i_1}}\ldots\frac{\partial x^n}{\partial\tilde{x}^{i_n}}\,\mathrm{d}\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^n = \det\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^j}\cdot\omega_{1\ldots n}(x(\tilde{x}))\,\mathrm{d}\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^n\\ &\equiv \tilde{\omega}_{1\ldots n}(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\tilde{x}^n,\end{aligned}$$

tedy

$$\tilde{\omega}_{1\ldots n}(\tilde{x}) = \det\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^j}\cdot\omega_{1\ldots n}(x(\tilde{x})), \tag{10.1}$$

viz cvičení 5.3. Tento vztah připomíná větu o substituci v Lebesgueově integrálu ($x^i = \varphi^i(\tilde{x})$):

$$\int_{\varphi(\Omega)} f\;\mathrm{d}x^1\ldots\mathrm{d}x^n = \int_\Omega f\circ\varphi\;\left|\det\frac{\partial\varphi^i}{\partial\tilde{x}^j}\right|\mathrm{d}\tilde{x}^1\ldots\mathrm{d}\tilde{x}^n. \tag{10.2}$$

V definici integrálu n-formy ovšem narazíme hned na dvě odlišnosti či potenciální problémy:

1. rozdíl v absolutní hodnotě jakobiánu – řešíme zavedením orientace,
2. možná neexistence globálních souřadnic na M – řešíme pomocí tzv. rozkladu jednotky.

Definice 10.1. Orientace reálného vektorového prostoru V, $\dim V = n$, je zobrazení σ přiřazující každé n–tici lineárně nezávislých vektorů číslo ±1 a vyhovující

$$\sigma(T(e_1),\ldots,T(e_n)) = \frac{\det T}{|\det T|}\;\sigma(e_1,\ldots,e_n) \tag{10.3}$$

pro všechny lineárně nezávislé n–tice $(e_1,\ldots,e_n)$ vektorů $e_1,\ldots,e_n\in V$ a regulární lineární zobrazení $T\in GL(V)$.

Definice 10.2. Mějme vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ s orientací σ, $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^n$, diferencovatelnou varietu M, $\dim M \geq n$, hladké zobrazení $F : U \to M$ a formu $\omega \in \Omega^n(M)$. Označme $\tilde{U} = F(U)$. Definujeme **integrál z formy ω na množině $\tilde{U}$ při parametrizaci F** předpisem

$$\int_{(\tilde{U},F)} \omega = \sigma(e_1, \ldots, e_n) \int_U (F^\star\omega)_{1\ldots n} \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n, \tag{10.4}$$

kde $(x^1, \ldots, x^n)$ jsou souřadnice na $\mathbb{R}^n$ ve standardní bázi $(e_1, \ldots, e_n)$,

$$x^j(a^i e_i) = a^j,$$

tj. $e_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Takto definovaný integrál $\int_{(\tilde{U},F)} \omega$ má následující vlastnost: při výběru jiného U', σ' a F' takového, že $F'(U') = \tilde{U}$ a že existuje difeomorfizmus $\phi : U \to U'$ **zachovávající orientaci** ve smyslu $\sigma'\left(\phi_\star(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p), \ldots, \phi_\star(\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p)\right) = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p\right)$ pro všechny body $p \in U$, $T_p\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$, pro který současně platí

$$F = F' \circ \phi,$$

plyne z věty o substituci v Lebesgueově integrálu:

$$\int_{(\tilde{U},F)} \omega = \int_{(\tilde{U},F')} \omega. \tag{10.5}$$

Pokud je F prosté, tak až na orientaci hodnota integrálu na výběru F nezávisí.

Definice 10.3. Orientace σ variety M, kde $\dim M = n$, je zobrazení přiřazující každému bodu $p \in M$ orientaci tečného prostoru T_pM tak, že pro každé otevřené okolí $U = U^\circ \subset M$ a vektorová pole $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}(U)$ taková, že n–tice tečných vektorů $(X_1|_q, \ldots, X_n|_q)$ je v každém bodě $q \in U$ lineárně nezávislá, platí:

$f(p) = \sigma(p)(X_1|_p, \ldots, X_n|_p)$ je konstantní (či ekvivalentně hladká) funkce na U.

Varietu, na níž existuje orientace, nazýváme **orientovatelná**.

Zavádíme označení: $\sigma(p)(X_1|_p, \ldots, X_n|_p) = \sigma(X_1|_p, \ldots, X_n|_p)$.

Lemma 10.4. Pokud na varietě M dimenze $\dim M = n$ existuje diferenciální n–forma $\omega \in \Omega^n(M)$ taková, že $\omega(p) \neq 0$ v každém bodě $p \in M$, pak je M orientovatelná, s orientací danou předpisem

$$\sigma(X_1|_p, \ldots, X_n|_p) = \frac{\omega(X_1, \ldots, X_n)(p)}{|\,\omega(X_1, \ldots, X_n)(p)\,|}.$$

Příklad 10.5. Na symplektické varietě (M, ω) lze vždy zavést orientaci využitím poznámky 10.4 pomocí $\tilde{\omega} = \omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega \in \Omega^{\dim M}(M)$. V Darbouxových souřadnicích totiž máme

$$\tilde{\omega} = n! \cdot \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}p_m \wedge \mathrm{d}x^m, \quad \text{kde} \quad m = \frac{\dim M}{2}.$$

Důsledek 10.6. T^*M je vždy orientovatelná, M orientovatelná být nemusí.

Pokud v M existuje uzavřená křivka $\gamma : \langle 0,1\rangle \to M$, $U = U^\circ \subset M$ a $X \in \mathcal{X}(U)$ takové, že

- $\gamma(\langle 0,1\rangle) \subset U$,
- $\forall t \in \langle 0,1\rangle$ křivka γ splňuje $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$,
- a existují lineárně nezávislé vektory $E_1, \dots, E_n \in T_{\gamma(0)}M = T_{\gamma(1)}M$, tj. báze $T_{\gamma(0)}M$, takové, že $(\Psi^1_{X\star}(E_1), \dots, \Psi^1_{X\star}(E_n))$ je báze opačně orientovaná než $(E_1, \dots, E_n)$, tj. matice přechodu z jedné báze do druhé má záporný determinant,

pak M není orientovatelná.

Příklad 10.7. Möbiův list není orientovatelný.

Definice 10.8. Jsou-li na varietě zadány souřadnice, pak, není-li výslovně řečeno jinak, předpokládáme, že jsou odpovídající bazická vektorová pole v uvedeném pořadí kladně orientovaná.

Definice 10.9. Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ, $\dim M = n$, $U = U^\circ$ souřadnicové okolí se souřadnicemi (x^i), $\varphi : x(U) \subset \mathbb{R}^n \to U$ zobrazení inverzní k souřadnicím. Buď dále forma $\omega \in \Omega^n(M)$ a nosič této formy $\operatorname{supp}\omega = \overline{\{p \in M | \omega(p) \neq 0\}} \subset U$. Definujeme **integrál z formy ω na varietě** M předpisem

$$\int_M \omega = \int_{(U,\varphi)} \omega = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \int_{x(U)} (\varphi^\star\omega)_{1\dots n} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n.$$

Dle výše uvedeného nezávisí $\int_M \omega$ na výběru souřadnic na U.
Nyní zbývá zjistit, jak integrovat formy, jejichž nosič nelze pokrýt jedinou mapou.

Definice 10.10. Buď M diferencovatelná varieta, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ její otevřené pokrytí. Indexová množina J a soubor funkcí $f_\beta \in C^\infty(M)$, $\beta \in J$, tvoří **rozklad jednotky** podřízený pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ pokud jsou splněny následující podmínky:

1. $(\forall \beta \in J)(\exists \alpha \in I)(\operatorname{supp} f_\beta \subset U_\alpha$ a současně je $\operatorname{supp} f_\beta$ kompaktní),
2. $(\forall p \in M)(\exists U = U^\circ \ni p \,\&\, \exists K_p \subset J, \#\{K_p\} < +\infty)(\forall \beta \in J \setminus K_p)(\operatorname{supp} f_\beta \cap U = \emptyset)$,
3. $(\forall \beta \in J)(\forall p \in M)(f_\beta(p) \geq 0)$,
4. $(\forall p \in M)(\sum_{\beta\in J} f_\beta(p) = \sum_{\beta\in K_p} f_\beta(p) = 1)$.

Věta 10.11. Ke každému otevřenému pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ variety M existuje jemu podřízený rozklad jednotky. (Přičemž není určen jednoznačně.)

Důkaz. Bez důkazu. K platnosti věty potřebujeme parakompaktnost v definici variety. ■

Definice 10.12. Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ, $\dim M = n$ a $\omega \in \Omega^n(M)$. Definujeme **integrál z n–formy ω na varietě** M předpisem

$$\int_M \omega = \sum_{\beta\in J} \int_M f_\beta\, \omega, \tag{10.6}$$

kde $\{f_\beta\}_{\beta\in J}$ je rozklad jednotky podřízený nějakému atlasu $\{U_\alpha, (x^i_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.

Věta 10.13. $\int_M \omega$ nezávisí na výběru atlasu $\{U_\alpha, (x^i_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.

Důkaz. Pomocí společného zjemnění $\{U_\alpha \cap \tilde{U}_\beta\}_{\alpha\in I,\,\beta\in\tilde{I}}$ a jemu podřízeného rozkladu jednotky. ■

Věta 10.14. Buď ϕ difeomorfizmus orientovaných variet M a N stejné dimenze n, zachovávající orientaci, $\omega \in \Omega^n(N)$, $U = U^\circ \subset M$. Pak platí:

$$\int_{\phi(U)} \omega = \int_U \phi^\star\omega. \tag{10.7}$$

Důkaz. Pomocí rozkladu jednotky převedeme na součet integrálů v $\mathbb{R}^n$, dále viz substituce v Lebesgueově integrálu. ■

10.1 Cvičení

Cvičení 10.1. Zdůvodněte, že pro libovolný vektorový prostor V konečné dimenze s orientací σ, okolí $U = U^\circ \subset V$, variety M, N, zobrazení $F : U \to M$, difeomorfismus $\phi : M \to N$ a libovolnou $\omega \in \Omega^n(N)$ platí

$$\int_{\left(\phi(\tilde{U}),\phi\circ F\right)} \omega = \int_{\left(\tilde{U},F\right)} \phi^\star\omega,$$

kde $\tilde{U} = F(U)$ a $\dim V = n$.

Návod. Využijte větu o substituci v integrálu a výsledek cvičení 5.3.

Cvičení 10.2. Uvažujte varietu $M = S^2[u, v]$ se standardní orientací $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 1$ (viz definice 10.8) a 2–formu $\omega = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$. Spočítejte $\int_{S^2} \omega$.

Výsledek. $\int_{S^2} \omega = \pi$, výpočet je nejsnazší v polárních souřadnicích na rovině $[u, v]$.

Cvičení 10.3. Uvažujte symplektickou varietu (M, ω) a kanonické zobrazení ϕ. Uvažujte nějaké $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^{2k}$, $2 \le 2k \le \dim M$ a prosté hladké zobrazení $\psi : \mathbb{R}^{2k} \to M$, $\psi(U) = \tilde{U}$. Ukažte, že platí

$$\int_{\phi(\tilde{U})} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k-\text{krát}} = \int_{\tilde{U}} \omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega,$$

tj. získáváme známé Poincaréovy–Cartanovy integrální invarianty kanonických transformací.

Cvičení 10.4. Mějme orientovanou varietu (M, σ) dimenze n, formu $\omega \in \Omega^n(M)$ a vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$. Ukažte, že pro libovolné otevřené okolí $U = U^\circ \subset M$ platí

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \int_{\Psi^t_X(U)} \omega = \int_U \mathscr{L}_X\omega.$$

Návod.

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \int_{\Psi^t_X(U)} \omega = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \int_U \left(\Psi^t_X\right)^\star \omega = \int_U \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\Psi^t_X\right)^\star \omega = \int_U \mathscr{L}_X\omega.$$

Cvičení 10.5. V $\mathbb{R}^3[x,y,z]$ uvažujte $\omega = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\left(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z\right)$ a zobrazení

$$F : (0,1) \to \mathbb{R}^3, \quad F(t) = \left(\cos(t^2), \sin(t^2), t^2\right), \quad \tilde{U} = F(U).$$

Určete $\int_{(\tilde{U},F)} \omega$.

Výsledek.

$$F^\star\omega = -2\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}^3}\mathrm{d}t, \qquad -2\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \qquad \int_{(\tilde{U},F)} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Cvičení 10.6. Stejnou úlohu jako výše řešte pro zobrazení

$$F : (0,1) \to \mathbb{R}^3, \quad F(t) = \left(\cos(t), \sin(t), t\right), \quad \tilde{U} = F(U).$$

Výsledek.

$$F^\star\omega = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3}\mathrm{d}t, \qquad -\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \int_{(\tilde{U},F)} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Cvičení 10.7. Uvažujte $S^2[\theta,\phi]$ vnořenou do $\mathbb{R}^3[x,y,z]$ předpisem

$$F(\theta,\phi) = \frac{1}{1+\frac{\theta^2}{\pi^2}}\left(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\right)$$

a

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\left(x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right).$$

Zdůvodněte, že vnoření F je možné jednoznačným hladkým způsobem definovat na celé sféře a určete $\int_{(S^2,F)} \omega$.

Výsledek.

$$F^\star\omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi, \quad \int_{(S^2,F)} \omega = \int_{S^2} F^\star\omega = 4\pi.$$

Kapitola 11

Integrace na varietách s hranicí, Stokesova věta

V této kapitole si prostudujeme základní nástroj pro efektivní výpočty integrálů na varietách, tzv. Stokesovu větu. Lze ji vyjádřit v následujícím, zdánlivě jednoduchém, tvaru

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{11.1}$$

Uvidíme, že jejím využitím snadno dokážeme několik výsledků, které jsme dříve zmínili bez důkazu.

Ke smysluplné formulaci Stokesovy věty bude třeba vyjasnit, v jakém smyslu je varietě M přiřazena její hranice, o jakou geometrickou strukturu se vlastně jedná a jak je orientována.

Nejprve definujme integrál z formy přes vnořenou podvarietu.

Definice 11.1. Buď M s orientací σ vnořená podvarieta N, $\phi : M \to N$ příslušné vnoření, $\dim M = m$, $\dim N = n \geq m$. Pak pro $\omega \in \Omega^m(N)$ definujeme:

$$\int_{(\phi(M),\phi)} \omega = \int_M \phi^\star \omega. \tag{11.2}$$

Hodnota integrálu opět nezávisí na konkrétním způsobu parametrizace N, ale může se lišit pro ϕ a ϕ', která nelze propojit difeomorfizmem $\psi : M \to M$ takovým, že $\phi = \phi' \circ \psi$.

Nyní budeme uvažovat dva speciální případy Stokesovy věty, jež nám umožní pochopit motivaci pro zavedení potřebných pojmů a následně větu odvodit v její obecné podobě.

Příklad 11.2. Uvažujme $\mathbb{R}^2[x, y]$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vymezenou jako vnitřek konvexního lineárního obalu $\Omega = ([(0,0),(1,0),(0,1)]_\kappa)^\circ$, tj. trojúhelníka s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$. Hranici tohoto trojúhelníka Ω popíšeme pomocí tří úseček parametrizovaných způsobem

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau) &= (\tau, 0), \\ \gamma_2(\tau) &= (1-\tau, \tau), \qquad \tau \in \langle 0, 1\rangle. \\ \gamma_3(\tau) &= (0, 1-\tau), \end{aligned}$$

Na $\mathbb{R}^2$ definujeme orientaci $\sigma((1,0),(0,1)) \equiv \sigma(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 1$, úseky hranice oblasti Ω orientujeme tak, aby $\sigma_i(\frac{\partial}{\partial \tau}) = 1 \Leftrightarrow \sigma(\vec{n}, \gamma_{i\star}(\frac{\partial}{\partial \tau})) = 1$, kde $\vec{n}$ je vnější normála k Ω v

$q \in \gamma_i((0,1))$ a τ je souřadnice podél γ_i. Buď $\omega = \omega_x \mathrm{d}x + \omega_y \mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ libovolná 1–forma, $\mathrm{d}\omega = (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Pak platí:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{d}\omega &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\ (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}x\ \partial_x \omega_y - \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\ \partial_y \omega_x = \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}y\ (\omega_y(1-y,y) - \omega_y(0,y)) - \int_0^1 \mathrm{d}x\ (\omega_x(x,1-x) - \omega_x(x,0)) = \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}y\ \omega_y(0,y) + \int_0^1 \mathrm{d}x\ \omega_x(x,0) + \int_0^1 \mathrm{d}\tau\ \underbrace{(\omega_y(1-\tau,\tau) - \omega_x(1-\tau,\tau))}_{\gamma_2^\star\omega,\ \text{kde}\ \gamma_2(\tau)=(1-\tau,\tau)} = \\
&= \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega.
\end{aligned}$$

Příklad 11.3. Buď $M = \mathbb{R}^n[x^1, \ldots, x^n]$ se standardní bází $(e_i)_{i=1}^n$, orientací $\sigma(e_1, \ldots, e_n) = 1$, a souřadnicemi x^i definovanými předpisem $x^i(a^j e_j) = a^i$. Označme nulový vektor $e_0 \equiv \vec{0}$. Pak definujeme simplex $\Omega = ([e_0, e_1, \ldots, e_n]_\kappa)^\circ$ a jeho hranici $\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^n [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n]_\kappa$, kde stříška zde i dále značí vynechání prvku.

Na $\partial\Omega_i = [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n]_\kappa$ zavádíme orientaci opět tak, že $\sigma_i(f_1, \ldots, f_{n-1})(z) \equiv \sigma(\vec{n}, f_1, \ldots, f_{n-1})(z)$, kde $f_1, \ldots, f_{n-1} \in T_z(\partial\Omega_i)$ a $\vec{n}$ je ven orientovaná normála k nadrovině obsahující $\partial\Omega_i$.

Dále nechť $\omega \in \Omega^{n-1}(V)$, kde okolí $V = V^\circ \subset \mathbb{R}^n$ obsahuje simplex Ω vč. jeho hranice, $\overline{\Omega} \subset V$. Formu ω a její vnější derivaci $\mathrm{d}\omega \in \Omega^n(V)$ vyjádříme ve tvaru

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \omega_i\ \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n, \qquad \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Pro integrál z n–formy $\mathrm{d}\omega$ přes oblast Ω dostáváme (nutno pamatovat na orientaci):

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{d}\omega &= \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1,\, j\neq i}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x^i} \ldots \mathrm{d}x^n \Bigg(\omega_i(x^1, \ldots, \underbrace{1 - \sum_{i\neq j} x^j}_{i\text{-tá pozice}}, \ldots, x^n) - \\
&\quad - \omega_i(x^1, \ldots, \underbrace{0}_{i\text{-tá pozice}}, \ldots, x^n) \Bigg) = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1,\, j\neq i}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x^i} \ldots \mathrm{d}x^n \Big(\omega_i(x^1, \ldots, \underbrace{1 - \sum_{i\neq j} x^j}_{i\text{-tá pozice}}, \ldots, x^n) \Big) + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega = \\
&= \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \omega_i\ \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega = \sum_{i=0}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega \equiv \int_{\partial\Omega} \omega.
\end{aligned}$$

V předposledním rovnítku se orientace souřadnic $(x^1, \ldots, \widehat{x}^i, \ldots, x^n)$ na $\partial\Omega_0$ projevila alternujícím znaménkem $(-1)^{i+1}$.

Definice 11.4. Mějme $\mathbb{R}^p$ se standardní bází $(e_1, \ldots, e_p)$ a orientací σ, $\sigma(e_1, \ldots, e_p) = 1$. Definujeme **standardní p–simplex** Δ_p jako ($e_0 \equiv \vec{0}$):

$$\Delta_p = [e_0, e_1, \ldots, e_p]_\kappa = \{a^i e_i \,|\, a^i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} a^i \leq 1\}. \tag{11.3}$$

Definice 11.5. (Singulární) p-simplex v n–rozměrné varietě M je hladké zobrazení σ_p nějakého $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^p$, kde $\Delta_p \subset U$, do M.

V definici 11.5 se za definiční obor zobrazení bere okolí Δ_p a ne samotné Δ_p mj. proto, že chceme, aby byla zajištěna existence derivací na hranicích. Dále pokládáme $\sigma_p \equiv \sigma_p(\Delta_p)$.

Dva singulární p-simplexy σ_p a σ'_p (z $U \subset \mathbb{R}^p$ do M) považujeme za **ekvivalentní**, pokud existuje $V = V^\circ \subset U$, $\Delta_p \subset V$ a difeomorfizmus $\phi : V \to \phi(V)$, $\Delta_p \subset \phi(V)$ takový, že $\phi(\Delta_p) = \Delta_p$, zachovávající orientaci σ na $\mathbb{R}^p$ (tj. $\sigma = \sigma \circ \phi_*$)fTok a splňující $\sigma_p|_V = \sigma'_p\big|_{\phi(V)} \circ \phi|_V$.

Definice 11.6. (Singulární) p–řetězec v n-rozměrné varietě M je libovolná formální lineární kombinace singulárních p-simplexů na M (modulo ekvivalence).

Definice 11.7. Operátor hranice ∂ přiřazuje p–řetězcům na M $(p-1)$–řetězce následovně:

- Standardnímu p–simplexu přiřadí

$$\partial\Delta_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \Delta_{p-1}^{(k)}, \tag{11.4}$$

  kde $\Delta_{p-1}^{(k)} = [e_0, \ldots, \hat{e}_k, \ldots, e_p]_\kappa$ je třeba chápat jako singulární $(p-1)$-simplex ve varietě $\mathbb{R}^p$, $\Delta_{p-1}^{(k)} : U \subset \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^p$, kde $\Delta_{p-1} \subset U$.

- Singulárnímu p–simplexu σ_p přiřadí

$$\partial\sigma_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_p \circ \Delta_{p-1}^{(k)}. \tag{11.5}$$

- Lineárním rozšířením definujeme hranici libovolného singulárního p–řetězce.

Jinak řečeno, operátor hranice přiřazuje p–simplexu orientovaný součet jeho stěn, kde orientace je indukována vnější normálou a orientací $\mathbb{R}^p$, tj. $\sigma'(f_1, \ldots, f_{p-1}) = \sigma(n, f_1, \ldots, f_{p-1})$.

Z elementární geometrie dostáváme $\partial^2\Delta_p = \partial\circ\partial(\Delta_p) = 0$, neboť každý $(p-2)$–simplex $[e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots e_n]_\kappa$ v $\partial^2\Delta_p$ vyvstane dvakrát, s opačnými znaménky. Tudíž i obecně platí

$$\partial^2 = 0. \tag{11.6}$$

Definice 11.8. Buď c_p singulární p-řetězec ve varietě M, $c_p = \sum_{i=1}^{k} a_i \sigma_p^{(i)}$. **Integrál p–formy ω** přes řetězec c_p je definován předpisem

$$\int_{c_p} \omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{(\sigma_p^{(i)}(\Delta_p), \sigma_p^{(i)})} \omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{\Delta_p} \sigma_p^{(i)\star}\omega. \tag{11.7}$$

Věta 11.9 (Stokesova pro p–řetězce)**.** Buď c_p p–řetězec na varietě M, $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$. Pak platí

$$\int_{c_p} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c_p} \omega. \tag{11.8}$$

Důkaz. Viz integrály po standardních simplexech a definice integrálu po p-řetězci. ■

Věta 11.10. Buď N orientovaná varieta, $\dim N = p$, ϕ její prosté vnoření do variety M. Buď dále $\overline{\phi(N)}$ kompaktní. Pak existuje **triangulace** vnořené podvariety $N \simeq \phi(N)$, tj. její pokrytí p-řetězcem $c_p = \sum_{k=1}^{m} \sigma_p^{(k)}$, který splňuje:

1. $\forall k \in \hat{m} : \sigma_p^{(k)} : U^{(k)} = U^{(k)\circ} \to M$, $\Delta_p \subset U^{(k)}$, $\sigma_p^{(k)}(\Delta_p^\circ) \subset \phi(N)$,
2. $\forall k \in \hat{m} : \sigma_p^{(k)}$ je prosté,
3. $\forall k \in \hat{m} : \sigma_p^{(k)}$ zachovává orientaci variety $\phi(N)$,
4. $\forall q \in \phi(N) : \left(\exists_1 k \in \hat{m} : q = \sigma_p^{(k)}(q_0),\, q_0 \in \Delta_p^\circ\right)$ nebo $\left(\exists k \in \hat{m} : q = \sigma_p^{(k)}(q_0), q_0 \in \Delta_p \setminus \Delta_p^\circ\right)$.

Takový řetězec nazýváme **simpliciální**.

$\partial c_p \equiv \partial N$ lze popsat jako konečné sjednocení vnořených variet překrývajících se na množině míry nula z hlediska $\int_{\partial c_p}$. Vnitřní stěny se při integraci (či rovnou v lineární kombinaci simplexů) navzájem vyruší, neboť jsou v ∂c_p vždy obsaženy dvakrát s navzájem opačnou orientací. Tudíž dostáváme následující větu.

Věta 11.11 (Stokesova)**.** Nechť N je orientovaná prostě vnořená podvarieta M taková, že $\bar{N}$ je kompaktní podmnožina M, $\dim N = p$, $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$. Pak platí

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N \mathrm{d}\omega. \tag{11.9}$$

11.1 Poincaréovo lemma

Zavedení integrace na varietách nám umožňuje dokázat Poincaréovo lemma o lokální exaktnosti uzavřených forem. Nejprve musíme zobecnit výsledek cvičení 10.4.

Lemma 11.12. Uvažujte varietu M a hladké zobrazení $\phi : \langle 0,1\rangle \times M \to M$ takové, že pro každé $t \in \langle 0,1\rangle$ je $\phi_t : M \to M : \phi_t(p) = \phi(t,p)$ difeomorfismus. Buď V vnořená podvarieta dimenze k, $V(t) = \phi_t(V)$. Pak pro libovolnou k–formu $\omega \in \Omega^k(M)$ a $t \in (0,1)$ platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} \omega = \int_{V(t)} \mathscr{L}_{X_t}\omega, \text{ kde } X_t \in \mathcal{X}(M),\, X_t(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \phi_s(\phi_t^{-1}(p)). \tag{11.10}$$

Důkaz. V tomto případě bohužel nemůžeme použít obdobnou argumentaci jako ve cvičení 10.4, protože zobrazení ϕ není tokem vektorového pole X_t. Řešením je přidání další dimenze k naší varietě, tj. budeme uvažovat $\tilde{M} = (0,1)\,[t] \times M$, na kterou naše objekty přeneseme následovně:

- $\omega \in \Omega^k(M)$ můžeme přímo interpretovat jako $\omega \in \Omega^k(\tilde{M})$ s tím, že v souřadnicovém vyjádření nemá žádné členy tvary $\mathrm{d}t \wedge \ldots$,
- $V(t)$ definuje vnořenou podvarietu dimenze k v $\tilde{M}$ předpisem $\tilde{V}(t) = \{t\} \times V(t)$,
- vektorová pole X_t nám definují jedno vektorové pole na $\tilde{M}$ předpisem

$$\tilde{X}\Big|_{t,p} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t,p} + X_t|_p = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t,p} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \phi_{t+\epsilon}(\phi_t^{-1}(p)).$$

Tok vektorového pole $\tilde{X} \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ má tvar

$$\Psi^\tau_{\tilde{X}}(t,p) \equiv (t(\tau), p(\tau)) = \left(t+\tau, \phi_{t+\tau}(\phi_t^{-1}(p))\right),$$

jak ověříme výpočtem derivace

$$\begin{aligned}\dot{p}(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \phi_{t+\tau+\epsilon}(\phi_t^{-1}(p)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \phi_{t+\tau+\epsilon}(\phi_{t+\tau}^{-1}(\phi_{t+\tau}(\phi_t^{-1}(p)))) = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \phi_{t+\tau+\epsilon}(\phi_{t+\tau}^{-1}(p(\tau))) = X_{t+\tau}(p(\tau)) = X_{t(\tau)}(p(\tau)).\end{aligned}$$

Na základě výsledku cvičení 10.4 můžeme tudíž psát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tilde{V}(t)} \omega = \int_{\tilde{V}(t)} \mathscr{L}_{\tilde{X}}\omega.$$

Vzhledem k tomu, že ω nezávisí na t a neobsahuje žádné příspěvky tvaru $\mathrm{d}t\wedge\ldots$, můžeme následně psát $\mathscr{L}_{\tilde{X}}\omega = \mathscr{L}_{X_t}\omega$ (kde striktně vzato pro účely rovnosti interpretujeme X_t a ω jako objekty na varietě $\tilde{M}$ s nulovými t–složkami) a $\int_{\tilde{V}(t)}\omega = \int_{V(t)}\omega$. Tím získáváme dokazovanou identitu (11.10). ■

Důsledek 11.13.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\phi_t^\star\omega\right) = \phi_t^\star \mathscr{L}_{X_t}\omega$$

Důkaz. Integrál v (11.10) přeneseme z $V(t) = \phi_t(V)$ na V pomocí věty 10.14 (poznamenejme, že všechny difeomorfismy ϕ_t ze spojitosti v parametru t transformují orientaci V stejně) a využitím libovolnosti integrační oblasti získáváme hledaný důsledek. ■

Lemma 11.14. Buď M otevřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$, tj.

$$M = B(0,1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n |\, |\vec{x}| < 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

a $\omega \in \Omega^k(M)$ uzavřená diferenciální k–forma, $\mathrm{d}\omega = 0$, $k \geq 1$. Pak existuje diferenciální $(k-1)$–forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ taková, že $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

Důkaz. Budeme uvažovat zobrazení $\phi_t(\vec{x}) = (1-t)\vec{x}$ definovaná pro $0 \leq t \leq 1$. Odpovídající vektorové pole X_t z lemmatu 11.12 má tvar $X_t(\vec{y}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big|_{s=t} \frac{1-s}{1-t}\vec{y} = -\frac{\vec{y}}{1-t}$, kde $0 \leq t < 1$. Máme $\phi_0 = \mathrm{id}$, $\phi_1 = 0$ a tudíž $\phi_0^\star = \mathrm{id}$, $\phi_1^\star = 0$. Vyjádříme

$$\begin{aligned}\omega(\vec{x}) = \left(\phi_0^\star\omega\right)(\vec{x}) &= \phi_0^\star\left(\omega(\phi_0(\vec{x}))\right) - \phi_1^\star\left(\omega(\phi_1(\vec{x}))\right) = -\lim_{\epsilon\to 1^-}\int_0^\epsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\phi_s^\star\left(\omega(\phi_s(\vec{x}))\right)\right)\mathrm{d}s = \\ &= -\lim_{\epsilon\to 1^-}\int_0^\epsilon \phi_s^\star\left(\mathscr{L}_{X_s}\omega\left(\phi_s(\vec{x})\right)\right) = -\lim_{\epsilon\to 1^-}\int_0^\epsilon \phi_s^\star\left(\mathrm{d}i_{X_s}\omega\left(\phi_s(\vec{x})\right)\right)\mathrm{d}s = \\ &= -\lim_{\epsilon\to 1^-}\mathrm{d}\int_0^\epsilon \phi_s^\star\left(i_{X_s}\omega\left(\phi_s(\vec{x})\right)\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

což lze dále upravit jako $\mathrm{d}\left(-\lim_{\epsilon\to 1^-}\int_0^\epsilon \phi_s^\star\left(i_{X_s}\omega\left(\phi_s(\vec{x})\right)\right)\mathrm{d}s\right)$, pokud limita existuje. Její existenci ukážeme v souřadnicích. Mějme

$$\omega = \omega_{\vec{I}}\mathrm{d}x^{\vec{I}}, \quad \text{kde} \quad |\,\vec{I}\,| = k.$$

Pro následující úpravy definujme též $\omega_I = \delta_I^{\vec{J}}\omega_{\vec{J}}$. Zjišťujeme, že $i_X\omega = X^i\omega_{i\vec{J}}\mathrm{d}x^{\vec{J}}$, tj.

$$i_{X_s}\omega(\vec{y}) = -\frac{y^i}{1-s}\omega_{i\vec{J}}(\vec{y})\mathrm{d}y^{\vec{J}}$$

a

$$\phi_s^\star\left(i_{X_s}\omega\left(\phi_s(\vec{x})\right)\right) = -x^i\omega_{i\vec{J}}((1-s)\vec{x})(1-s)^{k-1}\mathrm{d}x^{\vec{J}}.$$

Označíme-li $\tau = 1-s$, dostáváme hledanou $(k-1)$–formu α na $B(0,1)$ vyjádřenou ve tvaru

$$\alpha = -\int_0^1 \mathrm{d}\tau\tau^{k-1}\left(-x^i\omega_{i\vec{J}}(\tau\vec{x})\mathrm{d}x^{\vec{J}}\right) = \left(\int_0^1 \mathrm{d}\tau\tau^{k-1}\omega_{i\vec{J}}(\tau\vec{x})\right)x^i\mathrm{d}x^{\vec{J}}.$$

Její hladkost vyplývá z hladké závislosti určitého integrálu hladké funkce na parametrech. Integrál konverguje díky kompaknosti integrační oblasti. ■

Věta 11.15 (Poincaréovo lemma)**.** Buď ω uzavřená k–forma na varietě M, $k \geq 1$ a $U = U^\circ \subset M$ otevřená podmnožina difeomorfní otevřené kouli v $\mathbb{R}^{\dim M}$. Pak existuje $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ taková, že $\omega|_U = \mathrm{d}\alpha$.

Důkaz. Přenesení lemmatu 11.14 do M difeomorfismem. ■

11.2 Cvičení

Cvičení 11.1. Graficky nalezněte triangulaci S^2, $T^2 = S^1 \times S^1$ a $B(0,1)$. Určete ∂S^2, $\partial B(0,1)$.

Návod. Při zakreslení triangulací do rovinných map na S^2, $T^2 = S^1 \times S^1$ je třeba kontrolovat, aby se žádný ze simplexů neprotnul v limitních bodech na "okrajích" mapy, to je častou chybou.

Cvičení 11.2. Uvažujte 2–rozměrnou reálnou varietu $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2[x,y]$ a na ní diferenciální 1–formu s hodnotami v komplexních číslech vyjádřenou následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\omega = f(x,y)\mathrm{d}z &= \left(f_{\mathrm{re}}(x,y) + \mathrm{i}f_{\mathrm{im}}(x,y)\right)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)\\ &= \left(f_{\mathrm{re}}(x,y)\mathrm{d}x - f_{\mathrm{im}}(x,y)\mathrm{d}y\right) + \mathrm{i}\left(f_{\mathrm{re}}(x,y)\mathrm{d}y + f_{\mathrm{im}}(x,y)\mathrm{d}x\right),\end{aligned} \tag{11.11}$$

kde $f(x,y) = f_{\mathrm{re}}(x,y) + \mathrm{i}f_{\mathrm{im}}(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$, tj. $f_{\mathrm{re}}(x,y)$, $f_{\mathrm{im}}(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a $z = x + \mathrm{i}y$. Ukažte, že ω je uzavřená právě tehdy, když f je holomorfní, tj. splňuje Cauchy–Riemannovy podmínky (uzavřenost formy s hodnotami v komplexních číslech chápeme jako současnou uzavřenost její reálné a imaginární části zapsané v druhém řádku (11.11)). Interpretujte Cauchyho větu o integrálu z holomorfní funkce podél uzavřené křivky jako speciální případ Stokesovy věty.

Cvičení 11.3. Na varietě $M = \mathbb{R}^3[x,y,z] - \{\vec{0}\}$ uvažujte

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\left(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right) \in \Omega^2(M)$$

a dvě podvariety

$$N_1 = \left\{(x,y,z) \in M \;\middle|\; \frac{(x-99)^2}{100^2} + y^2 + 30z^2 = 1\right\},$$
$$N_2 = \left\{(x,y,z) \in M \;\middle|\; \frac{(x-101)^2}{100^2} + y^2 + 30z^2 = 1\right\}.$$

Určete $\int_{N_1} \omega$ a $\int_{N_2} \omega$.

Návod. Využijte skutečnosti, že $\mathrm{d}\omega = 0$ na celé varietě M (ověřte). Tudíž pro integrační podvarietu N_2, která ohraničuje otevřenou oblast v M, dostáváme ze Stokesovy věty přímo $\int_{N_2} \omega = 0$. Pro integrační podvarietu N_1 stejný argument nefunguje, neboť ve "vnitřku" N_1 leží bod $\vec{0}$, v němž ω není definována (proto byl vynechán z variety M). Ale Stokesova věta nám umožňuje integrál převést na integrál přes vhodnější podvarietu obepínající singulární bod $\vec{0}$, např. jednotkovou sféru. Následně převedením do sférických souřadnic (viz cvičení 6.3) a integrací dostáváme $\int_{N_1} \omega = 4\pi$.

Cvičení 11.4. Ukažte, že 2–forma $\omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$ definovaná na sféře S^2 ve sférických souřadnicích (θ, ϕ) a hladce dodefinovaná na celé S^2 (viz cvičení 5.2) není na S^2 exaktní.

Návod. Pokud by exaktní byla, $\omega = \mathrm{d}\alpha$, tak $\int_{S^2} \omega = \int_{\partial S^2} \alpha = 0$, neboť hranice sféry S^2 je nulová. Přitom víme, že $\int_{S^2} \omega = 4\pi$, což je hledaný spor.

Kapitola 12

Variety s dodatečnou strukturou

Podobně jako v případě Hamiltonovské mechaniky, i pro popis elektromagnetismu či obecné relativity potřebujeme na varietě – časoprostoru jisté dodatečné struktury. Ukazuje se, že základním pojmem je metrika, která nám umožní na varietě měřit vzdálenosti a úhly.

Lemma 12.1. Mějme vektorové prostory V a W konečných dimenzí. Lineární zobrazení $A : V \to W$ je možné interpretovat též jako bilineární zobrazení $A : V \times W^* \to \mathbb{R}$ nebo jako lineární zobrazení $A : V \otimes W^* \to \mathbb{R}$. Prostory lineárních zobrazení $V \to W$ a lineárních funkcionálů $V \otimes W^* \to \mathbb{R}$ je tedy možné kanonicky ztotožnit.

Důkaz. Uvažujme bázi (e_i) prostoru V, bázi (f_a) prostoru W a k ní duální bázi (f^{*a}) prostoru W^*. Zobrazení A je pak zadáno svou maticí A^a_j: $A(e_j) = f_a A^a_j$. Odpovídající zobrazení $A_{V\times W^*} : V \times W^* \to \mathbb{R}$ a $A_{V\otimes W^*} : V \otimes W^* \to \mathbb{R}$ pak konstruujeme následovně:

$$A_{V\times W^*}(e_i, f^{*a}) = A^a_j, \qquad A_{V\otimes W^*}(e_i \otimes f^{*a}) = A^a_j.$$

Z předpisu pro změnu matice zobrazení $A'^a_j = (S^{-1})^a_b A^b_j T^j_i$ při změně bazí

$$e'_i = T^j_i e_j, \quad f'_a = S^b_a f_b, \quad f'^{*a} = (S^{-1})^a_b f^{*b}$$

vyplývá

$$A'_{V\times W^*}(e'_i, f'^{*a}) \equiv A'^a_j = (S^{-1})^a_b A^b_j T^j_i = A_{V\times W^*}(T^j_i e_j, (S^{-1})^a_b f^{*b}) = A_{V\times W^*}(e'_i, f'^{*a}),$$

takže definice $A_{V\times W^*}$ na výběru bazí nezávisí a podobně též pro $A_{V\otimes W^*}$.

Rozdíl mezi $A_{V\times W^*}$ a $A_{V\otimes W^*}$ je víceméně jen terminologický, **tenzorový součin** $V \otimes W^*$ v sobě dle definice obsahuje lineární kombinace elementů tvaru $v \otimes w$, $v \in V, w \in W$ se ztotožněním $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$, $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$ a

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v \otimes w) = v \otimes (\lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bilinearita zobrazení $A_{V\times W^*}$ zajišťuje, že

$$A_{V\times W^*}(\lambda e, f^*) = A_{V\times W^*}(e, \lambda f^*) = \lambda A_{V\times W^*}(e, f^*).$$

Podobná úvaha platí i pro ekvivalenci z hlediska aditivity, tj. lze konzistentně definovat hodnotu $A_{V\otimes W^*}(v\otimes w)$ nezávisející na volbě vyjádření vektoru $v\otimes w$ jako uspořádané dvojice a takto definované zobrazení $A_{V\otimes W^*}$ je lineární. Nadále nebudeme indexy odlišující, na co zobrazení A působí, používat a bude to vyplývat z kontextu. ■

Definice 12.2. Tenzor q–krát kovariantní a r–krát kontravariantní na varietě M je hladké zobrazení, které každému $p \in M$ přiřadí $T(p) \in (T_p^*M)^{\otimes q} \otimes (T_pM)^{\otimes r}$. Prostor q–krát kovariantních a r–krát kontravariantních tenzorů značíme $T_q^r(M)$.

Dle Lemmatu 12.1 tenzor $T(p)$ v bodě p lze interpretovat jako multilineární zobrazení

$$T : (T_pM)^{\times q} \times (T_p^*M)^{\times r} \to \mathbb{R}. \tag{12.1}$$

Lemma 12.3. Tenzor q–krát kovariantní a r–krát kontravariantní lze též chápat jako $C^\infty(M)$–multilineární zobrazení

$$T : (\mathcal{X}(M))^{\times q} \times (\Omega^1(M))^{\times r} \to C^\infty(M), \tag{12.2}$$

tj.

$$\begin{aligned} fT(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^r) &= T(fX_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^r) = \dots = \\ T(X_1, \dots, fX_q, \omega^1, \dots, \omega^r) &= T(X_1, \dots, X_q, f\omega^1, \dots, \omega^r) = \dots \end{aligned}$$

pro libovolná $X_1, \dots, X_q \in \mathcal{X}(M)$, $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Omega^1(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Této skutečnosti často s výhodou využíváme při určování, zda zadané $\mathbb{R}$–multilineární zobrazení je či není tenzor.

Důkaz. Zřejmý z definice a hladkosti všech uvažovaných objektů. ■

Takto definovaný tenzor T se často ve fyzice nazývá **tenzorové pole**, neboť je definován v každém bodě variety.

Definice 12.4. Metrika $g \in T_2^0(M)$ na varietě M je 2–krát kovariantní symetrický tenzor na M nedegenerovaný v každém bodě $p \in M$. Varietu M s metrikou g značíme (M, g).

Metrika g na varietě M se nazývá

- **riemannovská** právě tehdy, když je $g(p)$ pozitivně definitní pro všechna $p \in M$,
- **lorentzovská (pseudoriemannovská)** právě tehdy, když má $g(p)$ konstantní signaturu $(\dim M - 1, 1)$ nebo $(1, \dim M - 1)$ pro všechna $p \in M$.

Na varietě může být zavedeno více metrik, je třeba vždy uvést, kterou právě uvažujeme. Zadaná metrika nám poskytuje následující vlastnosti a možnosti:

1. umožňuje měřit délky tečných vektorů a úhly mezi nimi;
2. metrika
$$g(p) = g_{ij}(p)\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \equiv g_{ij}(p) \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j$$
se při změně souřadnic transformuje následujícím způsobem ($p \in M$, $g_{ij}(p) = g_{ji}(p)$):
$$g(p) = g'_{ij}(p)\, \mathrm{d}x'^i \otimes \mathrm{d}x'^j, \qquad g'_{ij}(p) = \left.\frac{\partial x^a}{\partial x'^i}\right|_p \left.\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\right|_p g_{ab}(p). \tag{12.3}$$
3. Nechť je M vnořená podvarieta N, $\Phi : M \to N$ a g riemannovská metrika na N. Pak
$$\Phi^\star g \in T_2^0(M) : \quad (\Phi^\star g)(V, W)(p) = g(\Phi_\star(V|_p), \Phi_\star(W|_p)) \tag{12.4}$$
definuje riemannovskou metriku na M. Tato metrika se nazývá **indukovaná metrika**. V případě, že g má jinou než definitní signaturu, tak $\Phi^\star g$ nemusí být nedegenerovaná, tj. obecně není metrikou (viz světlupodobné směry v Minkowského prostoročase, na nichž je indukovaný tenzor nulový).

4. Metrika umožňuje vzájemně jednoznačně zobrazit T_pM a T_p^*M pomocí zobrazení $\flat(p) : T_pM \to T_p^*M$ a $\sharp(p) : T_p^*M \to T_pM$, pro která platí $\flat \circ \sharp = \mathrm{id}$ a

$$(\flat(p)V)(W) = g(V,W), \quad g(\sharp(p)\alpha, V) = \alpha(V), \quad V, W \in T_pM, \quad \alpha \in T_p^*M. \tag{12.5}$$

Dále budeme zkoumat, jakým způsobem lze na varietě zadat derivaci vektorových polí ve směru tečného vektoru ve zvoleném bodě. Připomeňme, že Lieova derivace není definována ve směru tečného vektoru, protože potřebujeme znát hodnoty vektorového pole, podle kterého derivujeme, na okolí bodu, ve kterém derivaci vyhodnocujeme. Tato nesnáz odpadá při využití následujícího druhu derivace, která je definována námi požadovanými vlastnostmi, tj. lokální závislostí na směru, ve kterém derivujeme, a derivační vlastností v argumentu.

Definice 12.5. (Afinní) konexe (často též zvaná **kovariantní derivace**, angl. affine connection) na varietě M je zobrazení $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) : \nabla(X,Y) \equiv \nabla_X(Y)$ vyhovující vztahům

1. $\nabla_{fX+Y}(Z) = f\nabla_X(Z) + \nabla_Y(Z)$,
2. $\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$,

pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(M)$, konstantu $a \in \mathbb{R}$ a vektorová pole $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Všimněme si, že kvůli třetí podmínce konexe není tenzor, ale rozdíl libovolných dvou konexí již evidentně tenzor je, což se často s výhodou využívá ve výpočtech výběrem vhodné referenční konexe.

Mějme na $U = U^\circ \subset M$ referenční souřadný systém (reper), tj. lokálně definovaná vektorová pole $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{X}(U)$ taková, že tečné vektory $e_1|_p, \ldots, e_n|_p$ jsou lineárně nezávislé ve všech bodech $p \in U$. Definujeme složky konexe ∇ vzhledem k reperu $(e_1, \ldots, e_n)$, které značíme Γ_{ij}^k, předpisem

$$\nabla e_i(e_j)(p) = \Gamma_{ij}^k(p) e_k(p). \tag{12.6}$$

Pro konexi aplikovanou na libovolná dvě vektorová pole vyjádřená v rozkladu do reperu $(e_1, \ldots, e_n)$ ve tvaru $X = X^i e_i, Y = Y^i e_i$, kde $X^i, Y^i \in C^\infty(U)$ jsou složky vektorových polí X a Y vzhledem k reperu, pak získáváme vyjádření

$$\nabla_X(Y) = X^i \nabla_{e_i}(Y^j e_j) = X^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k + X^i e_i(Y^j)\, e_j = X^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k + X(Y^j) e_j. \tag{12.7}$$

Speciálně pro $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ máme

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(Y) = \left(Y^j \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial}{\partial x^i} Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{12.8}$$

Složky konexe Γ_{ij}^k obecně nejsou symetrické v indexech i, j.

Definice 12.6. Tenzor torze $T \in T_2^1(M)$ konexe ∇ je dán vztahem:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \quad \text{kde } X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{12.9}$$

K ověření, že se jedná o tenzor, stačí dle Lemmatu 12.3 zkontrolovat

$$T(fX,Y) = fT(X,Y), \tag{12.10}$$

v druhé kovariantní složce to následně plyne z antisymetrie v X,Y, v kontravariantní pak z vlastnosti párování vektorů a 1–forem $\langle T(X,Y), f\omega\rangle = f\langle T(X,Y),\omega\rangle$. Vlastnost (12.10) ověříme výpočtem z vlastností afinní konexe,

$$\begin{aligned} T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y fX - [fX,Y] \\ &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - (Yf)X - [fX,Y] + (Yf)X \\ &= fT(X,Y) - (Yf)X + (Yf)X = fT(X,Y). \end{aligned}$$

V souřadnicové bázi $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ je torze nulová právě tehdy, když složky konexe Γ^k_{ij} jsou symetrické v indexech i,j. V jiných reperech to ale neplatí.

Definice 12.7. Tenzor křivosti $R \in T^1_3(M)$ konexe ∇ je definován vztahem:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z, \qquad X,Y,Z \in \mathcal{X}(M). \tag{12.11}$$

Skutečnost, že křivost je tenzor, lze opět snadno ověřit využitím lemmatu 12.3 a vlastností konexe, podobně jako výše pro tenzor torze.

Máme-li varietu s metrikou (M,g), pak na M existuje význačná konexe ∇^{LC}, která se nazývá **Levi-Civitova**. Splňuje vztahy

$$T(X,Y) = 0, \qquad X(g(Y,Z)) = g(\nabla^{LC}_X Y, Z) + g(Y, \nabla^{LC}_X Z), \quad X,Y,Z \in \mathcal{X}(M) \tag{12.12}$$

a je jimi určena jednoznačně. V souřadnicích (x^i) mají složky Levi-Civitovy konexe ∇^{LC} tvar

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{lk} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk}\right),$$

kde g^{il} jsou složky matice inverzní k symetrické matici g, $g^{il}g_{lk} = \delta^i_k$.

Dále se ukazuje, že na varietě s metrikou (M,g) a s orientací σ existuje význačná forma ω_g maximálního stupně, nenulová v každém bodě $p \in M$. Je daná předpisem

$$\omega_g \equiv \mathrm{vol}_g = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \sqrt{|\det g|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{12.13}$$

Skutečnost, že se jedná o dobře definovanou formu vyplývá z toho, že při transformaci souřadnic máme

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n = \det\left(\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\right) \mathrm{d}\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^n, \quad |\det g| = \left(\det\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\right)\right)^2 |\det \tilde{g}|$$

a o rozdíl mezi determinantem a jeho absolutní hodnotou se postará transformace orientace

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \mathrm{sgn}\det\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\right) \cdot \sigma\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}\right).$$

Definice 12.8. Buď (M,g,σ) varieta s metrikou a orientací, $f \in C^\infty(M)$. Pak definujeme integrál z funkce f na varietě M předpisem

$$\int_M f = \int_M f\omega_g. \tag{12.14}$$

Dále nám metrika na n–rozměrné varietě M s orientací σ umožňuje zavést zobrazení mezi vektorovými prostory $\Lambda^k_p M$ a $\Lambda^{n-k}_p M$, resp. prostory diferenciálních forem $\Omega^k(M)$ a $\Omega^{n-k}(M)$. Uvažujme $\alpha = \alpha_{\vec{I}} \mathrm{d}x^{\vec{I}} \in \Lambda^k_p M$ a označme $\alpha^{\vec{I}} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \alpha_J$ (jak již bylo zavedeno výše, g^{il} jsou složky matice inverzní k matici metriky g). Definujeme

Definice 12.9. Hodgeův duál formy $\alpha = \alpha_{\vec{I}} \mathrm{d}x^{\vec{I}} \in \Lambda^k_p M$ je $(n-k)$–forma $*\alpha$ určená předpisem

$$* \alpha = (*\alpha)_{\vec{J}} \mathrm{d}x^{\vec{J}}, \quad (*\alpha)_{\vec{J}} = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \sqrt{|\det g|}\, \alpha^{\vec{I}} \delta^{(1\dots n)}_{\vec{I}\,\vec{J}}. \tag{12.15}$$

Nezávislost konstrukce $*\alpha \in \Lambda^{n-k}_p M$ na konkrétní volbě báze se ukáže obdobně jako výše pro formu ω_g.

Příklad 12.10. $1 \in C^\infty(M) \Rightarrow *1 = \omega_g \in \Omega^n(M)$.

Opakovanou aplikací Hodgeova operátoru, tj. $* \circ *$, dostáváme identické zobrazení až na znaménko závislé na dimenzi variety, stupni formy a signatuře metriky (např. na riemannovských varietách máme $*(*\alpha) = (-1)^{k(n-k)}\alpha$ pro $\alpha \in \Omega^k(M)$).

Definice 12.11. Uvažujme varietu M s metrikou g a orientací σ. Definujeme operátor **koderivace** $\mathrm{d}^* : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ následovně

$$\mathrm{d}^* \beta^{(k)} = (-1)^{s(n,k)} * \mathrm{d} * \beta^{(k)}, \quad \beta^{(k)} \in \Omega^k(M), \tag{12.16}$$

kde $s(n,k)$ určující znaménko závisí na signatuře metriky následovně:

$$s(n,k) = n(k+1) + 1,\ g \text{ riemannovská}, \qquad s(n,k) = n(k+1),\ g \text{ lorentzovská}.$$

Příklad 12.12. $M = \mathbb{R}^3$, $g = \sum_{i=1}^3 \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$, $\alpha = \alpha_i \mathrm{d}x^i \Rightarrow \mathrm{d}^*\alpha = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i} = -\mathrm{div}\vec{\alpha}$.

Ve cvičeních níže uvidíme, jak nám právě zavedené pojmy umožňují zapsat Maxwellovy rovnice v geometrické formulaci dovolující jejich snadné vyjádření v libovolném souřadném systému na prostoročase, a to i v případě, že je prostoročas zakřivený, tj. s nenulovou křivostí.

12.1 Cvičení

Cvičení 12.1. Na varietě $S^2[\theta, \varphi]$ uvažujme metriku $g = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi$. Ukažte, že $g = \phi^\star g_{\mathrm{cart}}$, kde $\phi(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ a $g_{\mathrm{cart}} = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$. Nalezněte složky Levi–Civitovy konexe a tenzoru křivosti.

Výsledek. Nenulové složky konexe a křivosti jsou

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \mathrm{cotg}\theta, \qquad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$R_{\theta\varphi}{}^\theta{}_\varphi = -R_{\varphi\theta}{}^\theta{}_\varphi = \sin^2\theta, \quad R_{\theta\varphi}{}^\varphi{}_\theta = R_{\varphi\theta}{}^\varphi{}_\theta = -1.$$

Cvičení 12.2. Na varietě $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ uvažujme kartézskou metriku

$$g_{\mathrm{cart}} = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z.$$

Vyjádřete g_{cart} ve sférických souřadnicích $[r, \theta, \phi]$. Za předpokladu standardní volby orientace $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = 1$ nalezněte explicitní vyjádření Hodgeova operátoru

$$* : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3), \qquad * : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3)$$

v obou souřadných systémech a podobně vyjádřete $d^* = (-1) * \circ \mathrm{d} \circ * : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Výsledek.

$$\begin{aligned}
g_{\text{cart}} &= \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2 \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi, \\
\alpha &= \alpha_x \mathrm{d}x + \alpha_y \mathrm{d}y + \alpha_z \mathrm{d}z \quad \Rightarrow \quad *\alpha = \alpha_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \alpha_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \alpha_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\
\beta &= \beta_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \beta_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \beta_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad *\beta = \beta_x \mathrm{d}x + \beta_y \mathrm{d}y + \beta_z \mathrm{d}z, \\
\alpha &= \alpha_r \mathrm{d}r + \alpha_\theta \mathrm{d}\theta + \alpha_\varphi \mathrm{d}\varphi \quad \Rightarrow \quad *\alpha = \frac{\alpha_\varphi}{\sin\theta} \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta + \sin\theta\, \alpha_\theta \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}r + r^2 \sin\theta \alpha_r \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi, \\
\beta &= \beta_\varphi \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta + \beta_\theta \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}r + \beta_r \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \quad \Rightarrow \quad *\beta = \frac{\beta_r}{r^2 \sin\theta} \mathrm{d}r + \frac{\beta_\theta}{\sin\theta} \mathrm{d}\theta + \sin\theta \beta_\varphi \mathrm{d}\varphi, \\
d^*\alpha &= -\left(\partial_x \alpha_x + \partial_y \alpha_y + \partial_z \alpha_z\right) = \\
&= -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(2r \sin^2\theta \alpha_r + r^2 \sin^2\theta \frac{\partial \alpha_r}{\partial r} + \sin\theta \cos\theta \alpha_\theta + \sin^2\theta \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \alpha_\varphi}{\partial \varphi} \right).
\end{aligned}$$

Cvičení 12.3. Uvažujme Maxwellovy rovnice ve vakuu v integrálním tvaru

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \text{ (Faraday)}, \quad \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0, \tag{12.17}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V \text{ (Gauss)}, \qquad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \text{ (Ampér)}. \tag{12.18}$$

Ve stacionárním, tj. na čase nezávislém, i v nestacionárním případě zapište Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru v podobě nezávislé na výběru souřadného systému (a tedy připouštějící i zakřivený prostor(očas)).

Návod. Ve stacionárním případě je využitím Stokesovy věty první série Maxwellových rovnic plně geometrická, (12.17) implikuje, že vektorovému poli magnetické indukce $\vec{B}$ odpovídá uzavřená 2–forma $B \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ a vektorovému poli intenzity elektrického pole $\vec{E}$ uzavřená 1–forma $E \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, předpisy

$$E = \flat(\vec{E}) = E^x \mathrm{d}x + E^y \mathrm{d}y + E^z \mathrm{d}z, \quad B = *\flat(\vec{B}) = B^x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B^y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B^z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

viz též cvičení 6.1. Pro druhou sérii (12.18) pak potřebujeme využít Hodgeovy duály. Pokud vektoru elektrického proudu $\vec{j} \in \mathcal{X}(M)$ přiřadíme odpovídající 1–formu $j \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, nacházíme úplnou sadu stacionárních Maxwellových rovnic ve tvaru

$$\mathrm{d}B = 0, \quad \mathrm{d}E = 0, \quad \mathrm{d}^*E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \mathrm{d}^*B = \mu_0 j.$$

(Prověřte explicitním výpočtem v kartézských souřadnicích.)

V nestacionárním případě naše pole nelze chápat jako vektorová pole na prostoru $\mathbb{R}^3$, neboť závisí i na čase. Proto pro popis využijeme jako varietu Minkowského prostoročas $M = \mathbb{R}^{1,3}[t, x, y, z]$ s odpovídající Minkowského metrikou

$$g_{\text{Mink}} = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x - \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y - \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z,$$

kde pro jednoduchost předpokládáme, že vhodnou volbou jednotek máme $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 1$. První série Maxwelových rovnic se pak dá ekvivalentně přepsat v podobě $\mathrm{d}F = 0$, kde 2–forma elektromagnetického pole je dána předpisem $F = B + E \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^2(M)$ a E, B jsou ze složek vektorů $\vec{E} = (E^x, E^y, E^z)$ a $\vec{B} = (B^x, B^y, B^z)$ definovány v kartézských prostorových souřadnicích stejně jako výše. Ověřte, že skutečně

$$\mathrm{d}F = 0$$

v důsledku Maxwellových rovnic (12.17) a Stokesovy věty.

Druhá série Maxwellových rovnic se dá kompaktně zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}^* F = \mu_0 j,$$

kde 1–forma čtyřproudu j je dána diskrétním či spojitým rozložením nábojů a jejich rychlostmi. Máme-li náboje rozložené spojitě s klidovou hustotou $\rho_0(t, \vec{x})$ (tj. hustotou v lokálním souřadném systému pohybujícím se s náboji), rychlost nábojů v globálních souřadnicích je $\vec{v}(t, \vec{x})$ a definujeme $\gamma(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(t, \vec{x})}}$, pak máme

$$J = \rho_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \rho_0 \gamma \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \in \mathcal{X}(M), \qquad j = \flat \left(\rho_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \rho_0 \gamma \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \in \Omega^1(M).$$

Rejstřík

$C^\infty(M)$-modul, 29
C^k–kompatibilní, 4
k-forma v bodě, 24
řetězec
    simpliciální, 58
    singulární, 57
řez fibrovaného prostoru, 13
1-forma
    kanonická, 44
1-forma v bodě, 23
2–forma
    kanonická (Cartanova-Poincaré), 44
    symplektická, 44
2-forma
    nedegenerovaná, 44

algebra, 18
    asociativní, 18
    derivace, 19
    komutativní, 18
    Lieova, 18
    nosič, 18
atlas, 3
    maximální, 4

Cartanův vzorec, 42

derivace, 19
difeomorfizmus, 5
    zachovávající orientaci, 51
Diferenciální 1-forma, 24
diferenciální k-forma, 25
diferenciální forma, 26
    exaktní, 31
    uzavřená, 31
diferencovatelná struktura, 4
diferencovatelná varieta, 4

fibrovaný prostor, 13
    řez, 13
    báze, 13
    Hopfova fibrace, 22
    kotečný, 23
    lokální řez, 13
    lokální trivializace, 13
    přechodová funkce na vlákně, 13
    projekce, 13
    tečný, 13
    triviální, 14
    typické vlákno, 13
    vektorový, 13
    vlákno nad bodem, 13
    zobrazení, 14

hladká varieta, 4
Hodgeův duál, 65

integrál z formy
    na varietě, 52
    při parametrizaci, 51
integrální křivka, 14

kanonické zobrazení, 46
koderivace, 66
komplexní projektivní prostor, 6
konexe, 64
    Levi-Civitova, 65
kotečné zobrazení, 34
kotečný prostor, 23
kovariantní derivace, 64

Lieova derivace
    formy, 39
    vektorového pole, 39
Lieova závorka, 18
lokální grupa transformací, 46
lokální souřadnice, 3
lokálně konečné, 3

mapa, 3
metrika, 63
    indukovaná, 63
    lorentzovská, 63
    riemannovská, 63

multiindex, 25

operátor hranice, 57
orientace
    variety, 51
    vektorového prostoru, 50

přechodová funkce, 4
    na vlákně, 13
podvarieta
    vložená, 36
    vnořená, 36
Poincaréovo lemma, 60
Poissonova závorka, 47
pullback, 35

reálný projektivní prostor, 6
rozklad jednotky, 52

simplex
    singulární, 57
    standardní, 57
souřadnice
    Darbouxovy, 45
stereografické projekce, 6
sumační konvence, 8
symplektická forma, 44

tečné zobrazení, 34
tečný bundle, 13
tečný vektor, 7, 8
    derivace ve směru, 7
tenzor, 63
    křivosti, 65
    kontravariantní, 40
    kovariantní, 40
    torze, 64
tenzorové pole, 63
tenzorový součin, 62
tok vektorového pole, 14
topologický prostor
    Hausdorffův, 3
    parakompaktní, 3

věta
    Darbouxova, 45
    Stokesova, 58
    Stokesova pro řetězce, 58
varieta
    orientovatelná, 51
    symplektická, 44
vektorové pole, 14
    úplné, 14
    hamiltonovské, 45
    lokálně hamiltonovské, 45
    tok, 14
vložení, 36
vnější derivace, 29
vnitřní součin, 31
vnoření, 36

zúžení, 31
zjemnění, 3
zobrazení
    hladké, 4

Literatura

[1] Marián Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, IRIS 2004, 2008

[2] Theodore Frankel: *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press 1999, 2003, 2011

[3] Jürgen Jost: *Geometry and Physics*, Springer 2010

[4] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society 2001

[5] Roger Penrose: *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf 2005

02LIAG - Lieovy algebry a grupy

Libor Šnobl

9. prosince 2020

Úvod

Tento text vznikl na základě jednosemestrální přednášky Lieovy algebry a grupy, kterou od akademického roku 2005/2006 přednáším v magisterském studiu na FJFI ČVUT. Obsahuje úvod do teorie Lieových grup a algeber, zaměřený zejména na pojmy a vědomosti užitečné pro studenty matematické fyziky. Vzhledem k tomu, že v českém jazyce mě není znám žádný publikovaný úvodní text srovnatelného rozsahu, doufám, že bude užitečný i pro další čtenáře.

Obsah přednášky je poměrně obvyklý: po zavedení pojmu Lieovy grupy jsou zkoumány jeho základní vlastnosti a vztah k Lieovým algebrám. Následně jsou zaváděny potřebné pojmy z teorie Lieových algeber a formulovány nejdůležitější výsledky. Závěrem a nejpodstatnějším výsledkem kurzu je vysvětlení klasifikace poloprostých Lieových algeber a struktury jejich konečněrozměrných reprezentací. Přednáška je přednášena v rozsahu 3 hodiny týdně doplněná 2 hodinami cvičení. Kapitoly víceméně odpovídají členění na týdenní bloky. Cvičení jsou zařazena převážně na závěr kapitol, pouze v kapitole o reprezentacích bylo z pedagogických důvodů vhodnější je zařadit přímo do textu. Některá důležitější cvičení jsou doplněna více či méně podrobným řešením.

Původní koncepce přednášky byla silně ovlivněna učebnicemi [11] a [5]. Tento základ byl postupně upravován, zpřesňován a rozšiřován. Z novější literatury lze jako vhodnou doplňkovou učebnici doporučit [3], s níž jsou zde používaná terminologie a značení i pokrývaná témata víceméně kompatibilní.

Po prostudování tohoto úvodu by čtenář měl být připraven využít získané znalosti v aplikacích např. při studiu diferenciálních rovnic nebo v částicové fyzice, či ke studiu pokročilejších textů z oblasti Lieových grup a algeber, např. [6, 7, 10, 12].

Od čtenářů očekávám, že již mají znalosti obvyklé u absolventů bakalářského studia matematiky či teoretické fyziky, zejména z lineární algebry, topologie a analýzy. Potřebné jsou i základní pojmy z oblasti diferenciální geometrie (diferencovatelné variety, vektorová pole, diferenciální formy). V příkladech a cvičeních je užitečná základní znalost kvantové mechaniky, neboť řada příkladů má svůj původ v této oblasti fyziky.

Pro čtenáře hledajícího text zavádějící pojmy z topologie a diferenciální geometrie dle potřeby, lze doporučit učebnici [13] zabývající se maticovými grupami, ve které lze též najít další užitečné úlohy k procvičování nebo [8] věnovanou konečným a maticovým Lieovým grupám. Pro zopakování diferenciální geometrie lze doporučit např. knihy [4, 5, 9]. Zájemce o často spletitou historii oboru, zde jen stručně zmiňovanou, lze odkázat na [2].

K samotnému vzniku textu: rukou psaný text přednášky přepsali studenti Jan Vábek a Matej Hazala do LaTeXu v podobě wikiskript a dali mi jej v této podobě k dispozici pro další úpravy. Za tuto pomoc, která značně zrychlila přepis přednášky do současné podoby, jsem jim vděčen. Upozorněním na chyby ve výkladu a překlepy během let přispěla řada dalších studentů, ať již k původním rukopisným poznámkám či k elektronické podobě textu.

Tento text je určen pro osobní potřebu a jeho neautorizované šíření není dovoleno.

Obsah

Úvod **1**

1 Definice Lieovy grupy a Lieovy algebry **5**
1.1 Motivace pro studium Lieových grup a algeber 5
1.2 Lieovy grupy 6
1.3 Lieova algebra Lieovy grupy 8
1.4 Cvičení 9

2 Vztah mezi Lieovou grupou a její algebrou **12**
2.1 Exponenciální zobrazení 13
2.2 Vyšetřování souvislosti variet 15
2.3 Cvičení 17

3 Tok levoinvariantního vektorového pole, vztah podgrup a podalgeber, akce grup **19**
3.1 Vztah mezi podgrupou a podalgebrou, integrabilita distribucí 21
3.2 Akce grupy na varietě 23
3.3 Cvičení 24

4 Reprezentace Lieových grup a algeber, vztah Lieových algeber a jim odpovídajících Lieových grup **27**
4.1 Reprezentace Lieových grup a algeber 27
4.2 Vztah mezi Lieovou algebrou a jí odpovídajícími Lieovými grupami 29
4.3 Cvičení 31

5 Lieovy algebry - základní pojmy **33**
5.1 Speciální třídy Lieových algeber 33
5.2 Derivace 35
5.3 Vztah reálných a komplexních algeber 37
5.4 Zobrazení Lieových algeber 37
5.5 Cvičení 38

6 Killingova forma, vlastnosti řešitelných a nilpotentních algeber **41**
6.1 Killingova forma 41
6.2 Nilpotentní a řešitelné algebry 42
6.3 Cvičení 44

7 Věty Lieova a Engelova **45**

8 Cartanova kritéria **50**
8.1 Cvičení 53

9 Cartanova podalgebra **54**

10 Weylova-Chevalley normální forma poloprosté algebry, kořenové diagramy **61**
10.1 Weylova-Chevalley normální forma poloprosté algebry 61
10.2 Kořenové diagramy, Cartanova matice 63

11 Dynkinovy diagramy a klasifikace poloprostých komplexních Lieových algeber **67**
11.1 Cvičení 72

12 Reálné formy komplexních poloprostých Lieových algeber **79**
12.1 Konstrukce reálných forem 79
12.2 Invariantní integrál na kompaktních Lieových grupách 82
12.3 Cvičení 84

13 Reprezentace poloprostých Lieových algeber **86**
13.1 Váhy a váhové podprostory dané reprezentace 86
13.2 Konstrukce ireducibilní reprezentace se zadanou nejvyšší vahou 93
13.3 Spinorové reprezentace 96

14 Reprezentace algebry $\mathfrak{su}(3)$ v částicové fyzice **99**
14.1 Symetrie a integrály pohybu 99
14.2 Izospin 99
14.3 Reprezentace $\mathfrak{su}(3)$ 101

Index **107**

Literatura **107**

Kapitola 1

Definice Lieovy grupy a Lieovy algebry

1.1 Motivace pro studium Lieových grup a algeber

Grupy jsou matematickým nástrojem pro popis symetrií, tj. bijektivních transformací ponechávajících studovanou strukturu, objekt apod. beze změny. Pokud jsou tyto symetrie navíc parametrizované reálnými parametry, je přirozené zkoumat grupy, které mají v sobě současně zakódovánu hladkou strukturu kompatibilní se strukturou grupy. Takové grupy nazýváme Lieovy po norském matematikovi Sophusovi Lie (1842–1899), který je jako první studoval, mj. v souvislosti se studiem symetrií obyčejných diferenciálních rovnic, a vybudoval značnou část jejich teorie.

Mezi oblasti matematiky a fyziky, v nichž se můžeme s Lieovými grupami setkat, patří

- klasická mechanika – symetrie souvisí podle věty Noetherové s integrály pohybu,
- speciální relativita – jako teorie invariantní vzhledem k Lorentzově (Poincaréově) grupě,
- kvantová mechanika – v níž symetrií s výhodou využíváme při hledání spekter (např. sférická symetrie souvisí s reprezentacemi grupy SO(3), tzv. náhodná degenerace Coulombova potenciálu s reprezentacemi grupy SO(4)),
- kvantová teorie pole – symetrie představují jednu ze základních součástí její formulace („částice“ jako irreducibilní reprezentace Poincaréovy grupy),
- kalibrační teorie elementárních částic založené na reprezentacích kompaktních Lieových grup; konkrétně standardní model na grupě $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$,
- teorie diferenciálních rovnic – hledání řešení diferenciálních rovnic s využitím symetrií, tj. snižování řádu obyčejných diferenciálních rovnic a hledání invariantních řešení parciálních diferenciálních rovnic,
- diferenciální geometrie – Lieovy grupy jsou diferencovatelné variety s řadou speciálních vlastností.

1.2 Lieovy grupy

Definice 1.1. Lieova grupa je diferencovatelná varieta G vybavená binární operací zvanou grupové násobení $\cdot : G \times G \to G$ takovou, že

1. $(G, \cdot)$ je grupa, tj. $\cdot$ je asociativní, existuje jednotkový prvek e (tj. $g \cdot e = e \cdot g = g$) a ke každému prvku $g \in G$ existuje prvek inverzní $g^{-1} \in G$ takový, že $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$, a

2. zobrazení $\cdot : G \times G \to G$ a $(\quad)^{-1} : G \to G$ jsou hladká.

Poznámka 1.2. Zavádí se též pojem **lokálně n–parametrické topologické grupy**, tj. grupy, která je současně topologickým prostorem vybaveným C^0–atlasem (tj. je n–rozměrnou C^0–varietou) a jejíž grupové násobení a inverze jsou spojité. Dle V. Hilbertova problému zformulovaného v roce 1900 matematikem D. Hilbertem a vyřešeného v 50. letech 20. století libovolná lokálně n–parametrická topologická grupa je nutně též grupou Lieovou vzhledem k jednoznačně určené diferencovatelné struktuře třídy C^∞. Bez důkazu.

Příklad 1.3. Buď V vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem reálných čísel. Pak $G = GL(V) = \{A \in \mathcal{L}(V) | \exists A^{-1}\}$ je Lieova grupa vzhledem ke skládání zobrazení, $\dim GL(V) = n^2$. Ekvivalentně, po zapsání zobrazení ve zvolené bázi, $G = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | \det A \neq 0\}$ je Lieova grupa vzhledem k násobení matic.

Důkaz. Zobrazení $\det : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n,n}, \mathbb{R})$, $G = \det^{(-1)}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = G^\circ$ je tudíž otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n,n}$ a tedy triviálně diferencovatelná varieta. Splnění podmínek hladkosti $\cdot$ a $(\quad)^{-1}$ plyne z $(AB)^i_j = A^i_k B^k_j$ a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}$, neboť složky součinu, determinantu i adjungované matice jsou polynomy ve složkách původní matice (resp. matic) a $\det A \neq 0$ pro všechna $A \in G$. □

Poznámka 1.4. $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n,n} \simeq \mathbb{C}^{n \cdot n} \simeq \mathbb{R}^{2n \cdot n}, \dim GL(n, \mathbb{C}) = 2n^2$. Lze ji též chápat jako **komplexní Lieovu grupu** dimenze n^2, tj. grupu, která je současně komplexní varietou (tj. vybavenou atlasem zobrazujícím do $\mathbb{C}^m$, s holomorfními přechodovými funkcemi) a jejíž grupové násobení a inverze jsou holomorfní. Teorií komplexních Lieových grup se nebudeme zvlášť zabývat. Každá komplexní Lieova grupa je zároveň Lieovou grupou dle definice 1.1 dvojnásobné dimenze, ale naopak to obecně neplatí (a to ani pokud G je přirozeně definována jako podmnožina v nějakém $\mathbb{C}^d$).

Definice 1.5. Maticové Lieovy grupy jsou takové vložené podvariety $GL(V), GL(n, \mathbb{R})$ nebo $GL(n, \mathbb{C})$, které jsou současně uzavřené vzhledem k maticovému násobení a inverzi[1]. Příklady takových grup jsou

- speciální lineární grupa $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}$,
- ortogonální grupa $O(n) = \{O \in GL(n, \mathbb{R}) | O^T O = \mathbb{I}\}$,
- unitární grupa $U(n) = \{U \in GL(n, \mathbb{C}) | U^\dagger U = \mathbb{I}\}$,

kde $\mathbb{I} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$ značí jednotkovou matici.

Lze definovat i maticové grupy nad nekomutativním tělesem kvaternionů

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\text{–span}\{1, i, j, k\}$$

[1] Ne všechny Lieovy grupy jsou maticové či jim izomorfní.

s násobením definovaným relacemi $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k$. V konkrétních situacích tento popis může být výhodný, například ortogonální kvaternionová grupa maticového rozměru 1 je jiným popisem grupy $SU(2)$, dále zavedené symplektické grupy jsou přirozeně definované jako ortogonální kvaternionové grupy. Obecně ovšem lze každou kvaternionovou maticovou grupu v $GL(n, \mathbb{H})$ chápat jako vloženou podgrupu v $GL(2n, \mathbb{C})$.

Pro studium maticových grup je důležitá dobře známá věta o implicitní funkci v následující geometrické podobě

Věta 1.6 (Věta o implicitní funkci). Buď $F : M \to V$ hladké zobrazení variet dimenze $\dim M = n$, $\dim V = r$ a bod $q \in F(M) \subset V$. Pokud

$$\mathrm{rank} F_*|_p = r, \qquad \forall p \in F^{(-1)}(q)$$

pak $F^{(-1)}(q)$ je $(n - r)$–rozměrná vložená podvarieta M. Tečný prostor k podvarietě $F^{(-1)}(q)$ v bodě p je roven

$$T_p F^{(-1)}(q) = \ker F_*|_p.$$

Pro libovolný zvolený prvek $g \in G$ definujeme dva význačné difeomorfismy $L_g, R_g : G \to G$ předpisem $L_g h = g \cdot h$, $R_g h = h \cdot g$, $\forall h \in G$. Nazývají se **levá**, resp. **pravá translace**.

Definice 1.7. Levoinvariantní, resp. **pravoinvariantní, vektorová pole** $X \in \mathcal{X}(G)$ jsou vektorová pole splňující $X = L_{g*}X$, resp. $X = R_{g*}X$ pro všechna $g \in G$.

Poznámka 1.8. V daném bodě $h \in G$ předchozí definice znamená $X|_{gh} = L_{g*}(X|_h)$, resp. $X|_{hg} = R_{g*}(X|_h)$.

Poznámka 1.9. Levoinvariantní vektorové pole je jednoznačně určeno svým tečným vektorem v libovolném pevně zvoleném bodě $g \in G$ (obvykle se volí e), tj. $X|_g = L_{g*}(X|_e)$ protože $L_g \circ L_h = L_{gh}$, $L_{g*} \circ L_{h*} = L_{gh*}$.

Věta 1.10. Vektorový prostor levoinvariantních vektorových polí $\mathfrak{g} \subset\subset \mathcal{X}(G)$ je izomorfní T_eG, tj. $\mathfrak{g} \simeq T_eG$.

Důkaz. Mějme $\tilde{X} \in T_eG$, pak můžeme definovat zobrazení $X : G \to TG$, $X(g) = L_{g*}(\tilde{X})$, tj. $X_g \in T_gG$. Použitím libovolné křivky, k níž je $\tilde{X}$ tečný

$$\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to G, \quad a < 0 < b, \quad \gamma(0) = e, \quad \dot{\gamma}(0) = \tilde{X}$$

máme

$$\varphi(g, t) = g \cdot \gamma(t) = L_g(\gamma(t)) \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(G \times (a, b), G).$$

V důsledku $X(g) = L_{g*}(\tilde{X}) \in T_gG$ závisí na g hladce, neboť

$$L_{g*}(\tilde{X}) = L_{g*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} L_g(\gamma(t)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi(g, t).$$

□

Při zápisu mohou vznikat nejasnosti ve značení, kdy symbol $X \in \mathfrak{g}$ může značit vektorové pole na G nebo pouze odpovídající tečný vektor z T_gG. Budeme se snažit tyto pojmy rozlišovat (X vektorové pole, $X|_g$ nebo $X(g)$ tečný vektor v bodě g), často je však čtenář nucen pochopit význam symbolů z kontextu.

Poznámka 1.11. Pro připomenutí – kotečné zobrazení působí na funkce předpisem

$$(\phi^* f)(p) = (f \circ \phi)(p).$$

Věta 1.12. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(G)$ chápané jako zobrazení $X : \mathcal{C}^\infty(G) \to \mathcal{C}^\infty(G)$ je levoinvariantní právě tehdy, když pro všechna $g \in G$ platí

$$L_g^* \circ X = X \circ L_g^*. \tag{1.1}$$

Důkaz. Pro $\psi : M \to N$, $p \in M$, $X|_p \in T_pM$, $f \in C^\infty(N)$ platí:

$$\psi_*(X|_p)f = X|_p(f \circ \psi) = X|_p(\psi^*(f)) = (X|_p \circ \psi^*)f.$$

Pro $g, h \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ a $f \in C^\infty(G)$ tedy platí:

$$\begin{aligned} L_{g*}(X|_h)f &= (X|_h \circ L_g^*)f = \left(\left(X \circ L_g^*\right) f\right)(h) \\ &= X|_{gh}\, f = (Xf)(gh) = (Xf)(L_g h) = \left(L_g^*(X(f))\right)(h) = \left((L_g^* \circ X)f\right)(h) \end{aligned}$$

a tudíž $X \circ L_g^* = L_g^* \circ X$. Naopak, z rovnice výše $X \circ L_g^* = L_g^* \circ X$ implikuje levoinvariantnost X v každém bodě $h \in G$. □

Důsledek 1.13. Pro levoinvariantní vektorová pole $X, Y \in \mathfrak{g}$ platí

$$L_g^* \circ [X, Y] = [X, Y] \circ L_g^*,$$

tj. $\mathfrak{g}$ je uzavřená vzhledem ke komutaci.

Důkaz.

$$\begin{aligned} L_g^* \circ [X, Y] = L_g^* \circ X \circ Y - L_g^* \circ Y \circ X = X \circ L_g^* \circ Y - Y \circ L_g^* \circ X = \\ = X \circ Y \circ L_g^* - Y \circ X \circ L_g^* = [X, Y] \circ L_g^* \end{aligned}$$

□

1.3 Lieova algebra Lieovy grupy

Definice 1.14. Algebru $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{X}(G) | X = L_{g*}X\}$ levoinvariantních vektorových polí na Lieově grupě G nazýváme **Lieovou algebrou Lieovy grupy** G.

Definice 1.15. Lieova algebra $(A, +, \cdot, [.,.])$ je vektorový prostor $(A, +, \cdot)$ vybavený bilineárním zobrazením $[.,.] : A \times A \to A$ splňujícím:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisymetrie),
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobiho identita)

pro všechna $X, Y, Z \in A$. Zobrazení $[.,.]$ se nazývá **Lieova závorka**.

Definice 1.16. Uvažujme bázi $(X_i)_{i=1}^{\dim A}$ prostoru A. Lieova závorka $[.,.]$ je určena svým působením na bazické vektory, $[X_i, X_j] = {c_{ij}}^k X_k$. ${c_{ij}}^k$ se nazývají **strukturní konstanty** Lieovy algebry A v bázi (X_i).

Poznámka 1.17. Strukturní konstanty splňují

$$c_{ij}{}^{k} = -c_{ji}{}^{k}\,, \qquad\qquad c_{il}{}^{m}c_{jk}{}^{l} + c_{jl}{}^{m}c_{ki}{}^{l} + c_{kl}{}^{m}c_{ij}{}^{l} = 0\,. \tag{1.2}$$

v důsledku antisymetrie a Jacobiho identity.

Poznámka 1.18. Tečné vektory X z $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \simeq T_e\mathbb{R}^{n,n}$ jsou v souřadnicovém zápisu $X = X^i_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}|_e$, kde x^i_j jsou standardní souřadnice na $GL(n,\mathbb{R})$, $x^i_j(A) = A^i_j$. Takže prvky maticové Lieovy algebry lze chápat jako matice, pro maticové Lieovy grupy jsou jejich Lieovy algebry vektorové prostory matic odpovídající dimenze a Lieova závorka je komutátor matic (což dokážeme později).

Příklad 1.19. **Afinní transformace** $Af(1)$ na $\mathbb{R}$.
Souvislá komponenta grupy afinních transformací reálné přímky se dá parametrizovat následovně: $Af(1) = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, (x,y)\cdot(\tilde{x},\tilde{y}) = (x\tilde{x}, x\tilde{y}+y))$. Tuto grupu lze též zapsat maticově, tj. grupové násobení přechází v násobení matic a samotná množina je zapsána jako $Af(1) = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}\}$.

Podoba Lieovy algebry se určí z požadavku na levoinvariantnost obecného vektorového pole určeného v $e = (1,0)$. Uvažujme tečný vektor ve tvaru $X|_e = \alpha\partial_x|_e + \beta\partial_y|_e$. Levoinvariantnost vede na

$$X|_{(a,b)}\, f = L_{(a,b)*}\, X|_{(1,0)}\, f = X|_{(1,0)}\,(f\circ L_{(a,b)}) = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) f(ax, ay+b)|_{(x,y)=(1,0)} =$$
$$= a\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}\, f(x,y)|_{(a,b)} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\, f(x,y)|_{(a,b)}\right).$$

Vidíme tedy, že $X = \alpha x\partial_x + \beta x\partial_y$, Lieova algebra je $\mathfrak{af}(1) = \mathrm{span}\{X_1, X_2\}$, kde $X_1 = x\partial_x$, $X_2 = x\partial_y$. Pro kontrolu si můžeme spočítat komutátor $[X_1, X_2] = X_2$, tj. $\mathfrak{af}(1)$ je skutečně Lieova algebra.

V případě matic máme $\mathfrak{af}(1) = T_eAf(1) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) | \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$, a bazické vektory ztotožňujeme pomocí tečných vektorů ke křivkám $\gamma_1(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\gamma_2(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ s maticemi z $T_eAf(1)$) následovně: $X_1|_e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $X_2|_e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Poznámka 1.20. Maticové grupy.

Uvažme maticovou grupu $G = GL(n,\mathbb{R})$, za souřadnice považujeme složky matice g^i_j. Podobně jako v minulém příkladě chceme vědět, jak vypadá v libovolném bodě $g \in G$ obecné levoinvariantní vektorové pole X, které je určeno svou hodnotou v e, tj. $X|_e = \alpha^i_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}|_e$. Buď $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, $f = f(x^i_j)$. Podmínka levoinvariance:

$$X^i_j(g)\frac{\partial}{\partial x^i_j}|_g f = X|_g f = (L_{g*}X|_e)f = X|_e(f\circ L_g) = \alpha^l_m \left.\frac{\partial f(g^i_k x^k_j)}{\partial x^l_m}\right|_e =$$
$$= \alpha^l_m \left.\frac{\partial f}{\partial x^o_p}\right|_g \left.\frac{\partial(g^o_k x^k_p)}{\partial x^l_m}\right|_e = \alpha^l_m g^o_k \left.\frac{\partial f}{\partial x^o_p}\right|_g \delta^k_l\delta^m_p = \alpha^k_j g^i_k \left.\frac{\partial f}{\partial x^i_j}\right|_g = g^i_k\alpha^k_j\partial^j_i|_g f.$$

Takže $X^i_j(g) = g^i_k\alpha^k_j$, $X(g) = g^i_k\alpha^k_j \left.\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right|_g$.

1.4 Cvičení

Cvičení 1.1. Ukažte, že $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ je maticová Lieova grupa a najděte její Lieovu algebru.

Řešení. Splnění podmínky pro podvarietu je důsledkem věty o implicitní funkci 1.6. Vybereme

$$f = \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}, \qquad f(A) = \det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}\pi \prod_{i=1}^{n} A_{i,\pi(i)}$$

(kde A_{ij} značí prvky matice A). Jeho tečné zobrazení je určeno

$$f_*|_A B = \lim_{t\to 0} \frac{\det(A+tB) - \det(A)}{t} = \det(A) \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\det(\mathbb{I} + tA^{-1}B) - 1}{t} = \det A \cdot \mathrm{tr} A^{-1}B.$$

Tudíž pro libovolný $A \in SL(n,\mathbb{R})$ stačí dosadit $B = A$ pro ověření maximální hodnosti zobrazení f_* v bodě A: $f_*|A(A) = 1$, tj. $SL(n,\mathbb{R})$ je vložená podvarieta $GL(n,\mathbb{R})$. Že se jedná o podgrupu je zřejmé z $\det(AB^{-1}) = \frac{\det A}{\det B} = 1$, tj. $AB^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$ pro libovolné $A, B \in SL(n,\mathbb{R})$. Lieova algebra je pak určena předpisem

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \simeq T_{\mathbb{I}} SL(n,\mathbb{R}) = \ker f_*|_{\mathbb{I}} = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n,n} | \mathrm{tr} A = 0\}. \tag{1.3}$$

Cvičení 1.2. Definujme matici $J = \mathrm{diag}(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p}, \underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{q})$, kde $p+q=n$. Využitím zobrazení $F(A) = A^T J A$ ukažte, že **pseudoortogonální grupa**

$$O(p,q) = \left\{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A^T J A = J\right\}$$

je maticová Lieova grupa a najděte její Lieovu algebru. Pokud $q = 0$ jedná se o grupu **ortogonální** $O(n)$, Průnik $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{R})$, resp. $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$, pak je grupa **speciální pseudoortogonální**, resp. **speciální ortogonální**.

Řešení. V tomto případě volíme

$$F = \mathbb{R}^{n,n} \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A = A^T\}, \qquad F(A) = A^T J A - J$$

a postupujeme analogicky. Jádro tečného zobrazení F_* v grupové jednotce $\mathbb{I}$ určuje Lieovu algebru

$$\mathfrak{o}(p,q) \simeq \mathfrak{so}(p,q) \simeq T_{\mathbb{I}} O(p,q) = \ker F_*|_{\mathbb{I}} = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A^T J + JA = 0\}, \tag{1.4}$$

která je stejná i pro grupu $SO(p,q)$, neboť na okolí $\mathbb{I}$ jsou obě grupy difeomorfní.

Cvičení 1.3. Využitím zobrazení $F(A) = A^\dagger J A$ ukažte, že **pseudounitární grupa**

$$U(p,q) = \left\{A \in \mathbb{C}^{n,n} | A^\dagger J A = J\right\} \tag{1.5}$$

je (reálná) maticová Lieova grupa a najděte její Lieovu algebru. Pokud $q = 0$ jedná se o grupu **unitární** $U(n)$, Průnik $SU(p,q) = U(p,q) \cap SL(n,\mathbb{C})$, resp. $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$, pak je grupa **speciální pseudounitární**, resp. **speciální unitární**.

Řešení.

$$\mathfrak{u}(p,q) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} | A^\dagger J + JA = 0\}, \quad \mathfrak{su}(p,q) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} | A^\dagger J + JA = 0, \mathrm{tr} A = 0\}. \tag{1.6}$$

Cvičení 1.4. Definujme matici

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,2n}.$$

Využitím zobrazení $F(A) = A^T J A$ ukažte, že **symplektická grupa**

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{R}^{2n,2n} | A^T J A = J\right\} \tag{1.7}$$

je maticová Lieova grupa a najděte její Lieovu algebru.

Řešení.

$$F : \mathbb{R}^{2n,2n} \to \mathbb{R}^{2n} \wedge \mathbb{R}^{2n} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2n,2n} | A + A^T = 0 \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) &= \{ A \in \mathbb{R}^{2n,2n} | A^\dagger J + JA = 0 \} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}^{n,n} | b = b^T, c = c^T, d = -a^T \right\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Kapitola 2

Vztah mezi Lieovou grupou a její algebrou

Ukazuje se, že existuje význačné přirozeně definované zobrazení z Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ do jí odpovídající Lieovy grupy G, tzv. exponenciela, které ukazuje, že v jistém smyslu Lieova grupa a její Lieova algebra jsou lokálně totéž. Jeho konstrukcí se budeme zabývat v této kapitole. Následně se budeme zabývat jeho globálními vlastnostmi, tj. kdy je celá grupa obrazem algebry při tomto zobrazení.

Definice 2.1. Hladké zobrazení $\phi : G \to H$ Lieových grup G a H je

- **homomorfismus** G a H pokud $\phi(g \cdot_G h) = \phi(g) \cdot_H \phi(h)$ pro všechna $g, h \in G$,
- **izomorfismus** G a H pokud ϕ je bijektivní homomorfismus a ϕ^{-1} je hladké.

Definice 2.2. Jednoparametrická podgrupa v G je homomorfismus $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to G$.

Důsledek 2.3. Obraz jednoparametrické podgrupy je podgrupa H v G izomorfní jednorozměrné diferencovatelné varietě, tj. celému tělesu reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo kružnici S^1. Definice jednoparametrické podgrupy v sobě obsahuje i preferovanou parametrizaci, tj. výběr souřadnice na H. Platí $\varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$, tedy nutně $\varphi(0) = e$ a jednoparametrická podgrupa je vždy komutativní.

Příklad 2.4. Pro maticovou grupu G máme

$$\begin{aligned}\dot\varphi(t) = \varphi(t) \cdot \underbrace{\dot\varphi(0)}_{konst.} &= L_{\varphi(t)*}\left(\dot\varphi(0)\right) \\ &= \dot\varphi(0) \cdot \varphi(t) = R_{\varphi(t)*}\left(\dot\varphi(0)\right)\end{aligned}$$

Obecně pak platí

$$\varphi(s+t) = \varphi(t)\varphi(s) \equiv L_{\varphi(t)}\varphi(s), \text{ proto } \underbrace{\dot\varphi(t)}_{\in T_{\varphi(t)}G} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 \left(L_{\varphi(t)}\varphi(s)\right) = L_{\varphi(t)*}\underbrace{\dot\varphi(0)}_{\in T_eG}. \quad (2.1)$$

Vidíme tedy, že pokud najdeme pro danou $\varphi(t)$ levoinvariantní pole $X \in \mathfrak{g}$, $X|_e = \dot\varphi(0)$, pak platí $\dot\varphi(t) = L_{\varphi(t)*}(X|_e) = X|_{\varphi(t)}$.

Důsledek 2.5. Jednoparametrické podgrupy v G jsou integrální křivky levoinvariantních vektorových polí, tj. elementů Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, vycházející z e.

Poznámka 2.6. Mějme $X \in \mathfrak{g}$. Pak z věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic víme, že existuje $\epsilon > 0$ a integrální křivka φ vektorového pole X vycházející z $e \in G$ definovaná pro křivkový parametr $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Vzhledem k levoinvariantnosti X je $L_g \circ \varphi$ integrální křivka vektorového pole X vycházející z $g \in G$, definovaná opět pro stejný interval hodnot křivkového parametru $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Tudíž máme definován tok $\Psi_X : G \times (-\epsilon, \epsilon) \to G$. Vzhledem k tomu, že ϵ je stejné pro všechna $g \in G$, lze pohybem podél integrální křivky interval dané délky $(-\epsilon, \epsilon)$ posouvat např. o $\epsilon/2$ a tím definovat integrální křivku pro všechny hodnoty $t \in \mathbb{R}$. Proto je $\Psi_X : G \times \mathbb{R} \to G$, tj. levoinvariantní vektorové pole X je úplné.

2.1 Exponenciální zobrazení

Využitím integrálních křivek můžeme definovat zobrazení $\mathfrak{g} \to G$, které danému vektoru $X|_e \in T_eG \simeq \mathfrak{g}$ přiřadí jistý bod na integrální křivce levoinvariantního vektorového pole X, jehož je $X|_e$ tečným vektorem v e.

Definice 2.7. Zobrazení $\exp : \mathfrak{g} \to G$ definujeme předpisem

$$\exp(tX) = \varphi(t), \qquad \exp(X) = \varphi(1), \tag{2.2}$$

kde φ je integrální křivka levoinvariantního vektorového pole $X \in \mathfrak{g}$ vycházející z e. Značíme $\exp(X) \equiv \mathrm{e}^X$.

Poznámka 2.8. Zobrazení exp díky vlastnostem toku vektorového pole splňuje $\varphi(t+s) = \mathrm{e}^{(t+s)X} = \varphi(t)\varphi(s) = \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sX}$. To je důvodem zvoleného značení.

Poznámka 2.9. Exponenciela maticových grup G

Hledáme integrální křivku $\gamma(t)$ levoinvariantního vektorového pole $X \in \mathfrak{g}$, určenou $X|_e \in T_eG$. Jak toto pole vypadá víme z příkladu 1.20, značení převezmeme z tohoto příkladu, tj. $X^i_j(e) = \alpha^i_j = (A)^i_j$. Pro složky pole máme $X^i_j(\gamma(t)) = \gamma^i_k(t)X^k_j(e) = \gamma^i_k(t)\alpha^k_j$. Rovnice pro integrální křivky tohoto pole jsou

$$\dot\gamma^i_j(t) = \gamma^i_k(t)\alpha^k_j, \quad \gamma^i_j(0) = \delta^i_j\,, \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot\gamma(t) = \gamma(t)\cdot A, \quad \gamma(0) = \mathbb{I}\,. \tag{2.3}$$

Z maticového zápisu vidíme, že řešením je maticová exponenciela

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tX|_e)^k = \mathrm{e}^{tX|_e}, \tag{2.4}$$

výsledkem je $\mathrm{e}^X = \gamma(1) = \mathrm{e}^{X|_e}$.

Příklad 2.10. Exponenciela $\exp : \mathfrak{af}(1) \to Af(1)$.

Hledáme integrální křivky vektorového pole z příkladu 1.19. Pro libovolné levoinvariantní pole $X = \alpha X_1 + \beta X_2 = \alpha x\partial_x + \beta x\partial_y$ jsou rovnice pro integrální křivky

$$\dot x(t) = \alpha x(t), \qquad \dot y(t) = \beta x(t)$$

s počátečními podmínkami $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Jejich řešením je

$$(x(t), y(t)) = \left(\mathrm{e}^{\alpha t}, \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1)\right).$$

Exponencielu získáváme dosazením $t = 1$, tj.

$$\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{\alpha x\partial_x + \beta x\partial_y} = \left(\mathrm{e}^\alpha, \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha - 1)\right).$$

Pro $\alpha = 0$ vyjde výsledek $(1, \beta)$ přímým výpočtem stejně jako provedením $\lim_{\alpha\to 0}$.

V maticovém vyjádření je tečný vektor $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, platí $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, …, $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)^k = \left(\begin{smallmatrix}\alpha^k & \alpha^{k-1}\beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, takže získáváme

$$\exp\left(\alpha X_1 + \beta X_2\right) = \exp\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)^n = \left(\begin{smallmatrix}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!} & \frac{\beta}{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\mathrm{e}^\alpha & \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha - 1)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right).$$

Věta 2.11. Pro libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ platí

$$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}. \tag{2.5}$$

Důkaz. Diagonalizovatelné matice jsou husté v množině všech matic a obě strany rovnice jsou spojité, tj. postačí ukázat pro libovolné diagonalizovatelné A. Předpokládame tedy, že existuje B takové, že $D = BAB^{-1}$ je diagonální a máme

$$\mathrm{tr}D = \mathrm{tr}BAB^{-1} = \mathrm{tr}AB^{-1}B = \mathrm{tr}A.$$

Z definice pomocí řady vidíme, že platí $\mathrm{e}^{BAB^{-1}} = B\mathrm{e}^A B^{-1}$. Proto

$$\det \mathrm{e}^D = \det B \det B^{-1} \det \mathrm{e}^A = \det \mathrm{e}^A.$$

Protože $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, máme $\mathrm{e}^D = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$ a tedy

$$\det \mathrm{e}^D = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_k} = \mathrm{e}^{\sum_k \lambda_k} = \exp(\mathrm{tr}D).$$

□

Věta 2.12. Buď G Lieova grupa, pak $\exp : \mathfrak{g} \to G : X \to \mathrm{e}^X$ je lokální difeomorfismus okolí $0 \in \mathfrak{g}$ na okolí $e \in G$.

Důkaz. $\mathfrak{g}$ jako vektorový prostor lze chápat jako varietu, $T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$. Z hladkosti závislosti řešení diferenciálních rovnic na parametrech v rovnicích obsažených je exp hladké zobrazení variet a $\exp_*|_0 : T_0\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \equiv T_eG$. $\exp(tX)$ je integrální křivka v G procházející e s tečným vektorem $X|_e$ a $\gamma(t) = 0 + tX|_e$ je křivka v $\mathfrak{g}$ s tečným vektorem $X|_e$ v $t = 0$. Tudíž dle definice tečného zobrazení máme

$$\begin{aligned}\exp_*|_0\left(X|_e\right)f &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^{\gamma(t)}) - f(\mathrm{e}^{\gamma(0)})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^{0+tX|_e}) - f(\mathrm{e}^0)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^{tX}) - f(e)}{t} \overset{\text{def.}}{=} X|_e f.\end{aligned}$$

Tedy $\exp_*|_0\left(X|_e\right) = X|_e$, $\exp_*|_0 = \mathrm{id}$ a dle věty o inverzním zobrazení je exp lokální difeomorfismus. □

Poznámka 2.13. Pro matice to je zřejmější, viz

$$\exp_*(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tX})\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 + tX + O(t^2)\right)\bigg|_{t=0} = X.$$

Poznámka 2.14. Zobrazení exp obecně není surjektivní ani injektivní. Je zřejmé, že exp nemůže být surjektivní pro grupy s více komponentami souvislosti (nelze spojit křivkou body z různých komponent). Ale obecně exp není surjektivní ani pro souvislé G. V případě, že G je souvislá a kompaktní, lze ukázat, že exp je nutně surjektivní.

2.2 Vyšetřování souvislosti variet

Definice 2.15. Buď M diferencovatelná varieta a V její prostě vnořená podvarieta. Pokud existuje spojité zobrazení $r : \langle 0,1\rangle \times M \to M$, takové že

- $r(0,m) = m$, $\forall m \in M$,
- $r(t,v) = v$, $\forall v \in V$, $\forall t \in \langle 0,1\rangle$,
- $r(1,m) \in V$, $\forall m \in M$,

říkáme, že podvarieta V je **deformační retrakt** variety M.

Poznámka 2.16. Definice deformačního retraktu vyžaduje pouze spojitost, jedná se tedy o topologický pojem, aplikovatelný i na podprostor topologického prostoru.

Definice 2.17. Souvislý topologický prostor (či souvislá varieta) M je **jednoduše souvislý** právě tehdy, když pro každou spojitou uzavřenou křivku

$$\gamma : \langle 0,1\rangle \to M, \quad \gamma(0) = \gamma(1),$$

existuje spojité zobrazení $\phi : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to M$ takové, že

$$\forall t \in \langle 0,1\rangle : \quad \phi(0,t) = \gamma(t), \quad \phi(1,t) = \gamma(0).$$

Věta 2.18. Nechť V je deformační retrakt M, pak

- M je souvislá právě tehdy, když V je souvislá,
- M je jednoduše souvislá právě tehdy, když V je jednoduše souvislá.

Důkaz. V případě souvislosti zřejmé. Pro jednoduchou souvislost plyne z vhodného složení ϕ a r. Libovolnou uzavřenou křivku $\gamma_M(t)$ v M lze spojitě zdeformovat na křivku $\gamma_V(t) = r(1,\gamma_M(t))$ v V a tedy lze-li do bodu kontrahovat každou uzavřenou křivku v V, lze totéž udělat i pro libovolnou uzavřenou křivku v M.

Naopak libovolná křivka ve V je současně křivkou v M. Je-li M jednoduše souvislá, lze každou křivku ve V spojitě zkontrahovat do bodu zobrazením ϕ zobrazujícím do M, pak $\tilde{\phi}(s,t) = r(1,\phi(s,t))$ zobrazuje $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ do V a má požadované vlastnosti. □

Poznámka 2.19. Přímým zobecněním lze ukázat, že M a její deformační retrakt V mají izomorfní takzvané homologické grupy $H_p(M,G)$ a $H_p(V,G)$ pro libovolnou abelovskou grupu koeficientů G.

Příklad 2.20. $SL(2,\mathbb{R}) = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right),\ xw - zy = 1\}$ je souvislá, ale není jednoduše souvislá, jak ukážeme následující posloupností deformačních retraktů deformujících ji na $SO(2)$. Nejprve definujeme V_1:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{z} & \tilde{w} \end{pmatrix} \,\middle|\, \tilde{x}^2 + \tilde{z}^2 = 1,\ \tilde{x}\tilde{w} - \tilde{z}\tilde{y} = 1 \right\}.$$

Položíme $r_1\left(t, \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \alpha(t)x & \frac{1}{\alpha(t)}y \\ \alpha(t)z & \frac{1}{\alpha(t)}w \end{pmatrix}$, kde $\alpha(0) = 1$ a pro $\alpha(1)$ platí $\alpha^2(1)\,(x^2+z^2) = 1$. Proto vybíráme $\alpha(t) = \frac{1}{(x^2+z^2)^{t/2}}$. Tudíž $V_1 = r_1\,(1, SL(2,\mathbb{R})) \subset SL(2,\mathbb{R})$ je deformační

retrakt $SL(2,\mathbb{R})$. Dále deformujeme V_1 tak, aby sloupce byly ortonormální vektory:

$$r_2\left(t, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - t\,(xy+zw)\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix},$$
$$V_2 = r_2(1, V_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \,\middle|\, x^2+z^2=1,\ xy+zw=0 \right\}.$$

Nyní $xy+zw=0$ a $xw-zy=1$ implikují

$$w = x\cdot(y^2+w^2), \qquad y = -z\cdot(y^2+w^2) \Rightarrow$$
$$w^2+y^2 = (x^2+z^2)(w^2+y^2)^2 = (w^2+y^2)^2$$

a tedy v důsledku nenulovosti w^2+y^2 máme $w^2+y^2=1$. V důsledku

$$V_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \theta \in \langle 0, 2\pi) \right\} = SO(2)$$

je souvislá a topologicky ekvivalentní kružnici S^1. $SL(2,\mathbb{R})$ je tedy stejně jako S^1 souvislá, ale není jednoduše souvislá.

Dále najdeme obor hodnot zobrazení $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$. Máme

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbb{R} \right\},$$

což implikuje

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & 0 \\ 0 & zy+x^2 \end{pmatrix} = -\det A \cdot \mathbb{I}.$$

$$\mathrm{e}^A = \begin{cases} \cos\sqrt{|A|}\cdot\mathbb{I} + \frac{\sin\sqrt{|A|}}{\sqrt{|A|}}\cdot A, & |A|>0 \\ \cosh\sqrt{-|A|}\cdot\mathbb{I} + \frac{\sinh\sqrt{-|A|}}{\sqrt{-|A|}}\cdot A, & |A|<0 \\ \mathbb{I}+A, & |A|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tr}\mathrm{e}^A = 2\cos\sqrt{|A|} \in \langle -2, 2\rangle, \\ \operatorname{tr}\mathrm{e}^A = 2\cosh\sqrt{-|A|} \geq 2, \\ \operatorname{tr}\mathrm{e}^A = 2, \end{cases}$$

kde $|A| = \det A$.

V důsledku vidíme, že $\operatorname{tr}\mathrm{e}^A \geq -2$ pro každé $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Ovšem v $SL(2,\mathbb{R})$ existují elementy, které této podmínce nevyhovují, např. $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$ a tedy $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$ není surjektivní.

Důsledek 2.21. Souvislá Lieova grupa G nemusí být celá pokryta exponencielním zobrazením, tj. může nastat $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$, $\exp(\mathfrak{g}) \neq G$.

Poznámka 2.22. Lze ukázat, že $SL(n,\mathbb{R})$ není jednoduše souvislá pro žádné $n \geq 2$.

Věta 2.23. Buď G souvislá Lieova grupa, $g \in G$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ takové, že $g = \mathrm{e}^{X_1}\mathrm{e}^{X_2}\ldots\mathrm{e}^{X_n}$.

Důkaz. Mějme otevřené okolí U_0 obsahující jednotku, $e \in U_0 = U_0^\circ \subset G$. Předpokládejme, že $(.)^{-1} : U_0 \to U_0$ (jinak vezmeme $\tilde{U}_0 = U_0 \cap U_0^{-1}$, kde $U_0^{-1} = \{g^{-1} | g \in U_0\}$). Zkonstruujeme posloupnost do sebe vnořených otevřených podmnožin $U_i = \bigcup_{g\in U_{i-1}} gU_0$, $U_i \subset U_{i+1}$. Protože $L_g(U_0) = (L_g(U_0))^\circ$, je též sjednocení otevřených množin U_i otevřené. Označme

$U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} U_i$, pak $U = U^\circ$ a pro $V = G \setminus U$ platí $V = \overline{V}$. Sporem ukážeme, že pro libovolný bod $g \in V$ je $g \in gU_0 = L_g(U_0) = (L_g(U_0))^\circ \subset V$, tj. že každý bod $g \in V$ má ve V otevřené okolí. Z předpokladu $L_g(U_0) \cap U \neq \emptyset$ totiž vyplývá existence $u_0 \in U_0$ takového, že $gu_0 \in U$, tj. pro nějaké $i \in \mathbb{N}_0$ musí být $gu_0 \in U_i$. V důsledku inkluze $U_i u_0^{-1} = \{hu_0^{-1} | h \in U_i\} \subset U_{i+1} \subset U$, tj. máme hledaný spor $g \in U_i u_0^{-1} \subset U$. Odvodili jsme tedy, že V je otevřená, tj. $U = \overline{U}$. Protože $e \in U$ je $U \neq \emptyset$ a tedy jako množina současně otevřená a uzavřená v souvislém topologickém prostoru je nutně $U = G$. □

Poznámka 2.24. Podstatně složitějším způsobem lze ukázat, že n ve výše uvedené větě lze vybrat rovné 2.

2.3 Cvičení

Cvičení 2.1. Ukažte, že unitární grupa $U(n)$ je souvislá.

Řešení. Dokažte, že pro každé $G \in U(n)$ existuje diagonální matice $D = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}) \in U(n)$ a $U \in U(n)$ takové, že $G = U \cdot D \cdot U^\dagger$. Pak spojte $\mathbb{I} \in U(n)$ s G křivkou

$$G(t) = U \cdot \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varphi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varphi_n}) \cdot U^\dagger \subset U(n).$$

Cvičení 2.2. Ukažte, že speciální ortogonální grupa $SO(n)$ je souvislá.

Řešení. Postupujeme podobně, místo diagonálních matic uvažujeme blokově diagonální matice s bloky $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, případně $1 \in \mathbb{R}^{1,1}$ pro n liché.

To, že každou sudorozměrnou ortogonální matici s jednotkovým determinantem lze zapsat jako blokově diagonální s bloky tvaru $R(\varphi)$ dokážeme následovně:

Pro ortogonální matici se snadno ověří, že ortogonální doplněk invariantního podprostoru je nutně též invariantní.

Daná matice $S \in SO(2m)$ má z ortogonality vlastní čísla s absolutní hodnotou rovnou jedné (neboť ortogonální matice je též unitární). Imaginární vlastní čísla jsou pro reálnou matici v komplexně sdružených párech, se stejnou násobností pro daný pár. Taková čísla tedy do determinantu přispívají jedničkou. Podobně máme vlastní čísla -1 a $+1$, které v součinu musí dát $\det A = 1$, tj. též násobnosti $+1$ a -1 jsou sudé. Proto máme 2×2 bloky odpovídající těmto vlastním číslům ve tvaru $R(0)$ a $R(\pi)$. Najdeme ortogonální doplněk V k direktnímu součtu vlastních podprostorů odpovídajících $+1$ a -1 a zúžíme na něj operátor S. Získaný operátor $\tilde{S} : V \to V$ má pouze imaginární vlastní čísla. Ve V uvažujeme jednotkovou kouli $S^k = \{\vec{v} \in V | \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 1\} \subset V$ a na ní spojitou funkci

$$f : S^k \to \mathbb{R} : f(\vec{v}) = \langle \vec{v}, S\vec{v} \rangle.$$

S^k je kompaktní a tudíž f na S^k nabývá svých extrémů. Buď $\vec{v}_0$ extremální bod. Pak

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\vec{v}_0 + t\vec{x}) =< x, Sv_0 > + < v_0, Sx >=< x, (S + S^T)v_0 >$$

pro všechna $\vec{x} \in T_{v_0}S^k$, tj. pro všechna $\vec{x}$ kolmá na $\vec{v}_0$. Tj. $(S + S^T)v_0$ je kolmý na všechny vektory z $T_{v_0}S^k$ a tedy je násobkem $\vec{v}_0$, $(S + S^T)v_0 = \lambda v_0$. Ekvivalentně $S^2 v_0 + v_0 = \lambda S v_0$ neboli $S^2 v_0 = \lambda S v_0 - v_0$ a vidíme, že v_0, Sv_0 je bazí dvourozměrného invariantního podprostoru $\tilde{V}$. Zúžením S na něj získáváme $\hat{S} \in SO(2)$, který již nutně ve vhodné ortonormální bázi má tvar $R(\varphi)$. Opět přejdeme k ortogonálnímu doplňku podprostoru $\tilde{V}$

ve V a opakujeme, dokud nedospějeme k hledanému kvazidiagonálnímu tvaru operátoru S.

Pro matice $S \in SO(2m+1)$ se postup liší pouze tím, že násobnost vlastního čísla $+1$ je nutně lichá a tedy máme navíc blok $1 \in \mathbb{R}^{1,1}$.

Kapitola 3

Tok levoinvariantního vektorového pole, vztah podgrup a podalgeber, akce grup

V této kapitole se budeme nejprve zabývat vzájemnou korespondencí mezi pojmy z oblasti Lieových grup a Lieových algeber, např. podgrupou vs. podalgebrou, a ukážeme si, že Lieovu závorku lze vypočítat jistou limitou grupového násobení vhodných jednoparametrických podgrup. V další části zavedeme pojem akce grupy a homogenní prostor.

Věta 3.1. Tok generovaný levoinvariantním vektorovým polem $X \in \mathfrak{g}$ je jednoparametrická grupa pravých translací

$$\Psi_X^t(g) = g\mathrm{e}^{tX}, \qquad \text{tj.} \qquad \Psi_X^t = R_{\mathrm{e}^{tX}} \,. \tag{3.1}$$

Důkaz. Pro $X \in \mathfrak{g}$ je $X|_e \in T_eG$ a e^{tX} je integrální křivka vycházející z e. Ukážeme, že integrální křivka tohoto pole procházející g je $\gamma(t) = g\mathrm{e}^{tX}$:

$$\dot\gamma(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_t g\mathrm{e}^{tX} = L_{g*}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_t \mathrm{e}^{tX} = L_{g*}\,X|_{\mathrm{e}^{tX}} = X|_{g\mathrm{e}^{tX}} \,,$$

tj. $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$. Z jednoznačnosti integrální křivky vycházející z bodu g pak plyne vztah (3.1). □

Důsledek 3.2. Buď $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathcal{X}(G)$, $Y \circ R_g^* = R_g^* \circ Y$, potom $[X,Y] = 0$. Tj. levoinvariantní a pravoinvariantní vektorová pole komutují.

Důkaz.

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big((Yf)\circ R_{\mathrm{e}^{tX}} - Yf - Y(f\circ R_{\mathrm{e}^{tX}}) + Yf\big) =$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big((R^*_{\mathrm{e}^{tX}}\circ Y)f - (Y\circ R^*_{\mathrm{e}^{tX}})f\big) = 0.$$

□

Věta 3.3. Buď M diferencovatelná varieta, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ vektorová pole, Ψ_X^t, Ψ_Y^t jejich toky, $f \in C^\infty(M)$ hladká funkce a bod $p \in M$. Potom platí

$$([X,Y]f)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\sigma(t)) - f(p)}{t^2} \,,$$

kde $\sigma(t) = (\Psi_Y^{-t} \circ \Psi_X^{-t} \circ \Psi_Y^t \circ \Psi_X^t\ )(p)$ (tj. $\sigma(0) = p$).

Důkaz. Pro přehlednost zaveďme následující značení:

$$0 \equiv p, \quad 1 \equiv \Psi_X^t(p), \quad 2 \equiv \Psi_Y^t(1), \quad 3 \equiv \Psi_{-X}^t(2) = \Psi_X^{-t}(2), \quad 4 \equiv \Psi_{-Y}^t(3).$$

Pak můžeme psát

$$f(4) - f(0) = \big(f(4) - f(3)\big) + \big(f(3) - f(2)\big) + \big(f(2) - f(1)\big) + \big(f(1) - f(0)\big). \tag{3.2}$$

Rozvineme

$$\begin{aligned}
f(1) - f(0) &= tXf(0) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + O(t^3),\\
f(2) - f(1) &= tYf(1) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(1) + O(t^3),\\
f(3) - f(2) &= -tXf(2) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(2) + O(t^3),\\
f(4) - f(3) &= -tYf(3) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(3) + O(t^3).
\end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned}
Xf(0) - Xf(2) &= Xf(0) - Xf(1) + Xf(1) - Xf(2)\\
&= -tX(Xf)(0) - tY(Xf)(1) + O(t^2)\\
&= -tX(Xf)(0) - tY(Xf)(0) + O(t^2),\\
Yf(1) - Yf(3) &= Yf(1) - Yf(2) + Yf(2) - Yf(3)\\
&= -tY(Yf)(1) + tX(Yf)(2) + O(t^2)\\
&= -tY(Yf)(0) + tX(Yf)(0) + O(t^2)
\end{aligned}$$

a v členech $t^2X(X(f))$, $t^2X(Y(f))$, $t^2Y(X(f))$ a $t^2Y(Y(f))$ při výpočtu s uvažovanou přesností na bodu vyhodnocení nezáleží, je možné jej nahradit bodem $0 \equiv p$.

Dosazením do (3.2) dostáváme

$$\begin{aligned}
f(4) - f(0) &= -t^2X(Xf)(0) - t^2Y(Xf)(0) - t^2Y(Yf)(0) + t^2X(Yf)(0) +\\
&\quad + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(0) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(0) + O(t^3)\\
&= t^2\big(X(Yf) - Y(Xf)\big)(0) + O(t^3).
\end{aligned}$$

Provedením limity získáváme dokazovanou identitu

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\big(f(\sigma(t)) - f(p)\big) = \big(X(Yf) - Y(Xf)\big)(p) = ([X,Y]f)(p).$$

□

Důsledek 3.4. Pro $X, Y \in \mathfrak{g}$ máme

$$\begin{aligned}
[X,Y]f(p) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\Big(f\big(R_{\mathrm{e}^{-tY}}R_{\mathrm{e}^{-tX}}R_{\mathrm{e}^{tY}}R_{\mathrm{e}^{tX}}(p)\big) - f(p)\Big) =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\Big(f\big(pe^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY}\big) - f(p)\Big)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Důsledek 3.5. V případě maticových grup platí $[X,Y]|_e = XY - YX$ pro libovolná $X, Y \in T_eG \simeq \mathfrak{g}$.

Důkaz. $e = \mathbb{I}$, $R_{\mathrm{e}^{-tY}} R_{\mathrm{e}^{-tX}} R_{\mathrm{e}^{tY}} R_{\mathrm{e}^{tX}}(\mathbb{I}) = \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY}$

$$[X,Y]f(e) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\Big(f\left(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY}\right) - f(\mathbb{I})\Big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{\sqrt{t}Y}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}Y}\right) - f(\mathbb{I})}{t}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} f(\mathrm{e}^{\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{\sqrt{t}Y}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}Y}).$$

Máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{\sqrt{t}Y}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}Y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} \left(\mathbb{I} + \sqrt{t}X + \frac{t}{2}X^2\right)\left(\mathbb{I} + \sqrt{t}Y + \frac{t}{2}Y^2\right) \times$$
$$\times \left(\mathbb{I} - \sqrt{t}X + \frac{t}{2}X^2\right)\left(\mathbb{I} - \sqrt{t}Y + \frac{t}{2}Y^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0^+} \left(\mathbb{I} + t\,(XY - YX) + O(\sqrt{t}^3)\right) = X\cdot Y - Y\cdot X,$$

tudíž

$$[X,Y]f(\mathbb{I}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(f(\mathbb{I} + t(XY - YX)) - f(\mathbb{I})\right)$$

a tedy

$$[X,Y]|_{\mathbb{I}} = X|_{\mathbb{I}} \cdot Y|_{\mathbb{I}} - Y|_{\mathbb{I}} \cdot X|_{\mathbb{I}} \in T_{\mathbb{I}}G.$$

□

3.1 Vztah mezi podgrupou a podalgebrou, integrabilita distribucí

Nyní budeme zkoumat vztah mezi podgrupami Lieových grup a podalgebrami odpovídajících Lieových algeber. Základním nástrojem je teorie tzv. integrabilních distribucí.

Definice 3.6. k**–rozměrná distribuce** Δ_k na varietě M, kde $\dim M = n \geq k$, je hladké zobrazení, které každému $p \in M$ přiřazuje k–rozměrný podprostor v T_pM. Značíme $\Delta_k(p) \subset T_pM$, $\dim \Delta_k(p) = k$.

Hladkost z předcházející definice chápeme v tom smyslu, že pro každé $p \in M$ existuje jeho otevřené okolí U, $p \in U$ a vektorová pole $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(U)$ taková, že $\Delta_k(q) = \operatorname{span}\left\{X_1|_q, \ldots, X_k|_q\right\}$ v každém bodě $q \in U$.

Definice 3.7. Integrální podvarieta dimenze l distribuce Δ_k je vnořená podvarieta N dimenze l taková, že $T_pN \subset \Delta_k(p)$ ve všech bodech $p \in N$.

Příklad 3.8. Integrální křivky zvoleného vektorového pole jsou integrální podvariety dimenze 1.

Definice 3.9. Distribuce Δ_k je (úplně) **integrabilní** právě tehdy, když pro každý bod $p \in M$ existují na nějakém jeho otevřeném okolí U souřadnice $\left(x^1, \ldots x^k, y^1, \ldots, y^{n-k}\right)$ takové, že rovnice $y^j = \mathrm{konst}_j$ pro $j \in \widehat{n-k} \equiv \{1, \ldots, n-k\}$ definují k–rozměrné integrální podvariety distribuce Δ_k. Takové souřadnice (x, y) se nazývají Frobeniova mapa.

Takto zkonstruované integrální podvariety distribuce Δ_k jsou z definice vložené podvariety M.

Věta 3.10 (Frobeniova)**.** Distribuce Δ_k je úplně integrabilní tehdy a jen tehdy, když

$$[\Delta_k, \Delta_k] \subset \Delta_k. \tag{3.4}$$

Rovnice (3.4) znamená, že pro libovolné otevřené okolí $U = U^\circ \subset M$ a dvojici vektorových polí $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ takovou, že $\forall p \in U : X(p), Y(p) \in \Delta_k(p)$ platí $[X, Y](q) \in \Delta_k(q)$ v každém $q \in U$. Bez důkazu.

Používáme zápis $X \in \Delta_k(U)$ nebo $X \in \Delta_k$, pokud pro vektorové pole $X \in \mathcal{X}(U)$ platí $X(q) \in \Delta_k(q)$ pro všechna $q \in U$. Dále

$$[\Delta_k, \Delta_k](p) = \operatorname{span}\left\{ [X_1, X_2]|_p \mid X_1, X_2 \in \Delta_k(U) \right\}.$$

Integrální podvariety N_1, N_2, pro které $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, lze hladce navazovat, tj. vytvářet větší integrální podvariety postupem $N = N_1 \cup N_2$. Postupným sjednocením integrálních podvariet získáváme listy distribuce Δ_k.

Definice 3.11. Maximální list distribuce Δ_k je taková integrální podvarieta, na kterou nelze hladce navázat žádnou integrální podvarietu v listu neobsaženou. Maximální listy tvoří tzv. **foliaci** variety danou integrabilní distribucí.

Listy již obecně nejsou vloženými podvarietami, protože se vloženost může narušit nekonečným sjednocením. Z konstrukce ale zůstávají vnořenými podvarietami, neboť tečné zobrazení popisující vnoření v každém bodě p má jako obraz k–rozměrný podprostor $\Delta_k(p)$.

Věta 3.12 (Chevalley)**.** Maximální listy integrabilní distribuce jsou prostě vnořené podvariety. Bez důkazu.

Lemma 3.13. Uvažujme Lieovu grupu G, její Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ a její podalgebru $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, tj. vektorový podprostor splňující $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Nechť H je maximální list integrabilní distribuce určené $\mathfrak{h}$ procházející grupovou jednotkou e. Pak H je podgrupa Lieovy grupy G.

Důkaz. Díky levoinvariantnosti $\mathfrak{h}$ je gH opět maximální list. Ten je z definice buď totožný s původním nebo s ním má prázdný průnik. Ale pokud $g \in H$, pak $ge = g \in H \cap gH$ a tedy $gH = H$. Obdobně $g \in H$ implikuje $g^{-1}H = H$, protože $g^{-1}g = e \in H \cap g^{-1}H$. □

Důsledek 3.14. Buď G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ podalgebra $\mathfrak{g}$. Potom existuje prostým způsobem vnořená podvarieta $H \subset G$ taková, že H je podgrupa G a její Lieova algebra je přirozeně izomorfní $\mathfrak{h}$.

Obecně H není uzavřená v topologii G. To implikuje, že se obecně nejedná o vloženou podvarietu, jak ukazuje následující příklad. Uvažujme torus

$$T^2 = S^1[\varphi] \times S^1[\vartheta], \quad (\varphi_1, \theta_1) \cdot (\varphi_2, \theta_2) = (\varphi_1 + \varphi_2 \mod 2\pi, \theta_1 + \theta_2 \mod 2\pi), \quad e = (0, 0).$$

Vektorové pole $X = a\partial_\varphi + b\partial_\vartheta \in \mathfrak{t}^2$ je levoinvariantní, $\mathfrak{h} = \operatorname{span}\{X\}$ je jednorozměrná podalgebra v $\mathfrak{t}^2$. Integrální křivky vektorového pole X jsou určeny rovnicemi $\dot{\varphi} = a$, $\dot{\theta} = b$, takže máme odpovídající jednoparametrickou podgrupu

$$H = \{(at \mod 2\pi, bt \mod 2\pi) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ je křivka na toru uzavřená a jedná se o vložení. Pro $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ ale v topologii T^2 platí $\overline{H} = T^2$, tj. křivka hustě nakrývá torus, není uzavřená a nejedná se o vložení, ale pouze o prosté vnoření.

3.2 Akce grupy na varietě

Definice 3.15. (Levá) **akce** ϕ **Lieovy grupy** G na varietě M je hladké zobrazení $\phi : G \times M \to M$ vyhovující

- $\phi(g_1 g_2, m) = \phi(g_1, \phi(g_2, m))$ pro všechna $g_1, g_2 \in G$, $m \in M$, a
- $\phi(e, m) = m$ ve všech bodech $m \in M$.

Pro zvolený bod $m \in M$ nazýváme množinu bodů $\{\phi(g, m) | g \in G\}$ **orbita** akce ϕ procházející bodem m a značíme $\mathcal{O}_m$.

Poznámka 3.16. Obdobně se definuje **pravá akce** $\phi : M \times G \to M$:

- $\phi(m, g_1 g_2) = \phi(\phi(m, g_1), g_2)$,
- $\phi(m, e) = m$.

Pravou akci lze vyjádřit pomocí levé akce záměnou $g \to g^{-1}$.

Definice 3.17. Pro podgrupu H grupy G definujeme **levé cosety** $gH = \{gh | h \in H\}$. Cosety $gH = \mathcal{O}_g$ jsou tedy orbity pravé akce podgrupy H na grupě G.

Množinu levých cosetů značíme G/H, tj. $G/H = \{gH | g \in G\}$. Obdobně lze definovat i pravé cosety. V případě normálních podgrup, tj. takových H, že $gHg^{-1} = H$ pro všechna $g \in G$, pojmy levý a pravý coset splývají.

Pokud H je podgrupa Lieovy grupy G uzavřená v topologii G, lze na G/H zavést právě jednu hladkou strukturu takovou, že $(G, G/H, H, \pi)$, $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = gH$, je hlavní fibrovaný prostor s bazí G/H, projekcí π a typickým vláknem H.

Definice 3.18. Akce $\phi : G \times M \to M$ je

- **efektivní** právě tehdy, když pro každý prvek $g \in G$ různý od e existuje bod $m \in M$ takový, že $\phi(g, m) \neq m$,
- **volná** právě tehdy, když $\phi(g, m) = m$ pro jeden bod $m \in M$ již implikuje $g = e$,
- **tranzitivní** právě tehdy, když pro každou dvojici bodů $m_1, m_2 \in M$ existuje $g \in G$ takové, že $m_2 = \phi(g, m_1)$.

Definice 3.19. Nechť ϕ je tranzitivní akce G na M a $x_0 \in M$. **Grupa izotropie** (nebo také grupa stability, stabilizátor nebo malá grupa) bodu x_0 je

$$H_{x_0} = \{g \in G | \phi(g, x_0) = x_0\}. \tag{3.5}$$

Poznámka 3.20. Z rovnice (3.5) a hladkosti akce je vidět, že H_{x_0} obsahuje všechny své limitní body, tj. je uzavřenou podgrupou v G.

Protože pro libovolné $x \in M$ existuje $g_x \in G$ takové, že $x = \phi(g_x, x_0)$, máme pro libovolné $g_0 \in H_{x_0}$, $\phi(g_x g_o g_x^{-1}, x) = \phi(g_x, \phi(g_0, \phi(g_x^{-1}, x))) = x$. Proto platí $H_x = g_x H_{x_0} g_x^{-1}$, tj. všechny grupy izotropie jsou konjugované. V případě normálních podgrup H_{x_0} jsou dokonce totožné.

Důsledek 3.21. Pro tranzitivní akci $\phi : G \times M \to M$ a zvolený bod $x_0 \in M$ je

$$M \simeq G/H_{x_0}.$$

Důkaz. Protože pro libovolné $g_x \in G$ takové, že $\phi(g_x, x_0) = x$, platí $\phi(g_x H_{x_0}, x_0) = \phi(g_x, x_0) = x$, máme vzájemně jednoznačné přiřazení $G/H_{x_0} \leftrightarrow M : \quad g_x H_{x_0} \leftrightarrow x \in M$.

Definice 3.22. Varietu M, kterou lze zapsat ve tvaru $M \simeq G/H_{x_0}$ pro nějakou Lieovu grupu G s tranzitivní akcí na M a její uzavřenou podgrupu $H_{x_0} \subset G$, nazýváme **homogenní prostor**.

Zde se homogenním prostorům a jejich geometrickým vlastnostem, např. metrice, konexi a křivosti kompatibilní s akcí grupy, nebudeme podrobněji věnovat, případné zájemce o tuto oblast teorie Lieových grup nezbývá než odkázat na [1] či [13].

3.3 Cvičení

Cvičení 3.1. Nechť $G, \widetilde{G}$ jsou Lieovy grupy, $\phi : G \to \widetilde{G}$ hladký homomorfismus, tj. $\forall g, h \in G,\ \phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$, pak platí:

$$\phi_* \circ L_{g*} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*, \quad \text{a} \quad \phi_*(X) \in \widetilde{\mathfrak{g}}|_{\phi(G)}\,,\ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Řešení. Z definice platí pro libovolná $g, h \in G$, a $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} &L_{g*}\, X|_h = X|_{gh}\,, \\ &\phi(L_g h) = L_{\phi(g)}\phi(h) \quad \Rightarrow \quad \phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi \quad \Rightarrow \quad \phi_* \circ L_{g*} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $\phi_*(X|_{gh}) = \phi_*\left(L_{g*}\left(X|_h\right)\right) = L_{\phi(g)*}\phi_*\left(X|_h\right)$ a lze konzistentně definovat $(\phi_* X)_{\phi(g)} = \phi_*\left(X|_g\right) \in \mathcal{X}(\phi(G))$, neboť libovolná dvě $g_1, g_2 \in G$ taková, že $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ lze zapsat ve tvaru $g_2 = hg_1$, kde $\phi(h) = e$ a platí $\phi_*\left(X|_{g_2}\right) = \phi_*\left(X|_{hg_1}\right) = L_{\phi(h)}\left(\phi_*\left(X\right)|_{\phi(g_1)}\right) = \phi_*\left(X\right)|_{\phi(g_1)}$. Označme $\phi(g) = \widetilde{g}, \phi(h) = \widetilde{h}$, pak můžeme psát

$$\begin{aligned} L_{\widetilde{g}*}\left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{h}} = L_{\phi(g)*}\left(\phi_* X\right)|_{\phi(h)} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*\left(X|_h\right) = \phi_* \circ L_{g*}\left(X|_h\right) = \\ = \phi_*\left(X|_{gh}\right) = \left(\phi_* X\right)|_{\phi(gh)} = \left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{g}\widetilde{h}}\,. \end{aligned}$$

Tudíž pro libovolná $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \phi(G)$ platí levoinvariance $\phi_*(X)$, tj. vztah $L_{\widetilde{g}*}\left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{h}} = \left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{g}\widetilde{h}}$. Levoinvariantním dodefinováním pak lze $\phi_*(X)$ chápat jako jednoznačně určený prvek $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Cvičení 3.2. Nechť $G, \widetilde{G}$ jsou Lieovy grupy, $\phi : G \to \widetilde{G}$ hladký homomorfismus. Pak platí:

$$\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathrm{e}^{t\phi_* X}.$$

Řešení. Obě strany rovnice jsou díky $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ 1–parametrické podgrupy. Vidíme, že jejich tečné vektory v e jsou stejné

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \phi_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} = \left(\phi_* X\right)|_{\widetilde{e}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{t\phi_* X}.$$

Protože jednoparametrické podgrupy jsou plně určeny svými tečnými vektory v grupové jednotce, dokázali jsme tím požadovanou identitu.

Cvičení 3.3. Nechť $G, \widetilde{G}$ jsou Lieovy grupy, $\phi : G \to \widetilde{G}$ hladký homomorfismus. Pak platí:

$$[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_*\big([X, Y]\big)$$

pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$, tj. ϕ_* je homomorfismus Lieových algeber.

Řešení. Mějme libovolnou $f \in C^\infty(\widetilde{G})$ a bod $g \in G$:

$$(\phi_* X)\ f|_{\phi(g)} = X\ (f \circ \phi)|_g = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\phi\left(g\mathrm{e}^{tX}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\phi(g)\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right) =$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(f \circ R_{\phi(\mathrm{e}^{tX})}\right)|_{\phi(g)}\,.$$

Proto

$$[\phi_* X, \phi_* Y]\ f|_{\phi(g)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left[f\left(\phi(g)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{tY}\right)\right) - f\left(\phi(g)\phi\left(\mathrm{e}^{tY}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)\right)\right] =$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{s,t=0} \left[f\left(\phi\left(g\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tY}\right)\right) - f\left(\phi\left(g\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{sX}\right)\right)\right] =$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{s,t=0} \left[(f \circ \phi)\left(g\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tY}\right) - (f \circ \phi)\left(g\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{sX}\right)\right] =$$
$$= [X, Y]\ (f \circ \phi)|_g = \left(\phi_*[X, Y]\right)\ f|_{\phi(g)}\,.$$

Protože na obou stranách dokazované identity stojí levoinvariantní vektorová pole, lze ji konzistentně dodefinovat jako vztah platný ve všech bodech $\tilde{g} \in \tilde{G}$ i tehdy, když ϕ není surjektivní.

Cvičení 3.4. Uvažujte distribuci Δ definovanou v každém bodě $p \in M = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}[x, y, z]$ předpisem $\Delta(p) = \mathrm{span}\{X_1|_p, X_2|_p, X_3|_p\}$, kde

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Najděte rozměr této distribuce, ukažte, že je úplně integrabilní dle Frobeniovy věty, a popište její maximální listy.

Cvičení 3.5. Ukažte geometrickou úvahou, že $S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$.

Cvičení 3.6. Ukažte zobecněním postupu z předchozího cvičení, že $S^n \simeq SO(n{+}1)/SO(n)$.

Řešení. Můžeme to udělat i explicitně:

$$T \in SO(n+1) : T = \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ \vec{c}^T & d \end{pmatrix},\ \text{kde } A \in \mathbb{R}^{n,n}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n, d \in R.$$

Z podmínek na matici T máme

$$A \cdot A^T + \vec{b} \cdot \vec{b}^T = \mathbb{I}, \qquad A \cdot \vec{c} + d \cdot \vec{b} = \vec{0},$$
$$\vec{c}^T \cdot A^T + d \cdot \vec{b}^T = \vec{0}, \qquad \vec{c}^T \cdot \vec{c} + d^2 = 1, \qquad \det T = 1.$$

Stabilizátor bodu $\vec{x}_0 = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je určen podmínkou

$$T \cdot \vec{x} = \vec{x},\ \text{tj. } \vec{b} = 0, d = 1$$

a v důsledku $A \in SO(n), \vec{c} = 0$. Tudíž máme

$$SO(n) = H_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} | A \in SO(n) \right\} \subset SO(n+1).$$

Chceme explicitně vyjádření S^n pomocí vhodných reprezentantů tříd ekvivalence, tj. levých cosetů $T \cdot H_{x_0}$.

$$T \cdot H_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ \vec{c}^T & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot F & \vec{b} \\ \vec{c}^T \cdot F & d \end{pmatrix} | F \in SO(n) \right\}.$$

Vidíme, že $\vec{b}$ a d se nemění při výberu reprezentanta, tj. charakterizují coset. Jak můžeme určit $A, \vec{c}$?

Matice A musí splňovat podmínku $A \cdot A^T = \mathbb{I} - \vec{b} \cdot \vec{b}^T$. Ukážeme, že lze požadovat, aby matice A byla lineární kombinací matic $\mathbb{I}$ a $\vec{b} \cdot \vec{b}^T$.

Zvolíme-li $\tilde{A} = \mathbb{I} - \frac{1}{1-d} \vec{b} \cdot \vec{b}^T$, pak snadno ověříme, že $\tilde{A}$ splňuje stejnou podmínku jako A, tj. $\tilde{A} \cdot \tilde{A}^T = \mathbb{I} - \vec{b} \cdot \vec{b}^T$ s využitím $\vec{b}^T \cdot \vec{b} + d^2 = 1$. Matice $A^{-1} \cdot \tilde{A}$ splňuje

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot \tilde{A} \cdot (A^{-1} \cdot \tilde{A})^T = A^{-1} \cdot (\tilde{A} \cdot \tilde{A}^T) \cdot (A^{-1})^T = \\ = A^{-1} \cdot \left(\mathbb{I} - \vec{b} \cdot \vec{b}^T \right) \cdot (A^{-1})^T = \mathbb{I}, \end{aligned}$$

tj. $F = A^{-1} \cdot \tilde{A} \in O(n)$, z výpočtu determinantu $F = A^{-1} \cdot \tilde{A} \in SO(n)$. Tedy vhodným výběrem $F \in SO(n)$ lze vybrat reprezentanta cosetu $T \cdot H_{x_0}$ ve tvaru s $A = \mathbb{I} - \frac{1}{1-d} \vec{b} \cdot \vec{b}^T$.

$\vec{c}$ je pak jednoznačně určené z $A \cdot \vec{c} + d \cdot \vec{b} = \vec{0}$. Snadný výpočet pro zvolenou matici A ukáže, že musí platit $\vec{c} = \vec{b}$.

Shrnutí: podmínka $\vec{b}^T \cdot \vec{b} + d^2 = 1$ určuje body sféry S^n. Následně lze konstrukcí výše jednoznačně určit odpovídajícího reprezentanta, tj. matici T, v uvedeném tvaru plně určeném $\vec{b}$ a d.

Kapitola 4

Reprezentace Lieových grup a algeber, vztah Lieových algeber a jim odpovídajících Lieových grup

V této kapitole nejprve zavádíme důležitý pojem reprezentace Lieovy grupy, resp. Lieovy algebry, a zkoumáme jeho základní vlastnosti. V druhé části pak zkoumáme jednoznačnost ve vztahu mezi Lieovými grupami a algebrami.

4.1 Reprezentace Lieových grup a algeber

Definice 4.1. Reprezentace Lieovy grupy G na vektorovém prostoru V je hladký homomorfismus $\rho : G \to GL(V)$.

V případě $\dim V = +\infty$ většinou uvažujeme reprezentace grupy G na Hilbertově či Banachově prostoru $\mathscr{H}$ pomocí omezených bijektivních operátorů, tj. $\rho : G \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ s požadavkem na omezenost též inverzního operátoru $\rho(g)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Definice 4.2. Reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V je homomorfismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Jinými slovy ρ je lineární a platí $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X)$.

V případě nekonečněrozměrného Hilbertova či Banachova prostoru $V = \mathscr{H}$ je třeba dbát na to, aby $[\rho(X), \rho(Y)]$ byl vhodným způsobem definován (tj. otázka definičních oborů neomezených operátorů).

V případě reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ musí být V vektorovým prostorem nad stejným tělesem jako algebra $\mathfrak{g}$ samotná - může však být současně i vektorovým prostorem nad větším tělesem. Často se setkáváme s komplexními reprezentacemi reálných Lieových algeber. V případě Lieových grup, které z definice uvažujeme jako reálné diferencovatelné variety, požadujeme, aby V byl alespoň reálný vektorový prostor - a to i v případě, že se jedná o komplexní maticovou grupu.

Příklad 4.3. Reprezentace $\mathfrak{so}(3)$ na $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ je definována $\rho(X_i) = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_k \partial_j$.

Poznámka 4.4. Libovolná reprezentace ρ grupy G na vektorovém prostoru V definuje levou akci G na V předpisem

$$\phi_\rho(g, v) = \rho(g)v.$$

Tato akce je navíc **lineární** ve smyslu $\phi_\rho(g, \alpha v + w) = \alpha\phi_\rho(g, v) + \phi_\rho(g, w)$. A naopak, každá lineární levá akce grupy na vektorovém prostoru definuje reprezentaci.

Definice 4.5. Reprezentace ρ grupy G (resp. algebry $\mathfrak{g}$) je **věrná** právě tehdy, když ρ je prosté zobrazení (monomorfismus).

Na základě věrné reprezentace jsme schopni jednoznačně zrekonstruovat grupu G, resp. algebru $\mathfrak{g}$, tj. příslušné grupové násobení či Lieovu závorku, ze znalosti obrazu grupy, resp. algebry, v reprezentaci. Proto nazýváme věrné reprezentace **realizace** dané grupy, resp. algebry. Příkladem jsou $\mathfrak{so}(3)$ jako 3×3 antisymetrické matice nebo vektorová pole z příkladu 4.3.

Definice 4.6. Buď $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ soubor lineárních operátorů na vektorovém prostoru V. Soubor Σ je

- **reducibilní** právě tehdy, když existuje netriviální podprostor $W \neq 0, V$ **invariantní** vzhledem k Σ, tj. $\Sigma W = \mathrm{span}\{Aw | A \in \Sigma, w \in W\} \subset W$,
- **ireducibilní** právě tehdy, když neexistuje žádný netriviální podprostor invariantní vzhledem k Σ,
- **úplně reducibilní** právě tehdy, když ke každému invariantnímu podprostoru W existuje invariantní doplněk, tj. podprostor $\tilde{W}$ splňující $\Sigma\tilde{W} \subset \tilde{W}$ a $W \oplus \tilde{W} = V$.

Reprezentace Lieovy grupy G, resp. Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, je ireducibilní (reducibilní, úplně reducibilní) právě tehdy, když $\rho(G)$, resp. $\rho(\mathfrak{g})$, je ireducibilní (reducibilní, úplně reducibilní) soubor operátorů.

Příklad 4.7. Reprezentace $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$, tzv. **unitární reprezentace**, jsou úplně reducibilní, protože díky unitaritě platí $\rho(G)W \subset W \Rightarrow \rho(G)W^\perp \subset W^\perp$. Na úrovni algeber platí $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}(\mathscr{H})$ neboť pomocí exponenciely získáváme pro $X \in \mathfrak{g}$ vztah

$$\begin{aligned} \rho\big(\mathrm{e}^X\big) = \mathrm{e}^{\rho_*(X)} \quad &\Rightarrow \quad \big(\rho\big(\mathrm{e}^X\big)\big)^\dagger = \rho\big(\mathrm{e}^X\big)^{-1} = \mathrm{e}^{-\rho_*(X)} \\ &\qquad\qquad = \big(\mathrm{e}^{\rho_*(X)}\big)^\dagger = \mathrm{e}^{(\rho_*(X))^\dagger} \\ &\Rightarrow \quad \big(\rho_*(X)\big)^\dagger = -\rho_*(X), \end{aligned}$$

tj. $\rho_*(X)$ jsou antihermitovské matice, $\mathfrak{u}(\mathscr{H}) = \big\{B \in \mathfrak{gl}(\mathscr{H}) \mid B + B^\dagger = 0\big\}$.

Poznámka 4.8. Ve fyzice je zvykem používat hermitovské matice, proto se definují „fyzikální“ prvky reálné Lieovy algebry s dodatečnými imaginárními jednotkami

$$A \mapsto A_\mathrm{F} = -\mathrm{i}A\,. \tag{4.1}$$

A_F již splňují $A_\mathrm{F}^\dagger = A_\mathrm{F}$, ale jejich strukturní konstanty jsou formálně ryze imaginární,

$$[X_j, X_k] = c_{jk}{}^l X_l, \quad g = \exp(X) \quad \Rightarrow \quad [X_{Fj}, X_{Fk}] = -\mathrm{i}c_{jk}{}^l X_{Fl}, \quad g = \exp(\mathrm{i}X_F). \tag{4.2}$$

Výběr znaménka v (4.1) je otázkou konvence, jemu odpovídají znaménka u imaginárních jednotek ve vztazích (4.2).

Věta 4.9 (Schurovo lemma)**.** Buď V komplexní vektorový prostor konečné dimenze a $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ ireducibilní soubor operátorů na V. Potom pro každý operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ komutující se všemi prvky souboru Σ, tj. $[A, \Sigma] = 0$, existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $A = \lambda\mathbb{I}$.

Důkaz. Nechť $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Díky zvolenému tělesu je $\sigma(A) \neq \emptyset$ a tedy existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $W = \ker(A - \lambda\mathbb{I}) \neq \{\vec{0}\}$. Pak pro každé $S \in \Sigma$ platí $(A - \lambda\mathbb{I})SW = S(A - \lambda\mathbb{I})W = 0$, tj. $SW \subset W$, W je nenulový invariantní podprostor. Z ireducibility plyne $W = V$, $A = \lambda\mathbb{I}$. □

Pro úplně reducibilní soubory operátorů lze tvrzení obrátit:

Věta 4.10. Buď V komplexní vektorový prostor konečné dimenze, $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ úplně reducibilní soubor operátorů. Pokud platí pro každý lineární operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ implikace $[A, \Sigma] = 0 \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C} : \ A = \lambda \mathbb{I})$, potom Σ je ireducibilní.

Důkaz. Buď $W \neq \{\vec{0}\}$ invariantní podprostor. Pak existuje podprostor $\widetilde{W}$ invariantní vzhledem k Σ takový, že $V = W \oplus \widetilde{W}$. Definujme A pomocí jeho hodnoty na těchto dvou invariantních podprostorech následovně $A|_W = \mathbb{I}$, $A|_{\widetilde{W}} = 0$, tj. $AW \subset W$, $A\widetilde{W} \subset \widetilde{W}$. Protože evidentně $[A, \Sigma] = 0$, musí dle předpokladu věty existovat $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $A = \lambda \mathbb{I}$ a tedy $\lambda = 1, \widetilde{W} = \{\vec{0}\}, V = W$. □

4.2 Vztah mezi Lieovou algebrou a jí odpovídajícími Lieovými grupami

Nyní se budeme zabývat (ne)jednoznačností ve vztahu mezi Lieovými grupami a Lieovým algebrami. Již víme, že každé Lieově grupě odpovídá jednoznačně určená Lieova algebra. Lze nějakým způsobem popsat množinu všech Lieových grup, jejichž algebry jsou izomorfní, nebo omezením na nějakou vhodnou třídu grup vztah učinit vzájemně jednoznačným?

Připomeňme si, že souvislá varieta M je **jednoduše souvislá** právě tehdy, když všechny uzavřené křivky lze spojitě zdeformovat do bodu, tj. na konstantní zobrazení $S^1 \to x_0 \in M$ (viz definice 2.17).

Definice 4.11. Buďte M, $\overline{M}$ souvislé variety. $\overline{M}$ je **nakrytí** M právě tehdy, když existuje hladké zobrazení $\pi : \overline{M} \to M$ splňující

- $\forall x \in M, \ \exists U = U^\circ \ni x : \ \pi^{(-1)}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha, \ U_\alpha = U_\alpha^\circ \subset \overline{M}, \ U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset, \ \forall \alpha \neq \beta,$
- kde $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ je difeomorfismus pro každé α z indexové množiny $\mathcal{I}$.

Příklad 4.12. $M = S^1, \ \overline{M} = S^1, \ \pi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$. $\overline{M}$ je dvojnásobné nakrytí.
Příklad 4.13. $M = S^1, \ \overline{M} = \mathbb{R}, \ \pi(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. $\overline{M}$ je $\mathbb{Z}$–násobné nakrytí.

Definice 4.14. Nakrytí $\overline{M}$ variety M je **univerzální** právě tehdy, když $\overline{M}$ je jednoduše souvislá.

Věta 4.15. Všechna univerzální nakrytí souvislé variety jsou difeomorfní. Přesněji, pro libovolná dvě univerzální nakrytí $\pi_1 : \overline{M}_1 \to M$ a $\pi_2 : \overline{M}_2 \to M$ souvislé variety M existuje difeomorfismus $\phi : \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ takový, že $\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$.

Bez důkazu.

Jak lze univerzální nakrytí pro konkrétní souvislou varietu M zkonstruovat? Nakrývající varietu konstruujeme jako topologický prostor tříd ekvivalence křivek a následně na něj jednoznačně přeneseme hladkou strukturu. Pro křivky $\gamma : \langle 0, 1\rangle \to M, \ \widetilde{\gamma} : \langle 0, 1\rangle \to M, \ \gamma(1) = \widetilde{\gamma}(0)$ definujeme:

$$\begin{aligned} \gamma \circ \widetilde{\gamma} : \langle 0,1\rangle \to M : \gamma \circ \widetilde{\gamma}(t) &= \gamma(2t) && 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ &= \widetilde{\gamma}(2t-1) && \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ \gamma^{-1}(t) : \langle 0,1\rangle \to M : \gamma^{-1}(t) &= \gamma(1-t) && 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Definujme ekvivalenci

$$\gamma \sim \widetilde{\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(0) = \widetilde{\gamma}(0) \ \wedge \gamma(1) = \widetilde{\gamma}(1) \ \wedge \ \gamma \circ \widetilde{\gamma}^{-1} \text{ lze spojitě deformovat na } \gamma(t) = x_0.$$

Díky hladkosti naší variety M lze pro každou třídu ekvivalence $[\gamma]$ zvolit hladkou křivku jako jejího reprezentanta, např. pomocí interpolace dané spojité křivky pomocí polynomu dostatečně vysokého řádu ve zvolených souřadnicích.

Zvolme $x_0 \in M$ fixní, pak každý bod $x \in M$ lze spojit s x_0 hladkou křivkou díky souvislosti M. Definujme $\overline{M} = \{[\gamma] \mid \gamma : \langle 0,1\rangle \to M,\ \gamma(0) = x_0\}$. Uvažujme jednoduše souvislé otevřené okolí U_x bodu $x \in M$. Pro každé $y \in U_x$ existuje křivka

$$\gamma_{xy} : \langle 0,1\rangle \to U_x :\ \gamma_{xy}(0) = x,\ \gamma_{xy}(1) = y.$$

Všechny takové γ_{xy} spojující x a y uvnitř jednoduše souvislého okolí jsou ekvivalentní. Definujme $\overline{U} \subset \overline{M}$ okolí $[\gamma] \in \overline{M}$, $\gamma(1) = x$ předpisem $\overline{U} = \{[\gamma \circ \gamma_{xy}] \mid y \in U_x\}$. Platí tedy $\gamma \circ \gamma_{xy}(0) = x_0,\ \gamma \circ \gamma_{xy}(1) = y$. Zavedeme-li zobrazení $\pi([\gamma]) = \gamma(1) \in M$, pak takto definované $\overline{U}$ je homeomorfní U_x.

Hladkou strukturu definujeme tím, že postulujeme π jako hladké zobrazení, tj. pomocí $\left(\pi|_{\overline{U}}\right)^{-1}$ přeneseme hladkou strukturu a následně ukážeme, že tímto způsobem lze konsistentně definovat hladkou strukturu na $\overline{M}$. O $\overline{M}$ pak lze dokázat, že je jednoduše souvislá.

Je-li G souvislá Lieova grupa, pak na $\overline{G}$ můžeme definovat strukturu Lieovy grupy. Buď $x_0 \equiv e$ a pro libovolný $g \in G$ značíme $\gamma_g : \langle 0,1\rangle \to G,\ \gamma_g(0) = e,\ \gamma_g(1) = g$. Definujeme

- $[\gamma_g] \cdot [\gamma_h] \equiv [\gamma_g \circ L_g(\gamma_h)]$, kde $L_g(\gamma_h)(t) = g \cdot \gamma_h(t),\ \forall t \in \langle 0,1\rangle$,
- $\overline{e} = [\gamma_e]$, kde $\gamma_e(t) = e,\ \forall t \in \langle 0,1\rangle$,
- $[\gamma_g]^{-1} = \left[L_{g^{-1}}\left(\gamma_g^{-1}\right)\right]$.

Z konstrukce grupového násobení vyplývá $\pi\left([\gamma_g] \cdot [\gamma_h]\right) = g \cdot h$, tj. π je homomorfismus grup. Protože okolí grupových jednotek jsou difeomorfní okolí z definice nakrytí, platí $\mathfrak{g} \simeq \overline{\mathfrak{g}}$.

Věta 4.16 (Ado)**.** Pro libovolnou konečněrozměrnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje její věrná konečněrozměrná reprezentace $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, tj. $\mathfrak{g} \simeq \rho(\mathfrak{g}) \subset\subset \mathfrak{gl}(V)$.

Bez důkazu.

Důsledek 4.17. Ke každé Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje jí odpovídající souvislá maticová Lieova grupa $G \subset\subset GL(V)$. Dále ke G můžeme najít jednoduše souvislé nakrytí $\overline{G}$, které ale již nemusí ležet uvnitř $GL(V)$.

Věta 4.18. Ke každé konečněrozměrné Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje právě jedna souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa G taková, že $\mathfrak{g}$ je její Lieova algebra. Všechny ostatní souvislé Lieovy grupy s touto Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$ jsou nakrývány G a mohou být proto zapsány jako G/D, kde D je diskrétní normální podgrupa.

Důkaz. Tvrzení věty vyplývá z existence jednoznačně určeného univerzálního nakrytí, dále z toho, že na něm lze zkonstruovat odpovídající hladké grupové násobení a z toho, že lze zkonstruovat izomorfismus libovolných dvou jednoduše souvislých Lieových grup s izomorfními Lieovými algebrami pomocí izomorfismu algeber a zobrazení exp. Podgrupa D je vzorem grupové jednotky $e \in G/D$ při projekci π, její normálnost vyplývá z toho, že je jádrem homomorfismu π, tj. $D = \ker \pi$. Diskrétnost vyplývá z definice nakrytí.

Poznámka 4.19. To, že D je normální podgrupa, znamená $gDg^{-1} = D$ pro všechna $g \in G$. Pro pevně zvolené $d_0 \in D$ definujme $\phi : G \to D \subset G : \phi(g) = gd_0g^{-1} \in D$. Protože G je souvislá a ϕ hladké, je též $\phi(G)$ souvislá. Současně D je diskrétní podmnožina G, tudíž jediné její souvislé podmnožiny jsou jednotlivé body. Proto pro každé $g \in G$ platí $\phi(g) = d_0$, tedy $gd_0 = d_0g$. Což znamená, že $D \subset \mathcal{Z}(G) = \{h \in G \mid hg = gh,\ \forall g \in G\}$, tj. D musí být abelovská podgrupa obsažená v centru grupy G.

Poznámka 4.20. Buď ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na V, $\dim V < +\infty$. Pak ρ je reprezentace jednoduše souvislé grupy G. Uvažujme G/D dle předpokladů výše. Pokud $\rho(D) \neq \{\mathbb{I}\}$, pak nelze definovat reprezentaci $\rho : G/D \to GL(V)$, ale pouze reprezentaci modulo $\rho(D)$, tj. jeden prvek grupy je reprezentován třídou lineárních operátorů modulo $\rho(D)$. Takovým zobrazením říkáme **víceznačná reprezentace** a setkáváme se s nimi například v kvantové mechanice. V ní je jejich využití koneckonců přirozené, neboť fyzikální stav je určen jednorozměrným podprostorem, nikoliv konkrétním stavovým vektorem z tohoto podprostoru. Tudíž je-li $\rho(D) \subset \mathrm{span}\{\mathbb{I}\}$, je pro kvantověmechanické úvahy víceznačná reprezentace ρ plně akceptovatelná.

Poznámka 4.21. Výše uvedené věty řeší otázku nalezení všech souvislých Lieových grup G se stejnou Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$, resp. převádí ji na otázku klasifikace diskrétních normálních podgrup souvislé a jednoduše souvislé Lieovy grupy G.

4.3 Cvičení

Cvičení 4.1. Ukažte, že ve vhodných bazích jsou strukturní konstanty algeber $\mathfrak{so}(3)$ a $\mathfrak{su}(2)$ totožné, tj. jedná se o izomorfní algebry.

Řešení. V $\mathfrak{so}(3)$ je vhodnou bazí

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

s Lieovými závorkami $[E_j, E_k] = \epsilon_{jkl}E_l$, v $\mathfrak{su}(2)$ je odpovídající báze tvořena

$$e_j = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_j, \tag{4.3}$$

kde σ_j jsou Pauliho matice,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4.2. Ukažte, že pro Lieovu algebru $\mathfrak{su}(2)$ existují právě dvě souvislé Lieovy grupy $SU(2)$ a $SO(3) = SU(2)/_{\{\mathbb{I},-\mathbb{I}\}}$ tím, že zdůvodníte jednoduchou souvislost $SU(2)$ a explicně zkonstruujete nakrývající zobrazení $\pi : SU(2) \to SO(3)$.

Řešení. Nejprve ukážeme strukturu grupy $SU(2)$. Z podmínek

$$UU^\dagger = \mathbb{I}, \qquad \det U = 1$$

snadno zjistíme, že obecná unitární matice s jednotkovým determinantem má tvar

$$U = \begin{pmatrix} a_1 + \mathrm{i}a_2 & -b_1 + \mathrm{i}b_2 \\ b_1 + \mathrm{i}b_2 & a_1 - \mathrm{i}a_2 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$

tudíž geometricky je grupa $SU(2)$ třírozměrnou sférou,

$$SU(2) \simeq S^3 = \{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 | a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1\}.$$

Proto je souvislá i jednoduše souvislá.

Dále definujeme reprezentaci ρ grupy $SU(2)$ na $\mathbb{R}^3$ využitím bijektivní izometrie

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2) : T(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{e} = \sum_{j=1}^{3} x_j e_j,$$

kde e_j jsou matice (4.3) a na $\mathfrak{su}(2)$ uvažujeme skalární součin $\langle X, Y \rangle = -2\mathrm{tr}(X \cdot Y)$, vzhledem k němuž je báze (4.3) ortonormální. Reprezentace ρ je pak definována

$$T(\rho(U)\vec{x}) = U \cdot T(\vec{x}) \cdot U^\dagger. \tag{4.4}$$

Snadno vidíme z definice (4.4), že

$$T(\rho(U_1)\rho(U_2)\vec{x}) = T(\rho(U_1 U_2)\vec{x}),$$

tj. z bijektivity T je ρ reprezentace, a

$$\langle T(\rho(U)\vec{x}), T(\rho(U)\vec{y}) \rangle = \langle T(\vec{x}), T(\vec{y}) \rangle,$$

tj. $\rho(U) \in O(3)$. Ze spojitosti ρ a souvislosti $SU(2)$ je $\rho(U) \in SO(3)$. Zbývá ukázat, že

$$\ker \rho = \{U \in SU(2) | \rho(U) = \mathbb{I}\} = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$$

což je zřejmé z přímého výpočtu a že ρ je surjektivní. To je vidět z toho, že každá rotace $S \in SO(3)$ je rotací o jistý úhel φ kolem osy $\vec{n}$ a lze ji tudíž vyjádřit ve tvaru

$$R = \exp\left(\varphi \sum_{j=1}^{3} n_j E_j\right).$$

Odpovídající unitární matici můžeme zkonstruovat předpisem

$$U = \exp\left(\varphi \sum_{j=1}^{3} n_j e_j\right) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi \sum_{j=1}^{3} n_j \sigma_j\right),$$

který je důsledkem přímým výpočtem snadno ověřitelného vztahu $\rho_*|_{\mathbb{I}}(e_j) = E_j$, tj. $\rho_*|_{\mathbb{I}} : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ je příslušný izomorfismus Lieových algeber ze cvičení 4.1, a výsledku cvičení 3.2. Explicitně si to snadno ověříme např. pro $\vec{n} = (1, 0, 0)$:

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad U_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2}) & -\mathrm{i}\sin(\frac{\varphi}{2}) \\ -\mathrm{i}\sin(\frac{\varphi}{2}) & \cos(\frac{\varphi}{2}). \end{pmatrix}$$

Za povšimnutí stojí, že $U_1(2\pi) = -\mathbb{I}$, zatímco $R_1(2\pi) = \mathbb{I}$.

Kapitola 5

Lieovy algebry - základní pojmy

Nadále se budeme zabývat strukturou Lieových algeber, bez ohledu na jim odpovídající Lieovu grupu/grupy. Není-li výslovně uvedeno jinak, předpokládáme, že má zkoumaná algebra konečnou dimenzi. Uvažujeme Lieovy algebry nad tělesy reálných a komplexních čísel. V této kapitole si zavedeme základní názvosloví.

Definice 5.1. Podalgebra $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je vektorový podprostor v $\mathfrak{g}$ splňující $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Poznámka 5.2. Pro podprostory $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ značíme $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] = \mathrm{span}\{[X,Y]|X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}\}$. Bez užití lineárního obalu by výsledná množina obecně nebyla podprostorem.

Příklad 5.3. V Lorentzově algebře generátory vlastních Lorentzových transformací (tzv. boostů) K_i komutují na rotace, $[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijl}L_l$, tedy netvoří podalgebru. Generátory rotací L_i podalgebru tvoří, neboť $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k$.

Definice 5.4. Podprostor $\mathfrak{h}$ v $\mathfrak{g}$ je **ideál** právě tehdy, když $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Příklad 5.5. V Poincaréově (či nehomogenní Lorentzově) algebře tvořené generátory Lorentzovy algebry a generátory translací P^α platí $[M^{\mu\nu}, P^\alpha] \sim P^\xi$ a $[P^\alpha, P^\beta] = 0$, tedy translace tvoří abelovský ideál.

Definice 5.6. Faktoralgebra podle ideálu $\mathfrak{h}$ je $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{x + \mathfrak{h}|x \in \mathfrak{g}\}$ s Lieovou závorkou

$$[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] \equiv [X, Y] + \mathfrak{h}.$$

Cvičení 5.1. Ukažte, že výše zavedená operace konzistentně definuje Lieovu závorku na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

5.1 Speciální třídy Lieových algeber

Definice 5.7. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je

- **abelovská** právě tehdy, když $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \{0\}$,
- **prostá** právě tehdy, když $\dim \mathfrak{g} > 1$ a jediné ideály v $\mathfrak{g}$ jsou $\{0\}$ a $\mathfrak{g}$,
- **poloprostá** právě tehdy, když její jediný abelovský ideál je $\{0\}$.

U výše uvedených pojmů obvykle předpokládáme $\mathfrak{g} \neq \{0\}$.

Definice 5.8. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je **direktním součtem** ideálů $\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2$ pokud $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako vektorové podprostory a současně $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1,\ [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \subset \mathfrak{g}_2,\ [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \{0\}$.

Poznámka 5.9. Nadále budeme pro odlišení direktní součet vektorových prostorů značit $V = V_1 \dot{+} V_2$.

Definice 5.10. Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ nazveme **rozložitelná**, pokud existují nenulové ideály $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ takové, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Jinak je $\mathfrak{g}$ **nerozložitelná**.

Příklad 5.11.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n) &= \mathfrak{a}(1) \oplus \mathfrak{sl}(n), \quad \text{kde } \mathfrak{a}(1) = \operatorname{span}\{\mathbb{I}\},\\
\mathfrak{u}(n) &= \mathfrak{a}(1) \oplus \mathfrak{su}(n), \quad \text{kde } \mathfrak{a}(1) = \mathbb{R}\text{–span}\{\mathrm{i}\mathbb{I}\},\\
\mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3).
\end{aligned}$$

Definice 5.12. Centrum Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je maximální ideál ζ^1 s vlastností $[\mathfrak{g}, \zeta^1] = 0$, tj. $\zeta^1 = \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{g}] = 0\}$. Značíme $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \zeta(\mathfrak{g}) = \zeta^1(\mathfrak{g}) = \zeta^1$.

Definice 5.13. Definujeme následující tři charakteristické série ideálů v $\mathfrak{g}$:

- **derivovaná série**: $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}],\ \forall k \in \mathbb{N}$. Pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$, algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá **řešitelná**.
- **dolní centrální série**: $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}],\ \forall k > 1$. Pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathfrak{g}^n = \{0\}$, algebra $\mathfrak{g}$ se nazývá **nilpotentní**.
- **horní centrální série**: $\zeta^1 = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\ \zeta^k = \{X \in \mathfrak{g} | [X, \mathfrak{g}] \subset \zeta^{k-1}\} \supset \zeta^{k-1},\ \forall k > 1$.

To, že se skutečně jedná o ideály, vyplývá z Jacobiho identity a je přenecháno čtenáři jako cvičení.

Poznámka 5.14. Z definice vyplývá, že $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$, tj. každá nilpotentní algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Věta 5.15. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy, když $\lim_{k\to+\infty} \zeta^k = \mathfrak{g}$.

Limita je ryze formální, znamená existenci přirozeného čísla K takového, že

$$\zeta^K = \zeta^{K+j} = \mathfrak{g}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Ukážeme oba směry implikace:

$\Rightarrow$: nechť $\mathfrak{g}$ je nilpotentní, tj. existuje $k \leq \dim \mathfrak{g} + 1,\ \mathfrak{g}^k = 0$ a v důsledku $\mathfrak{g}^{k-1} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \zeta^1$. Indukcí ukážeme, že platí $\mathfrak{g}^{k-j} \subset \zeta^j$. Pro $j = 1$ zřejmé, $j \to j + 1$:

$$\left[\mathfrak{g}^{k-j-1}, \mathfrak{g}\right] = \mathfrak{g}^{k-j} \subset \zeta^j,\ \text{tj. } \mathfrak{g}^{k-j-1} \subset \zeta^{j+1}.$$

Pro $j = k - 2$ tedy máme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \subset \zeta^{k-1}$.

$\Leftarrow$: Naopak, nechť existuje k takové, že $\zeta^k = \mathfrak{g}$. Indukcí ukážeme, že platí $\zeta^{k-j+1} \supset \mathfrak{g}^j$. Pro $j = 1$ zřejmé, indukční krok $j - 1 \to j$:

$$\mathfrak{g}^{j-1} \subset \zeta^{k-j+2} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}^j = \left[\mathfrak{g}^{j-1}, \mathfrak{g}\right] \subset \left[\zeta^{k-j+2}, \mathfrak{g}\right] = \zeta^{k-j+1}.$$

V důsledku vidíme, že $\mathfrak{g}^k \subset \zeta^1 = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ a tedy $\mathfrak{g}^{k+1} = 0$.

□

Příklad 5.16. Heisenbergova algebra $\mathfrak{h}(n) = \mathrm{span}\{X_i, P_i, \mathbb{I}\}$ s Lieovými závorkami

$$[X_i, P_j] = \delta_{ij}\mathbb{I},\ i,j \in \hat{n}, \qquad [\mathfrak{h}(n), \mathbb{I}] = 0$$

je nilpotentní, neboť $(\mathfrak{h}(n))^2 = \mathrm{span}\{\mathbb{I}\}$, a tudíž $(\mathfrak{h}(n))^3 = 0$.

Poznámka 5.17. Používáme následující konvenci: pokud Lieovy závorky nejsou uvedeny explicitně a nevyplývaji z antisymetrie, tak jsou automaticky považovány za rovné nule.

Příklad 5.18. Striktně horní trojúhelníkové matice $\mathfrak{tr}_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & ? \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} \right\}$ jsou nilpotentní.

Příklad 5.19. Horní trojúhelníkové matice $\mathfrak{tr}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} ? & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & ? \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} \right\}$. Ze snadno ověřitelných vztahů

$$[\mathfrak{tr}(n), \mathfrak{tr}(n)] = \mathfrak{tr}_0(n), \quad [\mathfrak{tr}(n), \mathfrak{tr}_0(n)] = \mathfrak{tr}_0(n)$$

plyne, že algebra $\mathfrak{tr}(n)$ je řešitelná, ale není nilpotentní.

Řešitelné či nilpotentní mohou být i ideály v dané Lieově algebře (tj. v konstrukci sérií uvažujeme pouze prvky z uvažovaného ideálu). Jako cvičení ukážeme, že součet a průnik řešitelných ideálů je řešitelný ideál, součet a průnik nilpotentních ideálů je nilpotentní ideál. Z konečnosti dimenze Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ pak vyplývá existence maximálního řešitelného, resp. nilpotentního, ideálu.

Definice 5.20. Maximální řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$ se nazývá **radikál** a maximální nilpotentní ideál se nazývá **nilradikál**.

Poznámka 5.21. Nechť $\mathfrak{r}$ je radikál algebry $\mathfrak{g}$. Uvažujme $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ a v ní abelovský ideál $\mathfrak{h}/\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, tj. máme ideál $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | X + \mathfrak{r} \in \mathfrak{h}/\mathfrak{r}\}$ takový, že $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{r}$. Tudíž $\mathfrak{h}^{(1)} \subset \mathfrak{r}$ a současně $\mathfrak{r}$ je řešitelná, tj. existuje k takové, že $\mathfrak{r}^{(k)} = 0$. V důsledku máme $\mathfrak{h}^{(k+1)} \subset \mathfrak{r}^{(k)} = 0$ a dle předpokladu maximality radikálu $\mathfrak{r}$ je $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}$. Proto $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ nemá žádný netriviální abelovský ideál a je tedy poloprostá.

Platí dokonce ještě silnější tvrzení tvrdící, že $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ lze realizovat jako podalgebru v $\mathfrak{g}$:

Věta 5.22 (Leviho)**.** Každou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ lze rozložit na polopřímý součet poloprosté podalgebry $\mathfrak{s}$ a radikálu $\mathfrak{r}$, tj.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{r},\ [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s},\ [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r},\ [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r},$$

přičemž $\mathfrak{s}$ je určena až na izomorfii. $\mathfrak{s}$ nebo $\mathfrak{r}$ může být rovné $\{0\}$.

Bez důkazu.

5.2 Derivace

Definice 5.23. Derivace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je lineární zobrazení $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ splňující $D([X, Y]) = [DX, Y] + [X, DY]$ pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definice 5.24. Buď G Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra.

- **Adjungovaná akce** Lieovy grupy G na G je $\phi : G \times G \to G$ definovaná předpisem

$$\phi(g, h) \equiv \phi_g(h) = ghg^{-1},\ \text{tj. } \phi_g = L_g \circ R_{g^{-1}},$$

- **adjungovaná reprezentace Lieovy grupy** G na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ je

$$Ad : G \to GL(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{Ad}(g) = \phi_{g*} = L_{g*} \circ R_{g^{-1}*},$$

- **adjungovaná reprezentace Lieovy algebry** $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$ je

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{ad}_X \equiv \mathrm{ad}(X) = \mathrm{Ad}_*(X), \text{ tj. } \mathrm{ad}_X Y = \mathrm{Ad}_*(X)Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})Y.$$

Ověření, že se skutečně jedná o akci, resp. reprezentace, je přenecháno jako cvičení čtenáři.

Poznámka 5.25. Adjungovanou reprezentaci lze ekvivalentně zavést požadavkem $g\mathrm{e}^X g^{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{Ad}(g)X}$. Pro maticové grupy lze $\mathrm{Ad}(g)X$ počítat jednoduše vztahem

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}.$$

Podobně se zjednoduší výpočet adjungované reprezentace algebry.

Věta 5.26. Pro adjungovanou reprezentaci Lieovy algebry platí

$$\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]. \tag{5.1}$$

Důkaz. Pro každé $X \in \mathfrak{g}$, $p \in G$ a $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ máme

$$X(f)(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (f \circ \Psi_X^s)(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} f(p\mathrm{e}^{sX})$$

a zároveň platí $\mathrm{e}^{\phi_*(X)} = \phi\left(\mathrm{e}^X\right)$ pro libovolný homomorfismus ϕ, tj. i konkrétně pro ϕ_g definovaný adjungovanou akcí G na G. Z definice adjungované reprezentace Lieovy algebry máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_X(Y)f|_p &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}}(Y)f|_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\phi_{\mathrm{e}^{tX}})_*(Y)f|_p = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ R_{\exp(s(\phi_{\mathrm{e}^{tX}})_*(Y))}\big|_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(p\mathrm{e}^{s(\phi_{\mathrm{e}^{tX}})_*(Y)}\right) = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(p\phi_{\mathrm{e}^{tX}}\left(\mathrm{e}^{sY}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \underbrace{f\left(p\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sY}\mathrm{e}^{-tX}\right)}_{=F(t,s,-t)} = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F(t,s,0) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F(0,s,t) = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(f\left(p\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sY}\right) - f\left(p\mathrm{e}^{sY}\mathrm{e}^{tX}\right)\right) = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} Yf(p\mathrm{e}^{tX}) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} Xf(p\mathrm{e}^{sY}) = X(Yf)(p) - Y(Xf)(p) = [X,Y]f(p)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$ □

Poznámka 5.27. Pro matice je rovnice (5.1) vidět ihned: $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{tX}Y\mathrm{e}^{-tX} = XY - YX = [X, Y]$.

Poznámka 5.28. Vzhledem k větě (5.26) lze adjungovanou reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ definovat rovnicí (5.1) bez ohledu na to, zda uvažujeme odpovídající Lieovu grupu G nebo nikoliv.

Důsledek 5.29. Díky Jacobiho identitě je ad_X derivace.

Definice 5.30. Derivace D je **vnitřní** právě tehdy, když existuje $X \in \mathfrak{g}$ takové, že $D = \mathrm{ad}_X$. Všechny ostatní derivace se nazývají **vnější**.

5.3 Vztah reálných a komplexních algeber

Definice 5.31. Pro reálnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje jediná komplexní Lieova algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, nazývaná **komplexifikace** $\mathfrak{g}$, kterou definujeme jako $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + \mathrm{i}\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$, tj.

$$\begin{aligned}
[X + \mathrm{i}Y, U + \mathrm{i}V] &= ([X,U] - [Y,V]) + \mathrm{i}([Y,U] + [X,V]), \qquad X,Y,U,V \in \mathfrak{g}, \\
(\alpha + \mathrm{i}\beta) \cdot (U + \mathrm{i}V) &= (\alpha U - \beta V) + \mathrm{i}(\beta U + \alpha V), \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}, U, V \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

Naopak, pro každou komplexní Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ můžeme jednoznačně zkonstruovat reálnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ pomocí doplnění libovolné báze $(X_j)_{j=1}^n \subset \mathfrak{g}$ na $\mathbb{R}$–span$\{X_j,\ \mathrm{i}X_j\}_{j=1}^n$. Strukturní konstanty jsou pak reálné a komplexní části původních.

Platí $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ a $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$.

Definice 5.32. Reálná forma komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná reálná Lieova algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ splňující $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$.

Příklad 5.33. Reálné algebry $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ jsou dvě různé reálné formy stejné komplexní algebry $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$. Podobně $\mathfrak{so}(1,3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(4,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$.

5.4 Zobrazení Lieových algeber

Definice 5.34. Pro lineární zobrazení $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lieových algeber nad stejným tělesem zavádíme označení:

- ϕ je **homomorfismus** právě tehdy, když $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X,Y])$ platí pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$,
- homomorfismus ϕ je **endomorfismus** právě tehdy, když $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$,
- homomorfismus ϕ je **izomorfismus** právě tehdy, když $\ker \phi = \{0\},\ \phi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$,
- izomorfismus ϕ je **automorfismus** právě tehdy, když je současně endomorfismus.

Příklad 5.35. Pro libovolné $g \in G$ je $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ automorfismus. Zobrazení $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je homomorfismus. Ale pro $X \in \mathfrak{g}$ zobrazení $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ obecně není homomorfismus, protože $\mathrm{ad}_X[Y,Z] = [\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}_X Z] \neq [\mathrm{ad}_X Y, \mathrm{ad}_X Z]$.

5.5 Cvičení

Cvičení 5.2. Nalezněte všechny neizomorfní reálné Lieovy algebry v dimenzích $1, 2$ a 3.

Řešení. V dimenzi 1 je úloha jednoduchá, z antisymetrie je jediná Lieova algebra abelovská,

$$\mathfrak{a}_1 = \operatorname{span}\{e_1\}, \qquad [e_1, e_1] = 0.$$

Nulové Lieovy závorky nadále nebudeme uvádět.

V dimenzi 2 máme z antisymetrie jedinou netriviální Lieovu závorku $[e_1, e_2]$. Pokud je nulová, tj, $\mathfrak{g}^2 = 0$, máme abelovskou Lieovu algebru $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$. Pokud $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, zvolíme bázi tak, aby $\mathfrak{g}^2 = \operatorname{span}\{e_1\}$. Pak musí existovat $e_2 \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}^2$ takové, že $[e_1, e_2] = \alpha e_1$, $\alpha \neq 0$ a vhodným výběrem násobku e_2 máme algebru $\mathfrak{af}(1)$ ve tvaru

$$\mathfrak{af}(1) = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}, \quad [e_1, e_2] = e_1.$$

Tato algebra je řešitelná, není nilpotentní.

V dimenzi 3 obdobně postupujeme podle $\dim \mathfrak{g}^2$. Máme

- $\dim \mathfrak{g}^2 = 0$: $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$.
- $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$: Jsou dvě možnosti
  - $\mathfrak{g}^2 \subset \zeta^1$, pak $\mathfrak{g}^2 = \operatorname{span}\{e_1\}$, $[e_1, \mathfrak{g}] = 0$, tudíž vhodným výběrem báze máme nilpotentní Heisenbergovu algebru ve tvaru
    $$\mathfrak{h}_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}, \qquad [e_2, e_3] = e_1.$$
  - $\mathfrak{g}^2 \not\subset \zeta^1$, pak $\mathfrak{g}^2 = \operatorname{span}\{e_1\}$, $[e_1, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^2$. Pak existuje $e_2 \in \mathfrak{g}\backslash\mathfrak{g}^2$ takové, že $[e_1, e_2] = e_1$. $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ je zjevně ideál a doplňkový lineárně nezávislý vektor e_3 lze vhodným odečtením násobků e_1 a e_2 vybrat tak, že $[e_3, e_1] = [e_3, e_2] = 0$. Nacházíme tudíž algebru $\mathfrak{af}(1) \oplus \mathfrak{a}_1$.
- $\dim \mathfrak{g}^2 = 2$: Máme dvě možnosti pro strukturu $\mathfrak{g}^2 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$:
  - $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{a}_2$. Pak je algebra $\mathfrak{g}$ plně určena regulární maticí $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, kde
    $$[e_1, e_3] = a_{11}e_1 + a_{12}e_2,$$
    $$[e_2, e_3] = a_{21}e_1 + a_{22}e_2.$$
    Změnou báze e_1, e_2 lze matici A převést na libovolnou matici s ní konjugovanou, dále můžeme vybrat vhodný násobek e_3, čemuž odpovídá přenásobení A nenulovým číslem. Celkem máme tři kanonické tvary pro matici A: diagonalizovatelná, Jordanův tvar a reálná matice diagonalizovatelná pouze nad $\mathbb{C}$, což po vhodném přenásobení dává
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix},$$

a jim odpovídající algebry. Pokud zohledníme všechny výše uvedené transformace měnící zvolenou bázi, máme možnosti

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{3,\lambda} &: [e_1,e_3]=e_1, && [e_2,e_3]=\lambda e_2, && 0<|\lambda|\le 1,\\
& && && \text{pokud } |\lambda|=1 : \arg\lambda \le \pi,\\
\mathfrak{g}_{3,\text{Jordan}} &: [e_1,e_3]=e_1, && [e_2,e_3]=e_1+e_2, &&\\
\mathfrak{g}_{3,p} &: [e_1,e_3]=pe_1-e_2, && [e_2,e_3]=e_1+pe_2, && p\ge 0, \text{ pouze nad } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Všechny tyto algebry jsou řešitelné, ale nikoliv nilpotentní.

– $\mathfrak{g}^2=\mathfrak{af}(1)$ implikuje spor s Jacobiho identitou, tj. tomuto případu žádná algebra neodpovídá.

- $\dim\mathfrak{g}^2=3$: Je výhodné Lieovy závorky ve zvolené bázi (e_j) zapsat způsobem

$$[e_j,e_k]=\epsilon_{jkl}\alpha_{lm}e_m.$$

Jacobiho identity implikují, že matice $\alpha=(\alpha_{jk})$ je symetrická a z $\dim\mathfrak{g}^2=3$ je nutně regulární. Při změně báze $\tilde{e}_a=\rho^k_a e_k$ máme

$$[\tilde{e}_a,\tilde{e}_b]=\det\rho\cdot\epsilon_{abc}(\rho^{-1})^c_l\alpha_{lm}(\rho^{-1})^d_m\tilde{e}_d\equiv\epsilon_{abc}\tilde{\alpha}_{cd}\tilde{e}_d,$$

tj. za předpokladu $\det\rho=1$ máme transformaci složek symetrické bilineární formy $\tilde{\alpha}=(\rho^{-1})^T\cdot\alpha\cdot\rho^{-1}$. Celkový násobek matice α můžeme ovšem vybrat další transformací $\tilde{e}_j=\gamma e_j$. Tudíž α lze vždy převést na kanonický tvar symetrické nedegenerované bilineární formy nad zvoleným tělesem s tím, že celkové znaménko je irelevantní. Nad tělesem komplexních čísel získáváme jedinou algebru

$$so(3,\mathbb{C}):\quad [e_j,e_k]=\epsilon_{jkl}e_l,$$

nad reálnými čísly musíme rozlišit dvě možné relevantní signatury $(3,0,0)$ a $(2,1,0)$, což vede kromě $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ na druhou možnost

$$\mathfrak{so}(2,1):\quad [e_1,e_2]=-e_3,\quad [e_2,e_3]=e_1,\quad [e_3,e_1]=e_2.$$

Tato algebra je současně izomorfní algebře $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, jak lze ukázat jiným výběrem báze, v níž mají Lieovy závorky tvar

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})=\text{span}\{h,x_+,x_-\}:\quad [h,x_\pm]=\pm 2x_\pm,\quad [x_+,x_-]=h.$$

odpovídající maticím $h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $x_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $x_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

Cvičení 5.3. Buďte $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ ideály v $\mathfrak{g}$. Pak $[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2],\ \mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2$ jsou ideály v $\mathfrak{g}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
&[[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2],\mathfrak{g}]=[\mathfrak{h}_1,[\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g}]]+[[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{g}],\mathfrak{h}_2]\subset[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2],\\
&[\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g}]=[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{g}]+[\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2,\\
&[\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}_1\quad\wedge\quad[\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}_2\quad\Rightarrow\quad[\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 5.36. Je-li $\mathfrak{h}$ ideál v $\mathfrak{g}$, pak $\mathfrak{h}^k, \mathfrak{h}^{(k)}$ jsou ideály v $\mathfrak{g}$.

Cvičení 5.4. Jsou-li $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ řešitelné ideály v $\mathfrak{g}$, pak $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ je řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$.

Důkaz. Z vlastností podprostorů a z toho, že $\mathfrak{h}_1,\ \mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2$ jsou ideály v $\mathfrak{g}$ máme izomorfismus faktoralgeber

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$$

Protože $\mathfrak{h}_2$ je řešitelný, je též $\mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$ řešitelný a z izomorfismu výše je $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1$ řešitelný. Protože $\mathfrak{h}_1$ je řešitelný, je i $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ je řešitelný. □

Cvičení 5.5. Buďte $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ nilpotentní ideály v $\mathfrak{g}$. Pak $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ je nilpotentní ideál.

Důkaz. Chceme ukázat, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2$ platí $[X_1, [X_2, \ldots, [X_{n-1}, X_n]]] = 0$. Z linearity Lieovy závorky pak bude plynout dokazovaná nilpotentnost.
Víme, že $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ jsou nilpotentní právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{N},\ \mathfrak{h}_1^k = 0,\ \mathfrak{h}_2^k = 0$. Vezmeme $n = 2k$ a bez újmy na obecnosti předpokládáme, že alespoň k z $X_1, \ldots, X_n$ je z $\mathfrak{h}_1$. Pak platí

$$X \in \mathfrak{h}_1^j,\ Y \in \mathfrak{h}_1 \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in \mathfrak{h}_1^{j+1}, \qquad X \in \mathfrak{h}_1^j,\ Y \in \mathfrak{h}_2 \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in \mathfrak{h}_1^j.$$

Celkem tedy vidíme, že $[X_1, [X_2, \ldots, [X_{n-1}, X_n]]] \in \mathfrak{h}_1^k = \{0\}$. □

Kapitola 6

Killingova forma, vlastnosti řešitelných a nilpotentních algeber

Na Lieových algebrách existuje význačná bilineární forma zvaná Killingova, která je velmi užitečná při jejich zkoumání. Po jejím zavedení se budeme hlouběji zabývat vlastnostmi řečitelných a nilpotentních algeber.

6.1 Killingova forma

Definice 6.1. Symetrická bilineární forma ω na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ je:

- **invariantní vzhledem k automorfismům** $\mathfrak{g}$ právě tehdy, když

$$\omega(\phi(X), \phi(Y)) = \omega(X, Y) \text{ pro každý automorfismus } \phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), \tag{6.1}$$

- ad–**invariantní (invariantní)** právě tehdy, když

$$\omega([X, Y], Z) + \omega(Y, [X, Z]) = 0 \text{ pro každou trojici } X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \tag{6.2}$$

Poznámka 6.2. Je-li forma ω invariantní vzhledem k automorfismům, pak pro všechna $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ platí

$$\begin{aligned} &\omega\left(\mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}} Y, \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{tX}} Z\right) = \omega(Y, Z) \quad \Big/ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &\omega\left(\mathrm{ad}_X Y, Z\right) + \omega\left(Y, \mathrm{ad}_X Z\right) = 0, \end{aligned}$$

tedy ω je ad–invariantní.

Naopak to neplatí. Například uvažme symetrické formy na abelovské Lieově algebře - všechny jsou ad–invariantní, ale jedině nulová forma je invariantní vzhledem k automorfismům, tj. všem lineárním regulárním operátorům.

Definice 6.3. Killingova forma Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení

$$K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{T} : K(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y). \tag{6.3}$$

Uvažme ϕ automorfismus, $X \in \mathfrak{g}$ a $\mathrm{ad}_{\phi(X)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Pak platí

$$\mathrm{ad}_{\phi(X)}Y = [\phi(X), Y] = \left[\phi(X), \phi\left(\phi^{-1}(Y)\right)\right] = \phi\left(\left[X, \phi^{-1}(Y)\right]\right) = \left(\phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}\right)(Y),$$

tedy $\mathrm{ad}_{\phi(X)} = \phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}$. Pro Killingovu formu tedy platí

$$K\left(\phi(X), \phi(Y)\right) = \mathrm{tr}\left(\phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \mathrm{ad}_Y \circ \phi^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y\right) = K(X, Y), \quad (6.4)$$

tj. je invariantní vzhledem k automorfismům (a tedy je též ad–invariantní).

Explicitně lze ukázat, že K je ad–invariantní následovně

$$\begin{aligned} K\left([X, Y], Z\right) + K\left(Y, [X, Z]\right) &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_{[X,Y]} \circ \mathrm{ad}_Z + \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_{[X,Z]}\right) = \\ &= \mathrm{tr}\left((\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_X)\mathrm{ad}_Z + \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Z - \mathrm{ad}_Z \mathrm{ad}_X\right) = 0 \end{aligned}$$

využitím invariance stopy vůči cyklické záměně.

Věta 6.4. Je-li $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ideál, pak pro jeho Killingovu formu platí $K_\mathfrak{h} = K_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$.

Důkaz. Zvolenou bázi $\mathfrak{h}$ ve tvaru $(e_i)_{i=1}^{\dim \mathfrak{h}}$ doplníme na bázi $\mathfrak{g}$, $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$. Pak pro libovolná $X, Y \in \mathfrak{h}$ platí $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_Y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, tj.:

$$(\mathrm{ad}_X)_\mathcal{E} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbb{O} & \end{array}\right) \Big\}\dim \mathfrak{h}, \qquad (\mathrm{ad}_Y)_\mathcal{E} = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \mathbb{O} & \end{array}\right) \Big\}\dim \mathfrak{h},$$

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \mathrm{tr}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbb{O} & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \mathbb{O} & \end{array}\right)\right) = \\ &= \mathrm{tr}\left(A \cdot \widetilde{A}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_X|_\mathfrak{h}, \mathrm{ad}_Y|_\mathfrak{h}\right) = K_\mathfrak{h}(X, Y). \end{aligned}$$

□

Definice 6.5. Ortogonální doplněk ideálu $\mathfrak{h}$ vzhledem ke Killingově formě K na $\mathfrak{g}$ je

$$\mathfrak{h}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} | K(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}. \quad (6.5)$$

Obdobně lze definovat ortogonální doplněk vzhledem ke Killingově formě libovolného podprostoru v $\mathfrak{g}$.

Poznámka 6.6. Je-li $\mathfrak{h}$ ideál, pak i $\mathfrak{h}^\perp$ je ideál.

Důkaz. Pro libovolné $X \in \mathfrak{h}^\perp,\ Y \in \mathfrak{g},\ Z \in \mathfrak{h}$ platí:

$$K\big([X, Y], Z\big) = -K\big([Y, X], Z\big) = K\big(X, \underbrace{[Y, Z]}_{\in\mathfrak{h}}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in \mathfrak{h}^\perp.$$

□

6.2 Nilpotentní a řešitelné algebry

Věta 6.7. Je-li $\phi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ homomorfismus, pak $\left(\phi(\mathfrak{g})\right)^{(k)} = \phi(\mathfrak{g}^{(k)})$, $\left(\phi(\mathfrak{g})\right)^k = \phi\left(\mathfrak{g}^k\right)$.

Důkaz. Indukcí:

$$(\phi(\mathfrak{g}))^{(0)} = \phi(\mathfrak{g}) = \phi\left(\mathfrak{g}^{(0)}\right)$$
$$(\phi(\mathfrak{g}))^{(k)} = \left[\phi(\mathfrak{g})^{(k-1)}, \phi(\mathfrak{g})^{(k-1)}\right] = \left[\phi\left(\mathfrak{g}^{(k-1)}\right), \phi\left(\mathfrak{g}^{(k-1)}\right)\right] = \phi\left(\left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right]\right) = \phi\left(\mathfrak{g}^{(k)}\right).$$

Podobně

$$(\phi(\mathfrak{g}))^{1} = \phi(\mathfrak{g}) = \phi\left(\mathfrak{g}^{1}\right)$$
$$(\phi(\mathfrak{g}))^{k} = \left[\phi(\mathfrak{g})^{k-1}, \phi(\mathfrak{g})\right] = \left[\phi\left(\mathfrak{g}^{k-1}\right), \phi\left(\mathfrak{g}\right)\right] = \phi\left(\left[\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}\right]\right) = \phi\left(\mathfrak{g}^{k}\right).$$

□

Důsledek 6.8. Je-li Lieova algebra $\mathfrak{g}$ řešitelná (resp. nilpotentní) a $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfismus, pak $\operatorname{Ran}\phi \equiv \phi(\mathfrak{g})$ je řešitelná (resp. nilpotentní) algebra.

Poznámka 6.9. Je-li $\phi : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ homomorfismus, pak $\ker\phi$ je ideál v $\mathfrak{g}$.

Důkaz. $X \in \mathfrak{g},\ Y \in \ker\phi \quad \Rightarrow \quad \phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = 0 \quad \Rightarrow \quad [X,Y] \in \ker\phi.$ □

Věta 6.10. Je-li $\mathfrak{h}$ ideál v algebře $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ jsou řešitelné. Pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Důkaz. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ řešitelná $\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(n)} = 0 \bmod \mathfrak{h} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{h}$ a protože $\mathfrak{h}$ je řešitelný, $\exists k \in \mathbb{N},\ \mathfrak{h}^{(k)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}^{(n+k)} \subset \mathfrak{h}^{(k)} = 0$, tj. $\mathfrak{g}$ je řešitelná. □

Důsledek 6.11. Máme-li homomorfismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ takový, že $\operatorname{Ran}\phi$ a $\ker\phi$ jsou řešitelné, pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná, protože $\operatorname{Ran}\phi \cong \mathfrak{g}/\ker\phi$.

Věta 6.12. Je-li $\mathfrak{h} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nilpotentní, pak $\mathfrak{g}$ je nilpotentní.

Důkaz. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nilpotentní $\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{n} = 0 \bmod \mathfrak{h}$, tj. $\mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{h}$ a $\mathfrak{g}^{n+1} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$. □

Důsledek 6.13. Označme $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} = \{\mathrm{ad}_X | X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Pak

- $\mathfrak{g}$ řešitelná právě tehdy, když $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ řešitelná.
- $\mathfrak{g}$ nilpotentní právě tehdy, když $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ nilpotentní.

Důkaz. $\ker\mathrm{ad} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,Y] = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, tj. $\ker\mathrm{ad}$ je rovno centru algebry $\mathfrak{g}$ a lze použít větu 6.10, resp. 6.12. □

Vlastnosti konečněrozměrných operátorů

Definice 6.14. Lineární operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ je **poloprostý (diagonalizovatelný)** právě tehdy, když existuje báze vektorového prostoru $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^{\dim V} \subset V$ tvořená vlastními vektory operátoru A, tj. $Ae_i = \lambda_i e_i$.

Soubor operátorů $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}} \subset \mathfrak{gl}(V)$ je **současně diagonalizovatelný** právě tehdy, když existuje báze vektorového prostoru $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^{\dim V} \subset V$ tvořená společnými vlastními vektory, $A_\alpha e_i = \lambda_i^{(\alpha)} e_i$.

Definice 6.15. Lineární operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ je **nilpotentní** právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A^n = 0$.

Věta 6.16 (Jordanův rozklad)**.** Buď $A \in \mathfrak{gl}(V)$, kde V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$. Pak existuje jednoznačně určená dvojice operátorů $S, N \in \mathfrak{gl}(V)$ splňující

- $A = S + N$,
- S je diagonalizovatelný, N nilpotentní,
- $[S, N] = 0$.

Operátory S a N lze vyjádřit jako polynomy v operátoru A.

Důkaz viz učebnice lineární algebry.

Poznámka 6.17. Pro další úvahy je užitečné si uvědomit, že spektrum nilpotentního operátoru je tvořené pouze 0 a tedy i stopa N je nulová. Vidíme to z toho, že $Nx = \lambda x$ implikuje $N^k x = \lambda^k x$, tj. $\{0\} = \sigma(N^k) = \{\lambda^k | \lambda \in \sigma(N)\}$.

6.3 Cvičení

Cvičení 6.1. Určete, jak vypadá Killingova forma libovolné nilpotentní Lieovy algebry.

Řešení. Víme, že

$$\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g}^j \to \mathfrak{g}^{j+1}, \qquad \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y : \mathfrak{g}^j \to \mathfrak{g}^{j+2}.$$

Protože algebra $\mathfrak{g}$ je dle předpokladu nilpotentní, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathfrak{g}^k = 0$, tj. $(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)^k = 0$. Tudíž $K(X, Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) = 0$.

Cvičení 6.2. Najděte Killingovu formu algebry $\mathfrak{af}(1)$ v bázi e_1, e_2, $[e_1, e_2] = e_1$.

Řešení.

$$\mathrm{ad}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{e_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kapitola 7

Věty Lieova a Engelova

V této kapitole vyslovíme dvě základní věty o struktuře řešitelných a nilpotentních algeber - větu Engelovu a větu Lieovu, které budeme často využívat v dalším textu. K jejich důkazu si připravíme několik definic a pomocných tvrzení.

Definice 7.1. Vektor $X \in \mathfrak{g}$ je ad–**nilpotentní** právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $(\mathrm{ad}_X)^n = 0$.

Poznámka 7.2. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ platí $\mathrm{ad}_{X_1} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{X_n} = 0$. Speciálně pro libovolný $X \in \mathfrak{g}$ platí $(\mathrm{ad}_X)^n = 0$, tj. všechny prvky nilpotentní algebry jsou ad–nilpotentní.

Lemma 7.3. Pokud operátor $X \in \mathfrak{gl}(V)$ je nilpotentní, pak je X též ad–nilpotentní v $\mathfrak{gl}(V)$.

Důkaz. Indukcí ukážeme že platí:

$$(\mathrm{ad}_X)^k Y = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} X^j Y X^{k-j}. \tag{7.1}$$

$k = 1$ zřejmé, $k - 1 \to k$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}_X)^k Y &= \mathrm{ad}_X \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^j Y X^{k-1-j} \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^{j+1} Y X^{k-1-j} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} X^j Y X^{k-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} \right) X^j Y X^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} X^j Y X^{k-j}.
\end{aligned}$$

Konkrétně je-li $X^n = 0$ pro nějaké $n \in N$, pak v každém sčítanci výrazu $(\mathrm{ad}_X)^{2n}$ je nula v X^j nebo X^{k-j}. □

Lemma 7.4. Buď $\mathfrak{h}$ ideál v $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, $W = \bigcap_{X \in \mathfrak{h}} \ker X = \{v \in V | Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{h}\}$. Pak $\mathfrak{g}W \subset W$, tj. W je invariantní podprostor.

Důkaz. Pro všechna $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$ platí $X(YW) = \underbrace{[X,Y]}_{\in \mathfrak{h}} W + Y(XW) = 0$. Tudíž $YW \subset \ker X$ pro všechna $X \in \mathfrak{h}$, a tedy $YW \subset W$ pro libovolné $Y \in \mathfrak{g}$. □

Lemma 7.5. Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra v $\mathfrak{gl}(V)$ taková, že všechny elementy $\mathfrak{g}$ jsou nilpotentní. Pak existuje $v \in V,\ v \neq 0$ takový, že $Xv = 0$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. Indukcí podle $\dim \mathfrak{g}$:

- $\dim \mathfrak{g} = 1 \ \Rightarrow\ \mathfrak{g} = \operatorname{span}\{X\},\ X^n = 0 \ \Rightarrow\ 0 \in \sigma(X) \ \Rightarrow\ \exists v \in V,\ v \neq 0,\ Xv = 0,$
- $\dim \mathfrak{g} = n - 1 \to n$. Uvažujme vlastní podalgebru maximální dimenze $\mathfrak{h}$ a definujme reprezentaci $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:

  $$\phi(X)(Y + \mathfrak{h}) = \operatorname{ad}_X Y + \mathfrak{h}, \qquad \forall X \in \mathfrak{h},\ Y \in \mathfrak{g}.$$

  Protože všechna $X \in \mathfrak{h}$ jsou nilpotentní, jsou dle Lemmatu 7.3 též ad–nilpotentní. Proto jsou $\phi(X)$ nilpotentní a tedy $\phi(\mathfrak{h})$ splňuje předpoklady dokazovaného tvrzení a má dimenzi ostře menší než n. Dle indukčního předpokladu existuje $Z \in \mathfrak{g}$ takové, že

  $$Z + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h},\ Z + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h},\ \phi(X)(Z + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h},\ \forall X \in \mathfrak{h},$$

  tj. $Z \notin \mathfrak{h},\ [X, Z] \in \mathfrak{h},\ \forall X \in \mathfrak{h}$. Tudíž $\operatorname{span}\{Z\} + \mathfrak{h}$ je podalgebra $\mathfrak{g}$, její dimenze je $\dim = \dim \mathfrak{h} + 1$ a z maximality $\mathfrak{h}$ plyne, že je rovna celé $\mathfrak{g}$.

  Z indukčního předpokladu rovněž plyne existence nenulového $v \in V$ takového, že $\mathfrak{h}v = 0$. Jinými slovy $W = \bigcap_{X \in \mathfrak{h}} \ker X \neq \{0\}$. Protože $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = [\operatorname{span}\{Z\} + \mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, je $\mathfrak{h}$ je ideál. Dle Lemmatu 7.4 je W invariantní podprostor $\mathfrak{g}$. A konečně, z nilpotentnosti Z plyne, že též $Z|_W : W \to W$ je nilpotentní, což implikuje existenci $w \in W,\ w \neq 0,\ Zw = 0$. To nám již dává dokazované tvrzení pro algebru $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}w = (\operatorname{span} Z + \mathfrak{h})\, w = 0$.

□

Lemma 7.6. Buď $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ taková, že všechny operátory $X \in \mathfrak{g}$ jsou nilpotentní, tj. $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra nilpotentních operátorů. Pak existuje báze $\mathcal{E} = \{e_i\}$ ve V taková, že pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ je $Xe_1 = 0$, $Xe_i \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$, tj. všechny matice $X_{\mathcal{E}}$ jsou horní trojúhelníkové matice s nulovou diagonálou. V důsledku, $\mathfrak{g}$ je nilpotentní algebra.

Důkaz. Dle Lemmatu 7.5 existuje nenulový $e_1 \in \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker X$. Položíme $V_1 = \operatorname{span}\{e_1\}$ a definujeme akci $\mathfrak{g}$ na V/V_1:

$$\phi(X)\,(v + V_1) = Xv + V_1, \qquad \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V. \tag{7.2}$$

Podobně jako v důkazu Lemmatu 7.5 je $\phi(\mathfrak{g})$ tvořena nilpotentními operátory a tedy existuje $e_2 \in V,\ e_2 \notin V_1$ takový, že $\phi(X)\,(e_2 + V_1) = V_1$ pro každé $X \in \mathfrak{g}$. Takže máme $Xe_2 \in V_1$. Zvolíme $V_2 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ a postup opakujeme. Indukcí získáváme **kompoziční řadu** $\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$ splňující $\dim V_i/V_{i-1} = 1,\ \mathfrak{g}V_i \subset V_{i-1}$. V bázi $\mathcal{E}$ tvořené vektory $e_i \in V_i \backslash V_{i-1}$ jsou matice operátorů $X \in \mathfrak{g}$ horní trojúhelníkové matice s nulovou diagonálou. □

Věta 7.7 (Engelova)**.** Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy, když každý vektor $X \in \mathfrak{g}$ je ad–nilpotentní. Každá komplexní maticová nilpotentní Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má ve vhodné bázi tvar

$$X = \begin{pmatrix} A_1(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k(X) \end{pmatrix},\ \text{kde } A_i(X) = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix},\ \lambda_i \in \mathfrak{g}^*.$$

Důkaz. Je-li $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} = \{\mathrm{ad}_X \mid X \in \mathfrak{g}\}$ tvořena nilpotentními operátory, pak dle Lemmatu 7.6 je $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ nilpotentní maticová algebra. Podle Důsledku 6.13 je algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentní. Opačná implikace plyne z poznámky 7.2.

Uvažujme dále komplexní maticové algebry. Libovolný komplexní vektorový prostor V lze rozložit jako součet zobecněných vlastních podprostorů vzhledem ke zvolenému operátoru $X \in \mathfrak{gl}(V)$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(X)} \lim_{n \to +\infty} \ker(X - \lambda \mathbb{I})^n \tag{7.3}$$

(jinými slovy, podprostory $\ker(X - \lambda\mathbb{I})^n$ odpovídají Jordanovým blokům operátoru X).

Indukcí ukážeme, že platí

$$(X - \lambda\mathbb{I})^k Y = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j Y (X - \lambda\mathbb{I})^{k-j}, \qquad X, Y \in \mathfrak{gl}(V). \tag{7.4}$$

Pro $k = 0$ je zřejmé, $k - 1 \to k$ získáváme přímým dosazením

$$\begin{aligned}
(X - \lambda\mathbb{I})^k Y &= (X - \lambda\mathbb{I}) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\mathrm{ad}_X)^j Y (X - \lambda\mathbb{I})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(X (\mathrm{ad}_X)^j Y - \lambda (\mathrm{ad}_X)^j Y \right) (X - \lambda\mathbb{I})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left((\mathrm{ad}_X)^{j+1} Y + (\mathrm{ad}_X)^j Y X - \lambda (\mathrm{ad}_X)^j Y \right) (X - \lambda\mathbb{I})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left((\mathrm{ad}_X)^{j+1} Y + (\mathrm{ad}_X)^j Y (X - \lambda\mathbb{I}) \right) (X - \lambda\mathbb{I})^{k-1-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j} \right) (\mathrm{ad}_X)^j Y (X - \lambda\mathbb{I})^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j Y (X - \lambda\mathbb{I})^{k-j}.
\end{aligned}$$

Nechť $\mathfrak{g}$ je nilpotentní podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$, kde V je nad $\mathbb{C}$ a $X \in \mathfrak{g}$. Označíme

$$W_\lambda^X = \lim_{n \to +\infty} \ker(X - \lambda\mathbb{I})^n, \qquad \lambda \in \sigma(X).$$

Dle vztahu (7.4) platí pro libovolné $Y \in \mathfrak{g}$

$$(X - \lambda\mathbb{I})^k Y W_\lambda^X = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mathrm{ad}_X)^j Y (X - \lambda\mathbb{I})^{k-j} W_\lambda^X \quad \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} (X - \lambda\mathbb{I})^k Y W_\lambda^X = 0,$$

protože pro dostatečně velké k je buď $(\mathrm{ad}_X)^j Y = 0$ z nilpotentnosti operátoru ad_X nebo je $(X - \lambda\mathbb{I})^{k-j} W_\lambda^X = 0$ z definice W_λ^X. Vidíme tedy, že $Y W_\lambda^X \subset W_\lambda^X$, tj. W_λ^X je invariantní podprostor. Zúžením všech operátorů z $\mathfrak{g}$ na W_λ^X dospíváme ke stejnému problému na menším vektorovém prostoru, kde postup opakujeme. Tímto opakovaným zužováním na stejným způsobem konstruované podprostory pro další $Y \in \mathfrak{g}$ po konečně mnoha krocích získáváme invariantní podprostory, na nichž všechny operátory $X \in \mathfrak{g}$ působí jako násobek jednotky plus nilpotentní operátor. Označme libovolný z těchto podprostorů W. Všechny

komutátory $[X, Y]$ na takovém podprostoru W jsou nilpotentní, neboť jim odpovídající násobek jednotky $\lambda\mathbb{I}|_W$ je nulový z nulovosti stopy komutátoru operátorů $\mathrm{tr}[X|_W, Y|_W]$. Lze tudíž definovat novou operátorovou algebru na W odečtením příslušného násobku jednotky od každého z operátorů $X|_W$ (násobky jednotky nepřispívají do komutátorů, výše jsme ověřili, že nejsou přítomny v pravých stranách, tj. nová algebra je uzavřená vzhledem ke komutátorům a má stejné komutační relace jako původní $\mathfrak{g}|_W$). Tato algebra na W je tvořena nilpotentními operátory, můžeme tedy na ni aplikovat Lemma 7.6 a nalézáme maticovou podobu Engelovy věty. □

Lemma 7.8. Buď V komplexní vektorový prostor a $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ řešitelná algebra operátorů. Pak existuje $v \in V,\ v \neq 0$ a $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ takové, že

$$Xv = \lambda(X)v, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{7.5}$$

Důkaz. Indukcí dle $\dim \mathfrak{g}$. Případ $\dim \mathfrak{g} = 1$ je zřejmý.

$\dim \mathfrak{g} = k - 1 \to k$. Buď $\mathfrak{g}$ řešitelná algebra, $\dim \mathfrak{g} = k$. Máme $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$. Uvažujme $\mathfrak{h}$ podprostor $\mathfrak{g}$ s vlastnostmi $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{h}$ a $\dim \mathfrak{h} = k - 1$. Takový $\mathfrak{h}$ je nutně řešitelný ideál v $\mathfrak{g}$, protože $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{h}$. Tedy $\mathfrak{h}$ splňuje indukční předpoklad a proto existuje $v_0 \in V,\ v \neq 0$ a $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ taková, že $Xv_0 = \lambda_0(X)v_0,\ \forall X \in \mathfrak{h}$. Vezmeme libovolné $Z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathrm{span}\{Z\}$, a definujeme $v_{j+1} = Zv_j,\ j \in \mathbb{N}_0,\ W = \mathrm{span}\{v_j\}_{j=0}^{+\infty}$. Evidentně platí $\dim W \leq \dim V < +\infty$, takže existuje $p \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\{v_0, \ldots, v_p\}$ jsou lineárně nezávislé a $Zv_p \in \mathrm{span}\{v_0, \ldots, v_p\}$, tj. $W = \mathrm{span}\{v_j\}_{j=0}^{p}$ a $ZW \subset W$. Pro libovolné $X \in \mathfrak{h}$ platí

$$\begin{aligned}
Xv_0 &= \lambda_0(X)v_0, \\
Xv_1 &= XZv_0 = ZXv_0 + \overbrace{[X, Z]}^{\in\mathfrak{h}} v_0 = \lambda_0(X)Zv_0 + \lambda_0([X, Z])v_0 \\
&= \lambda_0(X)v_1 + \lambda_0([X, Z])v_0, \\
Xv_2 &= ZXv_1 + [X, Z]v_1 = \lambda_0(X)v_2 + 2\lambda_0([X, Z])v_1 + \lambda_0([[X, Z], Z])v_0, \\
&\vdots \\
Xv_j &= \lambda_0(X)v_j + \underbrace{\ldots}_{\in \mathrm{span}\{v_0,\ldots,v_{j-1}\}}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že W je invariantní vzhledem k působení $\mathfrak{h}$ a platí $\mathrm{tr}\, X|_W = \dim W \cdot \lambda(X)$. Protože z konstrukce $\dim W \geq 1$, máme

$$\lambda_0([X, Z]) = \frac{1}{\dim W} \mathrm{tr}\, [X, Z]|_W = \frac{1}{\dim W} \left(\mathrm{tr}\, X|_W\, Z|_W - \mathrm{tr}\, Z|_W\, X|_W\right) = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

Takže pro libovolné $X \in \mathfrak{h}$ máme $Xv_1 = \lambda_0(X)v_1$, $Xv_j = \lambda(X)_0 v_j$, tj. všechny $X \in \mathfrak{h}$ jsou současně diagonální na W ve zvolené bázi, dokonce to jsou násobky jednotkového operátoru, s vlastními čísly $\lambda_0(X)$. Protože $ZW \subset W$, existuje $v \in W,\ v \neq 0$ takové, že $Zv = \tilde{\lambda}v$. Tím je učiněn indukční krok, neboť máme pro nalezený vektor v funkcionál $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ splňující (7.5) ve tvaru $\lambda(\alpha Z + X) = \alpha\tilde{\lambda} + \lambda_0(X)$, kde $X \in \mathfrak{h}$. □

Věta 7.9 (Lieova)**.** Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$, kde V je komplexní vektorový prostor konečné dimenze. Potom je $\mathfrak{g}$ řešitelná právě tehdy, když je možné najít bázi vektorového prostoru V, v níž všechny operátory $X \in \mathfrak{g}$ mají současně horní trojúhelníkový tvar.

Důkaz. Jedním směrem je tvrzení jednoduché: pokud $\mathfrak{g}$ tvoří horní trojúhelníkové matice, pak $\mathfrak{g}$ je řešitelná výpočtem derivované série.

Naopak, mějme řešitelnou algebru $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, V nad $\mathbb{C}$. Dle Lemmatu 7.8 existuje $v_1 \in V,\ v_1 \neq 0$ a $\lambda_1 \in \mathfrak{g}^*$ takové, že $Xv_1 = \lambda_1(X)v_1$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$. Definujme $V_1 = \operatorname{span}\{v_1\}$ a reprezentaci $\mathfrak{g}$ na V/V_1:

$$\phi(X)\,(v + V_1) = Xv + V_1, \qquad X \in \mathfrak{g},\ v \in V.$$

Jako homomorfní obraz je $\phi(\mathfrak{g})$ opět řešitelná maticová algebra, tedy dle Lemmatu 7.8 existuje $v_2 \in V,\ v_2 \notin V_1$ a $\widetilde{\lambda}_2 \in \phi(\mathfrak{g})^*$:

$$\begin{aligned}\phi(X)\,(v_2 + V_1) &= Xv_2 + V_1 \\ &= \widetilde{\lambda}_2(\phi(X))\,(v_2 + V_1) = \widetilde{\lambda}_2(\phi(X))v_2 + V_1, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

Položíme $\lambda_2 := \widetilde{\lambda}_2 \circ \phi \in \mathfrak{g}^*$ a máme $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 \bmod V_1$. Definujeme $V_2 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ a pokračujeme indukcí. Získáváme bázi V ve tvaru $(v_1, v_2, \dots)$ s vlastností

$$Xv_j = \lambda_j(X)v_j \bmod V_{j-1}, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

V této bázi jsou všechny $X \in \mathfrak{g}$ horní trojúhelníkové matice. □

Důsledek 7.10. Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když její derivovaná algebra $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}$ je nilpotentní.

Důkaz. Nejprve ukážeme pro komplexní algebry:

$\Leftarrow$: $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2$ je abelovská, tj. řešitelná, $\mathfrak{g}^2$ je řešitelná. Tudíž $\mathfrak{g}$ je řešitelná dle věty 6.10.

$\Rightarrow$: $\mathfrak{g}$ řešitelná právě tehdy, když $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ je řešitelná. Dle Lieovy věty to nastává právě tehdy, když ve vhodné bázi $\mathfrak{g}$ je $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ vyjádřena pomocí horních trojúhelníkových matic. Pak pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{g}$ je $Z = [X, Y]$ homomorfismem ad zobrazeno na $\operatorname{ad}_Z = [\operatorname{ad}_X, \operatorname{ad}_Y]$. To je horní trojúhelníková matice s nulovou diagonálou, tj. všechna $\operatorname{ad}_Z \in \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^2}$ jsou striktně horní trojúhelníkové matice, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^2}$ je nilpotentní algebra a tedy dle poznámky 6.13 je $\mathfrak{g}^2$ nilpotentní algebra.

Pro reálnou algebru máme

$$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^k = \left(\mathfrak{g}^k\right)_{\mathbb{C}}, \qquad (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{(k)} = \left(\mathfrak{g}^{(k)}\right)_{\mathbb{C}}.$$

Proto platí $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ je řešitelná, resp. nilpotentní, právě tehdy, když $\mathfrak{g}$ je řešitelná, resp. nilpotentní. □

Kapitola 8

Cartanova kritéria

Ukazuje se, že řešitelnost a poloprostotu dané Lieovy algebry je možné zjistit výpočtem přímo z vlastností Killingovy formy. Tato tvrzení, známá jako Cartanova kritéria, odvodíme v této kapitole a následně budeme zkoumat jejich důsledky pro strukturu poloprostých Lieových algeber.

Nejprve ale potřebujeme jedno spíše technické tvrzení.

Věta 8.1. Buď $\mathfrak{g}$ podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$ a nechť pro každé $X, Y \in \mathfrak{g}$ je $\operatorname{tr}(XY) = 0$. Pak je $\mathfrak{g}$ řešitelná.

Důkaz. Větu bude dokazovat pro komplexní vektorové prostory V (pro reálné vektorové prostory řešíme komplexifikací). Ukážeme že každý $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ je nilpotentní. Z toho bude plynout, že je dle Engelovy věty $\mathfrak{g}^{(1)}$ nilpotentní a tedy $\mathfrak{g}$ řešitelná dle důsledku 7.10.

Pro $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ použijeme Jordanův rozklad:

$$X = S + N, \quad [S, N] = 0, \quad \exists k \in \mathbb{N},\ N^k = 0, \quad S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

ve vhodné bázi $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^n$. Pro $\operatorname{ad}_X, \operatorname{ad}_S, \operatorname{ad}_N : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ a $(E_{ij})_{i,j=1}^n$ bázi $\mathfrak{gl}(V)$ máme:

$$\operatorname{ad}_X = \operatorname{ad}_S + \operatorname{ad}_N, \quad [\operatorname{ad}_S, \operatorname{ad}_N] = 0, \quad (\operatorname{ad}_N)^{2k} = 0, \quad \operatorname{ad}_S(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij},$$

tj. ad_S je diagonální a $\operatorname{ad}_X = \operatorname{ad}_S + \operatorname{ad}_N$ je Jordanův rozklad. Proto existuje polynom $p \in \mathcal{P}[x]$ takový, že $\operatorname{ad}_S = p(\operatorname{ad}_X)$. Uvažujme komplexně sdruženou matici $\overline{S} = \operatorname{diag}\left(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n\right)$ a její ad–reprezentaci $\operatorname{ad}_{\overline{S}}(E_{ij}) = \left(\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j\right) E_{ij}$. Protože existuje polynom $q \in \mathcal{P}[x]$ splňující $\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j = q(\lambda_i - \lambda_j)$, je též $\operatorname{ad}_{\overline{S}} = q(\operatorname{ad}_S)$. Definujeme-li $\widetilde{p} \in \mathcal{P}[x]$ předpisem $\widetilde{p}(x) = q(p(x))$, pak $\operatorname{ad}_{\overline{S}} = q(\operatorname{ad}_S) = \widetilde{p}(\operatorname{ad}_X)$. Protože $\operatorname{ad}_S, \operatorname{ad}_N, \operatorname{ad}_{\overline{S}}$ jsou polynomy v ad_X, zobrazují $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a platí:

$$\begin{aligned}
&[\overline{S}, N] = \operatorname{ad}_{\overline{S}} N = \widetilde{p}(\operatorname{ad}_X) N = \widetilde{p}(0) \cdot N, \\
&\left(\overline{S}N\right)^2 = \overline{S}N\overline{S}N = \overline{S}^2 N^2 - \overline{S}\widetilde{p}(0) N N = \left(\overline{S}^2 - \widetilde{p}(0) \cdot \overline{S}\right) N^2, \\
&\qquad \vdots \\
&\left(\overline{S}N\right)^k = (\ldots)\, N^k.
\end{aligned}$$

Protože N je nilpotentní, je nilpotentní též $\overline{S}N$. V důsledku platí následující vztah

$$\operatorname{tr}\left(\overline{S}X\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{S}(S+N)\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{S}S\right) + \underbrace{\operatorname{tr}\left(\overline{S}N\right)}_{=0} = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 .$$

Speciálně, pro libovolné $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ vyjádřené ve tvaru $X = \sum_k [A_k, B_k]$, kde $A_k, B_k \in \mathfrak{g}$, platí dle předpokladu dokazované věty

$$\operatorname{tr}\left(\overline{S}X\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{S}\sum_k [A_k, B_k]\right) = \sum_k \operatorname{tr}\left(\overline{S}A_kB_k - \overline{S}B_kA_k\right) = \sum_k \operatorname{tr}\big(\underbrace{\operatorname{ad}_{\overline{S}}(A_k)}_{\in \mathfrak{g}} \circ B_k\big) = 0.$$

Proto pro vlastní čísla operátoru X platí $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 = 0$, tj. $\lambda_j = 0,\ \forall j \in \hat{n}$ a tedy $S = 0$, $X = N$, což jsme chtěli ukázat. □

Nyní již můžeme přistoupit k formulaci a důkazu Cartanových kritérií.

Věta 8.2 (1. Cartanovo kritérium)**.** Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná právě tehdy, když $K(X, Y) = 0$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ a $Y \in \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^2$.

Důkaz. Důkaz jako obvykle provedeme pro komplexní Lieovy algebry, pro reálné vyplývá ze vzájemné korespondence ideálů v derivované sérii při komplexifikaci.

⇒: Algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná, tudíž $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ je řešitelná maticová algebra a dle Lieovy věty ji ve vhodné bázi tvoří horní trojúhelníkové matice. $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}} = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}})^{(1)}$, tedy $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}}$ obsahuje horní trojúhelníkové matice s nulovou diagonálou. Proto platí

$$K(X, Y) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y\right) = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{g},\ Y \in \mathfrak{g}^{(1)}.$$

⇐: Nechť $K(X, Y) = 0$ pro všechny $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$. Speciálně $K(X, Y) = 0$ pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$, tj. $\operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y\right) = 0$. Dle věty 8.1 je $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}}$ řešitelná, tj. též $\mathfrak{g}^{(1)}$ je řešitelná. Zároveň $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ je evidentně abelovská, tj. řešitelná. Dle věty 6.10 je tudíž $\mathfrak{g}$ řešitelná.

□

Poznámka 8.3. Připomeňme definici ortogonálního doplňku $\mathfrak{h}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} | K(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$.

Definice 8.4. Radikál Killingovy formy je ortogonální doplněk Lieovy algebry vzhledem ke Killingově formě,

$$\operatorname{rad} K = \mathfrak{g}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} \mid K(X, Y) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Věta 8.5 (2. Cartanovo kritérium)**.** Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je poloprostá právě tehdy, když její Killingova forma K je nedegenerovaná, tj. $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$.

Důkaz. **⇒:** Nechť K je degenerovaná, tj. $\operatorname{rad} K$ je nenulový ideál. Evidentně $K|_{\operatorname{rad} K \times \operatorname{rad} K} = 0$, takže dle 1. Cartanova kritéria $\operatorname{rad} K$ je řešitelný ideál, tj. existuje $k \in \mathbb{N}_0$ takový, že $(\operatorname{rad} K)^{(k)} \neq 0$, a $(\operatorname{rad} K)^{(k+1)} = 0$. Protože prvky derivované série ideálu $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jsou též ideály v $\mathfrak{g}$ a $\left[(\operatorname{rad} K)^{(k)}, (\operatorname{rad} K)^{(k)}\right] = 0$, je $(\operatorname{rad} K)^{(k)}$ nenulový abelovský ideál a tudíž $\mathfrak{g}$ není poloprostá.

$\Leftarrow$: Nechť $\mathfrak{g}$ není poloprostá. Což znamená, že v ní existuje nenulový abelovský ideál $\mathfrak{h}$. Pro libovolná $X \in \mathfrak{h},\ Y, Z \in \mathfrak{g}$ platí:

$$\left(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y\right)^2 Z = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\mathrm{ad}_X}_{\in \mathfrak{h}} \underbrace{\mathrm{ad}_Y}_{\in \mathfrak{h}} \underbrace{\mathrm{ad}_X}_{\in \mathfrak{h}} \underbrace{\mathrm{ad}_Y Z}_{\in \mathfrak{g}}}_{\in [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = 0}} = 0.$$

Tudíž $\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y$ je nilpotentní a tedy $K(X,Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = 0$, $0 \neq \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^\perp$, tj. algebra $\mathfrak{g}$ má degenerovanou Killingovu formu.

□

Poznámka 8.6. Pro konečněrozměrné vektorové prostory je bilineární forma ω degenerovaná právě tehdy, když $\det \omega = 0$, kde ω značí v tomto případě zároveň i matici formy v libovolné zvolené bázi.

Věta 8.7. Poloprostá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je direktním součtem prostých ideálů.

Důkaz. Buď $\mathfrak{g}$ poloprostá, ale ne prostá, tj. existuje nenulový vlastní ideál $\mathfrak{h}$. Jeho ortogonální doplněk $\mathfrak{h}^\perp$ je též ideál. Pro libovolné $X, Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp, Z \in \mathfrak{g}$ platí:

$$K\big([X,Y],Z\big) = -K\big(Y, \underbrace{[X,Z]}_{\in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp}\big) = 0,\ \text{tj. } [X,Y] \in \mathfrak{g}^\perp = 0.$$

Proto máme $\left(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp\right)^{(1)} = 0$, tj. $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ je abelovský ideál a z poloprostory algebry $\mathfrak{g}$ je $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$. Zvolíme-li (X_j) bázi $\mathfrak{h}$, můžeme definovat lineární operátor $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ předpisem:

$$A(Y) = \sum_j X_j K(X_j, Y), \qquad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Evidentně $\ker A = \mathfrak{h}^\perp$ a $A(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$, tudíž z lineární algebry (tzv. 2. věta o dimenzi) dostáváme $\dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Proto je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Pokud $\mathfrak{h}$ nebo $\mathfrak{h}^\perp$ (případně oba) není prostý, tak postup opakujeme, dokud nedospějeme k požadovanému rozkladu na prosté ideály. □

V důkazu jsme nikde nevyužili předpoklad, že ideál $\mathfrak{h}$ je poloprostý. Přitom jsme ukázali, že jeho Killingova forma je nedegenerovaná, neboť $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Máme tedy důsledek:

Důsledek 8.8. Všechny nenulové ideály v poloprosté Lieově algebře $\mathfrak{g}$ jsou též poloprosté (a jsou součtem prostých ideálů $\mathfrak{g}$).

Věta 8.9. Všechny derivace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou vnitřní.

Důkaz. Z definice derivace vyplývá, že vektorový prostor všech derivací Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je sám též Lieovou algebrou vzhledem ke komutátoru zobrazení. Označme jej $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Potom $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Pro libovolné $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g}),\ X, Y \in \mathfrak{g}$ platí:

$$[D, \mathrm{ad}_X]\, Y = D\left([X,Y]\right) - [X, D(Y)] = [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] = \mathrm{ad}_{D(X)} Y,$$

tedy $[D, \mathrm{ad}_X] = \mathrm{ad}_{D(X)}$, pro všechna $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$, $X \in \mathfrak{g}$. Proto $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ tvoří ideál v $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ a též $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g})^\perp$ a $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$ jsou ideály. Protože $\mathfrak{g}$ je poloprostá, je $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \ker \mathrm{ad} = 0$ a tedy $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$ je též poloprostá. Obdobně $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$ jako ideál v poloprostém ideálu je poloprostý, je-li nenulový. V důsledku Killingova forma K na $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ zúžená na $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ zůstává nedegenerovaná (a je rovna Killingově formě na $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$). Podobně, je-li $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$ nenulový, pak i jeho Killingova forma je nedegenerovaná. Proto ze vztahu $K|_{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp \times \mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp} = 0$ vidíme, že $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp = 0$. Pro libovolné $D \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$, $X \in \mathfrak{g}$ máme:

$$\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \ni \mathrm{ad}_{D(X)} = [D, \mathrm{ad}_X] \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_{D(X)} = 0, \qquad \forall D \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp,\ X \in \mathfrak{g}.$$

Proto pro všechna $D \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$, $X \in \mathfrak{g}$ je $D(X) \in \ker \mathrm{ad} = \{0\}$, tj. $D = 0$, $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp = 0$. Zároveň z konstrukce ortogonálního doplňku jako řešení soustavy $\dim \mathfrak{g}$ homogenních lineárních rovnic pro $\dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ neznámých musí platit

$$\dim \mathrm{ad}_\mathfrak{g} + \dim \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp \geq \dim \mathfrak{D}(\mathfrak{g}).$$

Tím dostáváme dokazované tvrzení $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$. □

8.1 Cvičení

Cvičení 8.1. Spočítejte Killingovu formu Lieovy algebry $\mathfrak{af}(1)$, Heisenbergovy algebry $\mathfrak{h}(1)$ a třírozměrných řešitelných algeber ze cvičení 5.2. Ilustrujte na nich 1. Cartanovo kritérium.

Cvičení 8.2. Ukažte, že obecně radikál Killingovy formy je řešitelný ideál, ale nemusí být roven radikálu Lieovy algebry. Jaký je vztah radikálu Killingovy formu k nilradikálu?

Cvičení 8.3. Ukažte, že obecně pro libovolnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ je ortogonální doplněk derivované algebry $\left(\mathfrak{g}^{(1)}\right)^\perp = (\mathfrak{g}^2)^\perp$ řešitelný ideál. (Lze dokázat, že už je maximální, tj. je rovný radikálu algebry $\mathfrak{g}$.)

Cvičení 8.4. Určete Killingovu formu algeber $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a použijte 2. Cartanovo kritérium k důkazu jejich poloprostoty. Z čeho lze vyvodit, že obě algebry jsou dokonce prosté? Využitím signatury Killingovy formy dokažte, že se jedná o dvě různé reálné formy komplexní prosté Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Cvičení 8.5. Ukažte, že v prosté komplexní Lieově algebře jsou všechny symetrické invariantní formy násobkem Killingovy formy.

Řešení. Killingovu formu využijte k zavedení vzájemně jednoznačného zobrazení bilineárních forem a lineárních operátorů

$$\omega \leftrightarrow A_\omega : \qquad \omega(X, Y) = K(X, A_\omega Y)$$

a zkoumejte vlastnosti operátoru A_ω přiřazeného libovolné symetrické invariantní formě ω. Využijte symetrii a invariantnost ω i K a Schurovo lemma. Uvědomte si, že ideály jsou právě invariantní podprostory adjungované reprezentace. Co to implikuje pro prostou Lieovu algebru z hlediska vlastností adjungované reprezentace?

Kapitola 9

Cartanova podalgebra

Nyní budeme definovat základní pojem potřebný pro klasifikaci komplexních poloprostých Lieových algeber, tzv. Cartanovu podalgebru, a dokážeme si, že v každé komplexní Lieově algebře existuje.

Definice 9.1. Normalizátor podalgebry $\mathfrak{h}$ v $\mathfrak{g}$ je $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} | [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$.

Poznámka 9.2. Evidentně $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Norm}(\mathfrak{h})$ a pro $\mathfrak{h}$ ideál $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Norm}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$.

Definice 9.3. Cartanova podalgebra Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná nilpotentní podalgebra $\mathfrak{g}_0$, která je rovna svému normalizátoru.

Poznámka 9.4. Cartanova podalgebra je pro algebry nad $\mathbb{C}$ určena jednoznačně až na automorfismus algebry $\mathfrak{g}$. Nad $\mathbb{R}$ to obecně neplatí.

Definice 9.5. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra a $X \in \mathfrak{g}$. Definujeme **zobecněné vlastní podprostory** operátoru ad_X, tj. podprostory odpovídající Jordanovým blokům

$$\mathfrak{g}_\lambda(X) = \lim_{k \to +\infty} \ker(\mathrm{ad}_X - \lambda \mathbb{I})^k.$$

Pokud $\lambda \notin \sigma(\mathrm{ad}_X)$, plyne z definice $\mathfrak{g}_\lambda(X) = 0$. Limita v definici 9.5 je formální, od jistého $k \leq \dim \mathfrak{g}$ se $\ker(\mathrm{ad}_X - \lambda \mathbb{I})^k$ již nemění.

Poznámka 9.6. Pro libovolný $X \in \mathfrak{g}$ je

- $\mathfrak{g} = \dot{+}_{\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)} \mathfrak{g}_\lambda(X)$,
- $\dim \mathfrak{g}_0(X) \geq 1$, protože $\mathrm{ad}_X X = [X, X] = 0$ a tedy $X \in \mathfrak{g}_0(X)$,
- $\dim \mathfrak{g}_0(X)$ se nazývá **nulita** prvku X.

Definice 9.7. $X \in \mathfrak{g}$ je **regulární** právě tehdy, když $\dim \mathfrak{g}_0(X) = \min_{Y \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}_0(Y)$, tj. nulita X je nejmenší možná.

Poznámka 9.8. Skoro všechny prvky $X \in \mathfrak{g}$ jsou regulární, ve smyslu: je-li $(e_j)_{j=1}^n$ báze $\mathfrak{g}$ a $X = \alpha^j e_j$, potom $\mu(\{\{\alpha^j\}_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n | X \text{ není regulární}\}) = 0$, kde μ je Lebesgueova míra na $\mathbb{C}^n$.

Lemma 9.9. Pro libovolná $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ platí

$$(\mathrm{ad}_X - (\lambda + \mu)\mathbb{I})^k [Y, Z] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda \mathbb{I})^j Y, (\mathrm{ad}_X - \mu \mathbb{I})^{k-j} Z \right].$$

Důkaz. Indukcí: $k = 1$:

$$(\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{I})\,[Y,Z] = [(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})\,Y, Z] + [Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})\,Z]\,.$$

$k-1 \to k$:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{I})^k\,[Y,Z] = \\
&= (\mathrm{ad}_X - (\lambda+\mu)\mathbb{I}) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^j\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-1-j}\,Z\right] = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^{j+1}\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-1-j}\,Z\right] + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^{j}\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-j}\,Z\right] = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j}\right) \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^{j}\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-j}\,Z\right] = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[(\mathrm{ad}_X - \lambda\mathbb{I})^{j}\,Y, (\mathrm{ad}_X - \mu\mathbb{I})^{k-j}\,Z\right].
\end{aligned}$$

□

Důsledek 9.10. Pro každý $X \in \mathfrak{g}$ platí $[\mathfrak{g}_\lambda(X), \mathfrak{g}_\mu(X)] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(X)$.

Lemma 9.11. Buď X regulární prvek algebry $\mathfrak{g}$. Pak $\mathfrak{g}_0(X)$ je nilpotentní podalgebra $\mathfrak{g}$.

Důkaz. Z důsledku 9.10 víme, že $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_0(X)] \subset \mathfrak{g}_0(X)$, tj. $\mathfrak{g}_0(X)$ je podalgebra v $\mathfrak{g}$. Z definice zobecněných vlastních podprostorů plyne, že $\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ je nilpotentní a pro libovolné $\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)$, $\lambda \neq 0$ je $\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)}$ je regulární zobrazení. Vezmeme libovolné $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$ a spojíme ho úsečkou $Y(t) = tY + (1-t)X \subset \mathfrak{g}_0(X)$ s X. Protože $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_\lambda(X)] \subset \mathfrak{g}_\lambda(X)$, platí pro každé $t \in \langle 0,1\rangle$ vztah $\mathrm{ad}_{Y(t)}\mathfrak{g}_\lambda(X) \subset \mathfrak{g}_\lambda(X)$. Když dosadíme $t = 0$, máme $\mathrm{ad}_{Y(0)}\big|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)} = \mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)}$ regulární operátor. Protože determinant operátoru závisí na parametrech spojitě a počet podprostorů $\mathfrak{g}_\lambda(X)$ je konečný, musí existovat $\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)$, $\lambda \neq 0$ a pro všechna t, $0 \leq t < \varepsilon$ je $\mathrm{ad}_{Y(t)}\big|_{\mathfrak{g}_\lambda(X)}$ regulární.

Tudíž musí platit $\mathfrak{g}_0(Y(t)) \subset \mathfrak{g}_0(X)$ pro všechna t, $0 \leq t < \varepsilon$ (neboť máme rozklad na invariantní podprostory a na všech ostatních prostorech je zobrazení regulární). Ale díky minimalitě nulity vektoru X musí být $\mathfrak{g}_0(Y(t)) = \mathfrak{g}_0(X)$, $\forall t \in \langle 0, \varepsilon)$, tj. pro dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$

$$\ker\left(\mathrm{ad}_{Y(t)}\big|_{g_0(X)}\right)^k = \ker\left(t\,\mathrm{ad}_Y + (1-t)\mathrm{ad}_X\right)^k = \mathfrak{g}_0(X), \qquad \forall t \in \langle 0, \varepsilon).$$

Operátor $\left(\mathrm{ad}_{Y(t)}\big|_{g_0(X)}\right)^k$ je polynom v t s hodnotami v maticích, nulový na neprázdném otevřeném intervalu $(0, \varepsilon)$. Tudíž je to nulový polynom pro všechna t, tj. $\left(\mathrm{ad}_Y|_{\mathfrak{g}_0(X)}\right)^k = \left(\mathrm{ad}_{Y(1)}\big|_{\mathfrak{g}_0(X)}\right)^k = 0$. Jinými slovy, pro všechny vektory $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$ jsou $\mathrm{ad}_Y|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ nilpotentní, tj. dle Engelovy věty je podalgebra $\mathfrak{g}_0(X)$ nilpotentní. □

Důsledek 9.12. Buď X regulární prvek, pak $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0(X)}\big|_{\mathfrak{g}}$ je reprezentace nilpotentní algebry $\mathfrak{g}_0(X)$ na vektorovém prostoru $\mathfrak{g}$, tj. komplexní maticová nilpotentní algebra. Z maticové verze Engelovy věty víme, že existuje báze $\mathfrak{g}$ a funkcionály $\{\lambda_j\} \subset (\mathfrak{g}_0(X))^*$ takové, že pro všechny $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$ máme blokově diagonální tvar ad_Y

$$\mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? & & & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & ? & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & & & & & & & \\ & & & \lambda_1(Y) & ? & ? & ? & & & & & \\ & & & 0 & \ddots & ? & ? & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & ? & & & & & \\ & & & 0 & \dots & 0 & \lambda_1(Y) & & & & & \\ & & & & & & & \lambda_2(Y) & ? & ? & ? & \\ & & & & & & & 0 & \ddots & ? & ? & \\ & & & & & & & \vdots & & \ddots & ? & \\ & & & & & & & 0 & \dots & 0 & \lambda_2(Y) & \\ & & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

Věta 9.13. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra a $X \in \mathfrak{g}$ její regulární vektor. Potom $\mathfrak{g}_0(X)$ je Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}$.

Důkaz. X je regulární, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} \big(\dot{+}_{\lambda\in\sigma(X)}\mathfrak{g}_\lambda(X)\big)$, kde $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{g}_0(X)$ je nilpotentní. Pokud $\lambda \in \sigma(\mathrm{ad}_X)$, $\lambda \neq 0$ a $Z_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$, pak platí

$$[X, Z_\lambda] = \lambda Z_\lambda + \underbrace{\dots}_{\text{LN na } Z_\lambda} \in \mathfrak{g}_\lambda(X), \tag{9.2}$$

Pro libovolné $Z \in \mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0)$ zkonstruujeme jeho rozklad $Z = \sum_{\lambda\in\sigma(\mathrm{ad}_X)} Z_\lambda$, $Z_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda(X)$. Dle rovnice (9.2) platí

$$[X, Z] \in \mathfrak{g}_0 \quad \Rightarrow \quad Z_\lambda = 0, \quad \forall\lambda \neq 0,$$

tj. $Z = Z_0 \in \mathfrak{g}_0$. Vidíme, že $\mathfrak{g}_0$ se rovná svému normalizátoru, tedy $\mathfrak{g}_0$ je Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}$. □

Poznámka 9.14. Naopak, máme-li Cartanovu podalgebru $\mathfrak{g}_0$ komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ zadanou, pak její reprezentace $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}|_{\mathfrak{g}}$ na $\mathfrak{g}$ má dle Engelovy věty tvar (9.1). Libovolný vektor $X \in \mathfrak{g}_0$ takový, že $\lambda(X) \neq 0$ pro všechny funkcionály λ z rozkladu (9.1), je regulární a definuje stejnou Cartanovu podalgebru předpisem $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(X)$, tj. všechny Cartanovy podalgebry mají tvar $\mathfrak{g}_0(X)$ pro nějaké X.

Definice 9.15. Nenulové $\lambda_j \in \mathfrak{g}_0^*$ z rozkladu (9.1) se nazývají **kořeny** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Množinu všech kořenů Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ značíme Δ.

Kořeny evidentně závisí na výběru Cartanovy podalgebry $\mathfrak{g}_0$, ač se to v používané terminologii zvlášť nezdůrazňuje.

Definice 9.16. Podprostor $\mathfrak{g}_\lambda$ příslušející kořenu λ se nazývá **kořenový podprostor**. Vektor $Y_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$ se nazývá **kořenový vektor**.

Vektory z Cartanovy podalgebry většinou pro zjevné odlišení od obecných vektorů z $\mathfrak{g}$ značíme písmenem H.

Lemma 9.17. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(X)$ její Cartanova podalgebra definovaná pomocí regulárního prvku X. Pak pro všechna $H \in \mathfrak{g}_0$, $\lambda \in \Delta$ a $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$ platí

$$K(H, Y) = 0.$$

Důkaz. Pro každé $\mu \in \Delta \cup \{0\}$ máme $\mathrm{ad}_H : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_\mu$, $\mathrm{ad}_Y : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$. Proto $(\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y)^k : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\mu+k\lambda}$. Vždy najdeme dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu + k\lambda$ není ani kořen ani 0, tedy $\mathfrak{g}_{\mu+k\lambda} = \{0\}$. Vidíme, že $\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y$ musí být nilpotentní. Proto platí $K(H, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_Y) = 0$, tj. $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda,\ \forall \lambda \in \Delta$. □

Lemma 9.18. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $H \in \mathfrak{g}_0$. Pak platí implikace

$$\lambda(H) = 0, \forall \lambda \in \Delta \quad \Rightarrow \quad H = 0.$$

Jinak vyjádřeno, $\mathrm{span}\, \Delta = \mathfrak{g}_0^*$.

Důkaz. Je-li $\lambda(H) = 0,\ \forall \lambda \in \Delta$, pak $\mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{g}}$ je ve vyjádření (9.1) horní trojúhelníková matice s nulovou diagonálou. Proto pro každé $\widetilde{H} \in \mathfrak{g}_0$ platí $K(H, \widetilde{H}) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_H \mathrm{ad}_{\widetilde{H}}\right) = 0$, tj. $H \in \mathfrak{g}_0^\perp$. Současně dle lemmatu 9.17 je $H \in \mathfrak{g}_\lambda^\perp$ pro $\lambda \in \Delta$. Tudíž $H \in \mathfrak{g}^\perp$, tj. $H = 0$ díky nedegenerovanosti Killingovy formy poloprosté algebry $\mathfrak{g}$. □

Věta 9.19 (Alternativní definice Cartanovy podalgebry poloprosté komplexní Lieovy algebry)**.** Podalgebra $\mathfrak{g}_0$ komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je Cartanovou podalgebrou algebry $\mathfrak{g}$ právě tehdy, když je maximální abelovskou podalgebrou takovou, že ad_H je poloprostý operátor pro všechny vektory $H \in \mathfrak{g}_0$.

Důkaz. Abelovská podalgebra $\mathfrak{g}_0$ je evidentně nilpotentní, všechny ad_H pro $H \in \mathfrak{g}_0$ mezi sebou komutují a jsou diagonalizovatelné, tudíž ve vhodné bázi jsou současně diagonální. Je-li $X \in \mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0)$, pak $\mathrm{ad}_H(X) \in \mathfrak{g}_0$, což vzhledem k diagonalitě matic ad_H znamená $\mathrm{ad}_H(X) = 0$, tj. $X \in \cap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker \mathrm{ad}_H$. Maximalita $\mathfrak{g}_0$ pak implikuje $\cap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker \mathrm{ad}_H = \mathfrak{g}_0$, tj. $\mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$.

Naopak, mějme Cartanovu podalgebru $\mathfrak{g}_0$ a rozklad algebry $\mathfrak{g}$ do kořenových podprostorů $\mathfrak{g} = \dot{+}_{\lambda \in \Delta \cup \{0\}} \mathfrak{g}_\lambda$. Platí

$$\begin{aligned} &K\left([H_1, H_2], X\right) = 0, && \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0,\ X \in \mathfrak{g}_\lambda,\ \lambda \in \Delta, \\ &K\left([H_1, H_2], H_3\right) = \mathrm{tr}\big(\underbrace{\left[\mathrm{ad}_{H_1}, \mathrm{ad}_{H_2}\right]}_{\text{ostře hor. trojúh.}} \mathrm{ad}_{H_3}\big) = 0, && \forall H_1, H_2, H_3 \in \mathfrak{g}_0. \end{aligned}$$

Tudíž pro libovolná $H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0$ je $[H_1, H_2] \in \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$, tj. $\mathfrak{g}_0$ je abelovská. Je též maximální, protože $\mathrm{Norm}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$. Dále platí:

$$\mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda(H)\mathbb{I} + \underbrace{\cdots}_{\text{nad diag.}} \qquad \forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \lambda \in \Delta,$$

Tudíž v Jordanově rozkladu $\mathrm{ad}_H = S + N$, kde S je poloprostý a N nilpotentní, je $S|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda(H)\mathbb{I}$ pro $\lambda \in \Delta \cup \{0\}$. Takže pro všechna $X \in \mathfrak{g}_\lambda$, $Y \in \mathfrak{g}_\mu$, kde $\lambda, \mu \in \Delta \cup \{0\}$, máme:

$$S[X, Y] = (\lambda(H) + \mu(H))\,[X, Y] = [\lambda(H)X, Y] + [X, \mu(H)Y] = [SX, Y] + [X, SY].$$

Proto $S \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ a díky poloprostotě $\mathfrak{g}$ existuje $W \in \mathfrak{g}$ takové, že $S = \mathrm{ad}_W$ a $p \in \mathcal{P}[x]$ takové, že $S = \mathrm{ad}_W = p(\mathrm{ad}_H)$. Protože $\mathfrak{g}_0$ je abelovská, máme

$$[\mathrm{ad}_W, \mathrm{ad}_{H_1}] = [p(\mathrm{ad}_H), \mathrm{ad}_{H_1}] = 0, \qquad \forall H_1 \in \mathfrak{g}_0$$

díky $[\mathrm{ad}_H, \mathrm{ad}_{H_1}] = 0$. Současně $\mathfrak{g}$ je poloprostá a tedy $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \ker \mathrm{ad} = 0$, což implikuje $[W, \mathfrak{g}_0] = 0$. Z maximality pak dostáváme $W \in \mathfrak{g}_0$. Celkem tedy vidíme, že

$$N = \mathrm{ad}_H - S = \mathrm{ad}_H - \mathrm{ad}_W = \mathrm{ad}_{\underbrace{H-W}_{\in \mathfrak{g}_0}} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathrm{ad}_{H-W}) = \{0\}.$$

Proto vektor $H - W \in \mathfrak{g}_0$ splňuje $\lambda(H-W) = 0$ pro všechna $\lambda \in \Delta$, tudíž dle lemmatu 9.18 platí $H - W = 0$ a tedy $\mathrm{ad}_H = S$. □

Shrnutí pro komplexní poloprosté Lieovy algebry

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, $\Delta = \{\lambda\} \subset \mathfrak{g}_0^*$ odpovídající systém kořenů. Pak máme rozklad na kořenové podprostory $\mathfrak{g}_\lambda$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} \left(\dot{+}_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda\right),$$

které splňují

- $\lambda \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \neq 0 \quad \wedge \quad \mathfrak{g}_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker(\mathrm{ad}_H - \lambda(H)\mathbb{I}) \neq 0$,
- $[H_1, H_2] = 0$ pro všechna $H_1, H_2 \in \mathfrak{g}_0$,
- $\mathrm{ad}_H : \mathfrak{g}_\lambda \to \mathfrak{g}_\lambda$ je násobek jednotkového operátoru $\mathrm{ad}_H = \lambda(H) \cdot \mathbb{I}|_{\mathfrak{g}_\lambda}$ pro všechna $H \in \mathfrak{g}_0$, $\lambda \in \Delta$,
- $\mathrm{ad}_{X_\lambda} : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$, tj. ad_{X_λ} je nilpotentní pro všechny $\lambda \in \Delta$, $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$,
- $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda$ pro všechna $\lambda \in \Delta$, kde kolmost chápeme vzhledem ke Killingově formě.

Nadále se budeme zabývat pouze **komplexními poloprostými** algebrami.

Lemma 9.20. $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ pro všechny $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

Důkaz. Díky invariantnosti Killingovy formy pro libovolné $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $H \in \mathfrak{g}_0$ platí

$$(\alpha+\beta)(H)K(X_\alpha, X_\beta) = (\alpha(H) + \beta(H))\, K(X_\alpha, X_\beta) = K([H, X_\alpha], X_\beta) + K(X_\alpha, [H, X_\beta]) = 0$$

Protože $\alpha + \beta \neq 0$, existuje $H \in \mathfrak{g}_0$ takové, že $(\alpha+\beta)(H) \neq 0$ a tudíž $K(X_\alpha, X_\beta) = 0$. □

Lemma 9.21. $K|_{\mathfrak{g}_0} \equiv K|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$ je nedegenerovaná. Pro každý kořen $\lambda \in \Delta$ existuje jednoznačně určené $H_\lambda \in \mathfrak{g}_0$ takové, že pro všechna $H \in \mathfrak{g}_0$ je $\lambda(H) = K(H, H_\lambda)$.

Důkaz. Killingova forma K je na $\mathfrak{g}$ nedegenerovaná, tedy ke každému nenulovému $H \in \mathfrak{g}_0$ existuje $X \in \mathfrak{g}$ takové, že $K(H,X) \neq 0$. Zároveň $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\lambda$ pro $\lambda \in \Delta$, takže bez újmy na obecnosti lze takové X volit z $\mathfrak{g}_0$. Tudíž K je nedegenerovaná na $\mathfrak{g}_0$ a přiřazení $H \to K(\cdot, H)$ je izomorfismus vektorových prostorů $\mathfrak{g}_0$ a $\mathfrak{g}_0^*$, tj. ke každému $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ existuje právě jedno H_λ takové, že $\lambda(\cdot) = K(\cdot, H_\lambda)$. □

Lemma 9.22. Buď $\alpha \in \Delta$. Potom $-\alpha \in \Delta$ a pro všechna $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ je

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha.$$

Důkaz. $\alpha \in \Delta$ implikuje $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. Z lemmatu 9.20 plyne, že pro všechna $\mu \in \Delta \cup \{0\} \setminus \{-\alpha\}$ je $\mathfrak{g}_\mu \perp \mathfrak{g}_\alpha$. Kdyby platilo $-\alpha \notin \Delta$, tj. $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\}$, bylo by $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}$, tj. $\mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$, což je spor. Proto $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq \{0\}$. Pro všechna $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ a $H \in \mathfrak{g}_0$ platí:

$$\begin{aligned} K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha, H\big) &= K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}], H\big) - K(X_\alpha, X_{-\alpha}) \underbrace{K(H_\alpha, H)}_{\alpha(H)} = \\ &= -K\big(X_\alpha, \underbrace{[H, X_{-\alpha}]}_{-\alpha(H) X_{-\alpha}}\big) - K(X_\alpha, X_{-\alpha})\alpha(H) = \big(\alpha(H) - \alpha(H)\big) K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

Z nedegenerovanosti $K|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$ plyne $[X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha = 0$. □

Lemma 9.23. Pro libovolné $\alpha \in \Delta$ platí $\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) \neq 0$.

Důkaz. Protože $\mathfrak{g}_{-\alpha} \perp \mathfrak{g}_\beta$ pro $\beta \in (\Delta \cup \{0\}) \setminus \{\alpha\}$ a $\mathfrak{g}_{-\alpha} \not\perp \mathfrak{g}$, musí existovat $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ takové, že $K(X_{-\alpha}, X_\alpha) = 1$, tj. dle předchozího lemmatu $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. Uvažujme $\beta \in \Delta$ a $\mathfrak{g}_{\beta\alpha} = \dot{+}_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$. Pak operátory ad_{X_α}, $\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}$, ad_{H_α} ponechávají podprostor $\mathfrak{g}_{\beta\alpha}$ invariantní a platí

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}|_{\mathfrak{g}_{\beta\alpha}} \mathrm{ad}_{H_\alpha} &= \mathrm{tr}|_{\mathfrak{g}_{\beta\alpha}} \big[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\big] = 0 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\beta + k\alpha)(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} = \beta(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta\alpha} + \alpha(H_\alpha) \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}, \end{aligned}$$

tj.

$$\beta(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta\alpha} = -\alpha(H_\alpha) \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}.$$

Evidentně $\dim \mathfrak{g}_{\beta\alpha} \geq \dim \mathfrak{g}_\beta \geq 1$ a $\dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} \geq 0$ pro $k \neq 0$. Pokud by platilo $\alpha(H_\alpha) = 0$, pak by pro všechna $\beta \in \Delta$ muselo též platit $\beta(H_\alpha) = 0$ a tedy z nedegenerovanosti by nutně bylo $H_\alpha = 0$, což je spor s předpokladem $\alpha \in \Delta$. □

Definice 9.24. Pro daný kořen $\alpha \in \Delta$ definujeme

$$T_\alpha = \frac{2}{K(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha, \qquad a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)}. \tag{9.3}$$

Pro daný kořen $\alpha \in \Delta$ zvolme $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ splňující $K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}$. Pak platí

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_{-\alpha}] &= K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha = T_\alpha, \\ [T_\alpha, X_{\pm\alpha}] &= \pm 2 X_{\pm\alpha}, \end{aligned} \tag{9.4}$$

což jsou komutační relace Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ v bázi tvořené maticemi $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $X_+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $X_- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Věta 9.25 (Konečněrozměrné ireducibilní reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$)**.** Buď V komplexní vektorový prostor konečné dimenze. Nechť lineární operátory $T, X_\pm$ na V splňují komutační relace (9.4), tj.

$$[X_+, X_-] = T, \qquad [T, X_\pm] = \pm 2X_\pm$$

a působí na V ireducibilně. Potom existuje báze $\mathcal{E} = (v_j)_{j=0}^{\dim V - 1}$ splňující

$$Tv_j = (r-2j)v_j, \qquad X_-v_j = v_{j+1}, \qquad X_+v_j = j(r-j+1)v_{j-1},$$

kde $r = \dim V - 1$.

Důkaz. Operátor $T \in \mathcal{L}(V)$ má alespoň jeden vlastní vektor $v \in V$, $v \neq 0$ a jemu příslušné vlastní číslo $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, $Tv = \widetilde{\lambda}v$. Z komutačních relací platí

$$T(X_+v) = [T, X_+]v + X_+Tv = 2X_+v + \widetilde{\lambda}X_+v = (\widetilde{\lambda}+2)X_+v,$$

takže buď $X_+v = 0$ nebo $\widetilde{\lambda}+2 \in \sigma(T)$. Po konečně mnoha krocích získáme $v_0 \in V,\ v_0 \neq 0$ takové, že $Tv_0 = \lambda v_0$ a $X_+v_0 = 0$. Položíme $v_j = X_-^j v_0$, kde $j \in \mathbb{N}$. Indukcí zjišťujeme, že

$$\begin{aligned} Tv_j &= [T, X_-]X_-^{j-1}v_0 + X_-(TX_-^{j-1}v_0) = -2X_-X_-^{j-1}v_0 + X_-TX_-^{j-1}v_0 = \dots \\ &= (\lambda - 2j)X_-^j v_0 = (\lambda-2j)v_j. \end{aligned}$$

Vidíme, že pokud $v_j \neq 0$, pak jsou to vlastní vektory operátoru T příslušné různým vlastním číslům $(\lambda - 2j)$, tj. lineárně nezávislé. Díky konečnosti dimenze vektorového prostoru V existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $v_k \neq 0$, $v_{k+1} = 0$. Podprostor $\operatorname{span}\{v_0, \dots, v_k\}$ je z konstrukce uzavřený vůči působení T, X_-. Indukcí ukážeme že $X_+v_j = j(\lambda - j + 1)v_{j-1}$:

$$\begin{aligned} X_+v_1 &= X_+X_-v_0 = [X_+, X_-]v_0 + X_-X_+v_0 = Tv_0 = \lambda v_0, \\ X_+v_2 &= X_+X_-v_1 = Tv_1 + X_-X_+v_1 = (\lambda-2)v_1 + \lambda v_1 = 2(\lambda-1)v_1, \\ &\vdots \\ X_+v_j &= X_+X_-v_{j-1} = Tv_{j-1} + X_-(j-1)(\lambda - j + 2)v_{j-2} = \\ &= \big((\lambda - 2j + 2) + (j-1)(\lambda - j + 2)\big)v_{j-1} = j(\lambda - j + 1)v_{j-1}. \end{aligned}$$

Podprostor $\operatorname{span}\{v_0, \dots, v_k\}$ je tedy uzavřený i vůči X_+, tj. je to invariantní podprostor ireducibilní reprezentace. Proto platí $V = \operatorname{span}\{v_0, \dots, v_k\}$ a $k = r$. Současně máme $0 = X_+v_{r+1} = (r+1)(\lambda - r)v_r$, přičemž $v_r \neq 0$. Proto musí platit $\lambda = r$. □

Kapitola 10

Weylova-Chevalley normální forma poloprosté algebry, kořenové diagramy

Ukazuje se, že struktura kořenového systému dané poloprosté komplexní Lieovy algebry je natolik omezující, že v každé takové algebře můžeme najít význačnou bázi, v níž mají Lieovy závorky velmi speciální tvar. Vyjádření algebry v této bázi nazýváme Weylova-Chevalley normální forma dané poloprosté Lieovy algebry.

Dále se ukazuje, že kořeny poloprosté komplexní algebry definují svým lineárním obalem reálný podprostor ve vhodném Eukleidově prostoru, tj. lze analyzovat jejich strukturu metodami elementární geometrie (úhly, délky apod.).

10.1 Weylova-Chevalley normální forma poloprosté algebry

Lemma 10.1. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ příslušná množina kořenů. Pak platí

- Pro každou dvojici $\alpha, \beta \in \Delta$ existují $p, q \in \mathbb{Z}, p \leq 0 \leq q$, taková, že $\{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q}$ je nepřerušená posloupnost kořenů, případně obsahující 0. Žádné jiné kořeny tvaru $\beta + k\alpha$ neexistují a platí
$$a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = 2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = 2\frac{K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)} = -(p+q) \in \mathbb{Z}. \tag{10.1}$$
- Nechť $\alpha \in \Delta$. Potom $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ a jediné násobky α, které jsou kořeny, jsou $\beta = \pm\alpha$.
- Buď $\alpha, \beta \in \Delta$ takové, že $\alpha + \beta \neq 0$. Potom $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (Pokud $\alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}$, je z definice $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \{0\}$.)
- Buď $\alpha, \beta \in \Delta$, $a_{\beta\alpha} \neq 0$, $\epsilon = \mathrm{sgn} a_{\beta\alpha}$. Potom $\beta - \epsilon\alpha$, $\beta - 2\epsilon\alpha, \ldots, \beta - a_{\beta\alpha}\alpha$ jsou kořeny.

Důkaz. Uvažujme $\alpha, \beta \in \Delta$ a odpovídající kořenové vektory $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takové, že platí $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = T_\alpha$, $[T_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2 X_{\pm\alpha}$. Označme

$$V = \mathrm{span}\left\{ (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta \;\middle|\; j, k \in \mathbb{Z}_+^0 \right\} \subset \mathfrak{g}_{\beta\alpha} = \dot{+}_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}.$$

Protože platí $\mathrm{ad}_{T_\alpha} X_\beta = \beta(T_\alpha) X_\beta$, máme

$$\mathrm{ad}_{T_\alpha} \left(\mathrm{ad}_{X_\alpha}\right)^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta = \left(\beta(T_\alpha) + 2j - 2k\right) \left(\mathrm{ad}_{X_\alpha}\right)^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta.$$

Vidíme, že podprostor V je uzavřený vůči působení ad_{T_α} a $\mathrm{ad}_{X_{\pm\alpha}}$. Z důkazu věty 9.25 vidíme, že se jedná o ireducibilní reprezentaci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ na V a že pro každé získané vlastní číslo $\beta(T_\alpha) + 2j - 2k$ operátoru ad_{T_α} na V máme jediný vlastní vektor až na násobek. Dle věty 9.25 platí $r = \dim V - 1,\ \sigma\left(\mathrm{ad}_{T_\alpha}|_V\right) = \{r, r-2, \ldots, -r\}$, tj. platí

$$\left.\begin{array}{l} \{\beta(T_\alpha) + 2k\}_{k=p}^{q} = \{r, r-2, \ldots, -r\}, \\ \beta(T_\alpha) + 2q = r \\ \beta(T_\alpha) + 2p = -r \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \beta(T_\alpha) = -(p+q) \in \mathbb{Z}. \tag{10.2}$$

Dále označme $\widetilde{V} = \mathrm{span}\{X_{-\alpha}\} \dot{+} \dot{+}_{k\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{g}_{k\alpha}$, takže $\widetilde{V}$ je invariantní vzhledem k $\mathrm{ad}_{X_\alpha},\ \mathrm{ad}_{T_\alpha}$ a $\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}$. Proto má smysl rovnost $\mathrm{ad}_{T_\alpha}|_{\widetilde{V}} = \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}|_{\widetilde{V}}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}|_{\widetilde{V}}}\right]$, z níž plyne

$$0 = \mathrm{tr}|_{\widetilde{V}} \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right] = \mathrm{tr}|_{\widetilde{V}}\, \mathrm{ad}_{T_\alpha} = -\underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{=2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} k \underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{=2} \dim \mathfrak{g}_{k\alpha}.$$

Tudíž $\sum_{k\in\mathbb{N}} k \dim \mathfrak{g}_{k\alpha} = 1$, tj. $\mathfrak{g}_\alpha = 1,\ \mathfrak{g}_{k\alpha} = 0,\ \forall k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$. V důsledku $k\alpha \notin \Delta,\ \forall k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$. Použitím $\frac{\alpha}{k}$ místo α obdobně dostáváme, že $\frac{\alpha}{k} \notin \Delta,\ \forall k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$. Nechť $\beta = c\alpha,\ c \notin \mathbb{Z}$. Máme

$$\beta(T_\alpha) = c\alpha(T_\alpha) = 2c = b \in \mathbb{Z}$$

ze vztahu (10.2). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c > 0$ (jinak $\alpha \to -\alpha$), pak

$$c = \frac{b}{2},\ b \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q} = \left\{\left(\frac{b}{2} + k\right)\alpha\right\}_{k=p}^{q} \in \Delta.$$

Zároveň ale platí $b = -(p+q),\ p \leq 0 \leq q$, z čehož plyne $-\frac{b}{2} + \frac{1}{2} \geq -b \geq p$, takže

$$\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{b}{2} + \underbrace{\left(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{\geq p}\right)\alpha \in \Delta$$

což je spor s tím, že $\frac{\alpha}{2} \notin \Delta$. Tím je dokázáno druhé tvrzení. Zbylou část prvního dokážeme sporem: nechť existuje $\widetilde{\beta} = \beta + n\alpha,\ n < p$ nebo $n > q$. Zkonstruujeme nepřerušenou posloupnost kořenů z $\widetilde{\beta} \in \Delta$ a vyjádříme ji ve tvaru $\{\beta + k\alpha\}_{k=\widetilde{p}}^{\widetilde{q}}$. Díky tomu, že $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ pro libovolné $\alpha \in \Delta$, musí být $\{p, \ldots, q\} \cap \{\widetilde{p}, \ldots, \widetilde{q}\} = \emptyset$ a tedy $\widetilde{p} > q$ nebo $\widetilde{q} < p$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\widetilde{q} < p$. Současně musí platit $a_{\beta\alpha} = -(\widetilde{p} + \widetilde{q})$, takže

$$\widetilde{p} + \widetilde{q} < \widetilde{p} + p < 2p \leq p + q$$

což dává jasný spor $\alpha_{\beta\alpha} < \alpha_{\beta\alpha}$. Tím je první tvrzení zcela dokázáno. Třetí tvrzení plyne z ireducibility reprezentace konstruované na V. Zbývá tedy už jen poslední, čtvrté tvrzení. Protože $p \leq 0 \leq q$, platí $p \leq p + q = -a_{\beta\alpha} \leq q$, tj. $\beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$ dle bodu 1 a tedy i $\beta - \epsilon k\alpha \in \Delta$ pro všechna $k \leq |a_{\beta\alpha}|$. □

Definice 10.2. $a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = 2\frac{K(H_\beta,H_\alpha)}{K(H_\alpha,H_\alpha)} = -(p+q)$ nazýváme **Cartanova celá čísla**.

Věta 10.3. (**Weylova-Chevalley normální forma**) Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ příslušný systém kořenů. Pak $\mathfrak{g}$ jako vektorový prostor je direktním součtem $\mathfrak{g}_0$ a jednorozměrných kořenových podprostorů $\mathfrak{g}_\alpha = \text{span}\{E_\alpha\}$. Platí:

- $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha,\ \forall H \in \mathfrak{g}_0$,
- $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_0$, $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \neq 0,\ \ \forall\alpha \in \Delta$,
- $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$ pro $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha + \beta \neq 0$. Pokud navíc $\alpha + \beta \in \Delta$, je $N_{\alpha\beta} \neq 0$.

Důkaz. Plyne z předchozího lemmatu. □

Bez důkazu uveďme, že výše zavedené $N_{\alpha\beta}$ při vhodném výběru E_α splňují $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$, $N_{\alpha\beta} = -N_{(-\alpha)(-\beta)} = \pm(-p+1)$, kde $p \leq 0$ je nejmenší číslo splňující $\beta + p\alpha \in \Delta$.

10.2 Kořenové diagramy, Cartanova matice

Kořenové diagramy jsou vyjádřením kořenů komplexní poloprosté Lieovy algebry jako vektorů ve vhodném Eukleidově prostoru. Pomáhají nám pochopit strukturu kořenového systému dané algebry a tvoří základní východisko pro klasifikaci všech poloprostých algeber.

Definice 10.4. Zavádíme označení pro reálné vektorové prostory definované jako reálné lineární obaly všech vektorů H_α a všech kořenů α

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}\text{–span}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}, \qquad\qquad \mathfrak{h}^* = \mathbb{R}\text{–span}\{\alpha\}_{\alpha\in\Delta}.$$

Níže ukážeme konstrukcí vhodného skalárního součinu, že $\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{h}^*$ jsou navzájem duální vektorové prostory, jak zavedené značení naznačuje.

Věta 10.5. Bilineární symetrické zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\langle\alpha,\beta\rangle = K(H_\alpha, H_\beta)$ je skalární součin na $\mathfrak{h}^*$.

Důkaz. Protože $a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) \in \mathbb{Z},\ a_{\alpha\alpha} = \alpha(T_\alpha) = 2$, platí při vyjádření v rozkladu (9.1)

$$\begin{aligned} K(H_\alpha, H_\beta) &= \text{tr}\left(\text{ad}_{H_\alpha} \circ \text{ad}_{H_\beta}\right) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \tilde\alpha(H_\alpha)\tilde\alpha(H_\beta) = \\ &= \left(\frac{1}{4}\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \underbrace{a_{\tilde\alpha\alpha}a_{\tilde\alpha\beta}}_{\in\mathbb{Z}}\right) K(H_\alpha, H_\alpha)K(H_\beta, H_\beta). \end{aligned} \tag{10.3}$$

Speciálně dosazením $\beta = \alpha$ zjišťujeme, že

$$\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) = \frac{\left(\alpha(H_\alpha)\right)^2}{4}\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a_{\tilde\alpha\alpha}^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha(H_\alpha) = \frac{4}{\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a_{\tilde\alpha\alpha}^2} > 0.$$

Vidíme, že $K(H_\alpha, H_\alpha) \in \mathbb{R}$ a tedy dle rovnice (10.3) i $K(H_\alpha, H_\beta) \in \mathbb{R}$, tj. $K|_\mathfrak{h}$ je reálná symetrická bilineární forma. Též vidíme, že $T_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha \in \mathfrak{h}$. Pro $H \in \mathfrak{h}$, $H = \sum_\alpha h_\alpha T_\alpha$, $h_\alpha \in \mathbb{R}$ máme:

$$K(H,H) = \sum_{\tilde{\alpha}\in\Delta} \tilde{\alpha}(H)\tilde{\alpha}(H) = \sum_{\tilde{\alpha}\in\Delta} \tilde{\alpha}(H)^2 = \sum_{\tilde{\alpha}\in\Delta} \left(\sum_{\alpha\in\Delta} \underbrace{h_\alpha}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\tilde{\alpha}(T_\alpha)}_{\in\mathbb{Z}} \right)^2 \geq 0$$

Pokud $K(H,H) = 0$, pak musí být $\tilde{\alpha}(H) = 0$ pro všechny $\tilde{\alpha} \in \Delta$. To dle věty 9.18 implikuje $H = 0$. Takže reálná forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je pozitivně definitní a tedy definuje skalární součin na $\mathfrak{h}$. □

Poznámka 10.6. Máme-li $H \in \mathfrak{h}$, pak $\mathrm{i}H \notin \mathfrak{h}$ neboť $K(\mathrm{i}H, \mathrm{i}H) = -K(H,H)$. Protože $\mathfrak{h}_\mathbb{C} = \mathfrak{g}_0$ (neboť komplexní lineární obal Δ je celé $\mathfrak{g}_0^*$ a totéž platí pro H_α a $\mathfrak{g}_0$ neboť máme izomorfismus definovaný pomocí Killingovy formy), je $\dim_\mathbb{R} \mathfrak{h} = \dim_\mathbb{C} \mathfrak{g}_0$.

Definice 10.7. Kořenový diagram je vyjádření kořenů $\alpha \in \Delta$ jako vektorů v Euklidově prostoru $\mathfrak{h}^*$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definice 10.8. Zrcadlení podle nadroviny kolmé ke kořenu α je lineární zobrazení $S_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$

$$S_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha.$$

Poznámka 10.9. Dvojitou aplikací S_α dostáváme

$$S_\alpha\left(S_\alpha(\lambda)\right) = S_\alpha\left(\lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha\right) = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha - \lambda(T_\alpha)(\alpha - 2\alpha) = \lambda,$$

takže ve shodě s tím, co od zrcadlení očekáváme, máme $S_\alpha^2 = \mathbb{I}$.

Podle čtvrtého tvrzení lemmatu 10.1 je pro každou dvojici kořenů $\alpha, \beta \in \Delta$ výsledek aplikace zrcadlení opět kořen, $S_\alpha(\beta) \in \Delta$. Proto lze chápat S_α jako zobrazení $S_\alpha : \Delta \to \Delta$ pro každý zvolený kořen $\alpha \in \Delta$.

Definice 10.10. Weylova grupa $\mathcal{W}$ kořenového systému Δ je grupa lineárních operátorů na $\mathfrak{h}^*$ generovaná všemi zobrazeními S_α, kde $\alpha \in \Delta$.

Poznámka 10.11. Protože i prvky Weylovy grupy musí stejně jako její generátory zobrazovat kořeny na kořeny, je Weylova grupa izomorfní nějaké podgrupě grupy všech permutací S_Δ kořenového systému Δ. Z tohoto důvodu je Weylova grupa je konečná.

Podobně, všechna zrcadlení S_α zachovávají délky a úhly, tj. jsou ortogonálními zobrazeními. Proto i Weylova grupa jimi generovaná je podgrupou ortogonální grupy $O(\mathfrak{h}^*)$.

Vyberme libovolné $H_0 \in \mathfrak{h}$ takové, že $\alpha(H_0) \neq 0$ pro všechny kořeny $\alpha \in \Delta$. H_0 považujeme dále za pevně zvolené.

Definice 10.12. Definujeme množiny **kladných**, resp. **záporných, kořenů** předpisem

$$\Delta^\pm = \{\alpha \in \Delta | \alpha(H_0) \gtrless 0\}.$$

Na Δ definujeme částečné uspořádání $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha(H_0) \leq \beta(H_0)$.

Volba rozkladu na kladné a záporné kořeny evidentně závisí na volbě vektoru H_0.

Poznámka 10.13. Protože ke každému kořenu $\alpha \in \Delta^+$ existuje kořen opačný $-\alpha \in \Delta$, pro který evidentně platí $-\alpha \in \Delta^-$, je stejný počet kladných a záporných kořenů. Dále vidíme, že pro $\alpha, \beta \in \Delta^+$ takové, že $\alpha + \beta \in \Delta$, je $\alpha + \beta \in \Delta^+$. Tyto dvě vlastnosti lze použít jako alternativní definici rozdělení na kladné a záporné kořeny místo výběru vektoru H_0.

Definice 10.14. Při zvoleném rozdělení $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ definujeme **prosté kořeny** jako ty kladné kořeny, které nelze zapsat jako součet dvou jiných kladných kořenů,

$$\Delta^P = \{\alpha \in \Delta^+ | \forall \beta, \gamma \in \Delta^+,\ \beta + \gamma \neq \alpha\}.$$

Věta 10.15 (Vlastnosti kořenového diagramu)**.** Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ odpovídající systém kořenů rozdělený pomocí $H_0 \in \mathfrak{h}$ na kladné a záporné. Pak platí

- Každý $\alpha \in \Delta^+$ lze zapsat jako lineární kombinaci prostých kořenů
$$\alpha = \sum_{\beta \in \Delta^P} c_\beta \beta,$$
kde $c_\beta \in \mathbb{N}_0$.
- Pro každou dvojici různých prostých kořenů $\alpha, \beta \in \Delta^P$, $\alpha \neq \beta$ platí $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$, tj. úhel mezi prostými kořeny je tupý (či pravý).
- Prosté kořeny Δ^P tvoří bázi $\mathfrak{h}^*$ a $\mathfrak{g}_0^*$.

Důkaz. Buď $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta^P$. Pak existují $\beta, \gamma \in \Delta^+$ takové, že $\beta + \gamma = \alpha$. Tudíž z definice uspořádání máme $\alpha > \beta, \gamma$. Postup opakujeme pro β a γ, pokud nejsou prosté. Iterujeme, dokud po konečně mnoha krocích nedostaneme součet prostých kořenů - uspořádání nám zaručuje, že se nemůže postup zacyklit. Protože se mohou stejné prosté kořeny opakovat z různých větví výpočtu, dostáváme celočíselné nezáporné koeficienty v lineární kombinaci $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta^P} c_\beta \beta$.

Uvažujme $\alpha, \beta \in \Delta^P$ takové, že $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$. Pak platí $\alpha(T_\beta), \beta(T_\alpha) > 0$ a tedy dle lemmatu 10.1 jsou $\alpha - \beta, \beta - \alpha \in \Delta$, přičemž jeden z nich je kladný, druhý záporný. Bez újmy na obecnosti nechť je $\alpha - \beta \in \Delta^+$. Tím nacházíme spor s předpokladem, neboť $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, tj. $\alpha \notin \Delta^P$.

Zbývá ukázat lineární nezávislost Δ^P. Mějme reálnou lineární kombinaci prostých kořenů rovnou nule a rozdělme její koeficienty na kladné a záporné,

$$\sum_{\alpha_i \in \Delta^P} x_i \alpha_i = \sum_{j \in J} p_j \alpha_j - \sum_{k \in K} n_k \alpha_k = 0,$$

kde $\{\alpha_j\}_{j \in J} \cap \{\alpha_k\}_{k \in K} = \emptyset$, $\{\alpha_j\}_{j \in J} \cup \{\alpha_k\}_{k \in K} \subset \Delta^P$, $p_j > 0$, $n_k > 0$. Protože $\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle \leq 0$ pro všechna $j \in J$, $k \in K$, musí pro $\widetilde{x} = \sum_{j \in J} p_j \alpha_j = \sum_{k \in K} n_k \alpha_k$ platit:

$$\langle \widetilde{x}, \widetilde{x} \rangle = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} p_j n_k \underbrace{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}_{\leq 0} \leq 0$$

Tudíž $\widetilde{x}$ je nulový vektor v $\mathfrak{h}^*$, $\widetilde{x} = 0$. Současně ale $\widetilde{x}(H_0) = \sum_{j \in J} p_j \alpha_j(H_0) = \sum_{k \in K} n_k \alpha_k(H_0)$ jsou součty kladných čísel. Jediná možnost nevedoucí ke sporu je, že sumy probíhají přes prázdné množiny, tj. $J = K = \emptyset$. Vidíme tedy, že $\{\alpha_i\} \in \Delta^P$ jsou lineárně nezávislé v $\mathfrak{h}^*$, tvoří tedy jeho bázi. Protože $(\mathfrak{h}^*)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0^*$, tvoří $(\alpha_i)_{i=1}^l \in \Delta^P$ též bázi $\mathfrak{g}_0^*$.

□

Při konstrukci kořenového diagramu je třeba začít prostými kořeny. Aplikací zrcadlení S_α, kde $\alpha \in \Delta^P$, získáme další kořeny (kladné i záporné). Zrcadlením i vzhledem k nově získaným kořenům a opakovanými iteracemi tohoto postupu konstruujeme kořeny tak dlouho, až získáme množinu $\widetilde{\Delta}$ uzavřenou vůči všem zrcadlením S_α, kde $\alpha \in \widetilde{\Delta}$. Lze obecně ukázat nebo v každém konkrétním případě ověřit, že tím získáváme celou množinu kořenů, tj. $\widetilde{\Delta} = \Delta$. Z tohoto postupu mj. plyne, že délka libovolného kořenu je rovna délce nějakého prostého kořenu.

Definice 10.16. Cartanova matice $\mathcal{A}$ je tvořena složkami $a_{ij} = 2\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle},\ \alpha_i, \alpha_j \in \Delta^P$.

Lze se v literatuře setkat i s transponovanou konvencí pro $\mathcal{A}$.

Poznámka 10.17. Z vlastností kořenů přímo plynou následující vlastnosti Cartanovy matice $\mathcal{A}$:

- $a_{ii} = 2$,
- $a_{ij} \leq 0$ pro $i \neq j$,
- $a_{ij}a_{ji} = 4\frac{|\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle|^2}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = 4\underbrace{\cos^2 \sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j)}_{<1 \text{ díky LN } \alpha_i,\alpha_j} \quad \Rightarrow \quad a_{ij}a_{ji} \in \{0,1,2,3\}.$

  Tudíž $\cos\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) \in \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, tj. $\sphericalangle(\alpha_i,\alpha_j) \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Kapitola 11

Dynkinovy diagramy a klasifikace poloprostých komplexních Lieových algeber

Struktura kořenů, tj. kořenový diagram, je základním kamenem pro úplnou klasifikaci poloprostých komplexních Lieových algeber, kterou poprvé kompletně odvodil francouzský matematik Élie Cartan (1869–1951) ve své disertační práci v roce 1894. Na úrovni ne zcela dokázané domněnky ke stejné klasifikaci před ním dospěl německý matematik Wilhelm Killing (1847–1923) v letech 1888 až 1890.

V současnosti se z pedagogických důvodů klasifikace obvykle odvozuje pomocí studia Dynkinových diagramů, které zavedl ruský matematik Eugene Dynkin (1924 – 2014) v roce 1947 společně s definicí prostých kořenů. Tohoto přístupu se budeme držet i my.

Definice 11.1. Dynkinův diagram poloprosté komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, resp. jejího kořenového systému Δ, je graf sestrojený podle následujících pravidel:

- jeho vrcholy odpovídají prostým kořenům $\Delta^P = \{\alpha_j\}_{j=1}^l$, kde $l = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0 = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}$,
- vrcholy α_j, α_k jsou spojeny $a_{jk}a_{kj}$ hranami, tj. dva vrcholy spojují maximálně 3 hrany. Pokud je hran více, zakreslíme šipku směrem k delšímu kořenu (ve smyslu normy na $\mathfrak{h}^*$ indukované $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Konvence týkající se značení délky prostých kořenů se mohou v různých zápisech lišit. Někdo používá plné a duté značky pro vrcholy pro znázornění dvou možných délek kořenů (z klasifikace vyplyne, že jich více potřeba není), někdo kreslí šipku doprostřed hrany v opačném směru a interpretuje ji jako znak nerovnosti (tj. větší či menší).

Uvažujme případ $1 < a_{jk}a_{kj} \leq 3$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_{jk} = -1,\ a_{kj} < -1$ (jinak zaměníme α_j a α_k). Pak platí

$$1 > \frac{a_{jk}}{a_{kj}} = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = \frac{\|\alpha_j\|^2}{\|\alpha_k\|^2},\ \text{tj.}\ \|\alpha_k\|^2 = -a_{kj} \|\alpha_j\|^2 .$$

Máme tedy $\|\alpha_k\| = \sqrt{2}\,\|\alpha_j\|$ nebo $\|\alpha_k\| = \sqrt{3}\,\|\alpha_j\|$ dle hodnoty $a_{jk}a_{kj}$.

Poznámka 11.2. Z Dynkinova diagramu je možné jednoznačně zrekonstruovat Cartanovu matici.

Věta 11.3. Mějme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a kořenovým systémem $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$. Pokud existuje rozklad kořenového systému na dva disjunktní kolmé podsystémy $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, pro všechna $\alpha \in \Delta_1$ a $\beta \in \Delta_2$, pak Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je direktním součtem dvou ideálů

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2,$$

kde

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{1,0} \dot{+} \dot{+}_{\alpha\in\Delta_1}\mathfrak{g}_\alpha, && \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_{2,0} \dot{+} \dot{+}_{\beta\in\Delta_2}\mathfrak{g}_\beta, && \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{1,0} \oplus \mathfrak{g}_{2,0} \\ &\mathfrak{g}_{1,0} = \mathrm{span}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta_1}, && \mathfrak{g}_{2,0} = \mathrm{span}\{H_\beta\}_{\beta\in\Delta_2}, && K(\mathfrak{g}_{1,0}, \mathfrak{g}_{2,0}) = 0. \end{aligned}$$

Důsledek 11.4. Souvislé komponenty Dynkinova diagramu odpovídají prostým ideálům, neboť rozklad prostých kořenů na dva disjunktní podsystémy již implikuje rozklad celého kořenového systému (prosté kořeny tvoří bázi a jsou-li $\alpha, \beta \in \Delta^P$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, pak $\alpha + \beta$ ani $\alpha - \beta$ není kořen).

Důkaz. V celém důkazu značí $\alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$ libovolná. Z vztahu

$$K(H_\alpha, H_\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha(T_\beta)\frac{K(H_\beta, H_\beta)}{2} = 0$$

plyne, že $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{1,0} \oplus \mathfrak{g}_{2,0}$ a tedy z definice $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2$. Též vidíme, že platí $\alpha(T_\beta) = a_{\alpha\beta} = \beta(T_\alpha) = 0$. Z toho vyplývá, že $[H_\alpha, E_\beta] = \beta(H_\alpha)E_\beta = 0 = [H_\beta, E_\alpha]$. Dále $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, kdykoliv je $\alpha + \beta \in \Delta$. Ale $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, tj. bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha + \beta \in \Delta_1$. Pak $\langle \alpha + \beta, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle \neq 0$, což je spor. Tj. $\alpha + \beta \notin \Delta$, což implikuje $[E_\alpha, E_\beta] = 0$. Vidíme tedy, že každá dvojice bazických vektorů z $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ komutuje. Zbývá ověřit, že pro $\alpha, \tilde{\alpha} \in \Delta_1$ je $[E_\alpha, E_{\tilde{\alpha}}] \in \mathfrak{g}_1$. To dokážeme sporem: nechť $[E_\alpha, E_{\tilde{\alpha}}] \in \mathfrak{g}_2$, tj. $\alpha + \tilde{\alpha} \in \Delta_2$. Pak $\langle \alpha + \tilde{\alpha}, \alpha + \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha + \tilde{\alpha}, \alpha \rangle + \langle \alpha + \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} \rangle = 0$ z kolmosti Δ_1 a Δ_2, což je spor. Vidíme tedy, že $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ jsou dva ideály v $\mathfrak{g}$, tj. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. □

Nadále se budeme zabývat pouze souvislými Dynkinovými diagramy, tj. prostými algebrami.

Lemma 11.5. Nechť $\alpha_j, \alpha_k \in \Delta^P$, $j \neq k$, $\|\alpha_j\| \leq \|\alpha_k\|$. Potom počet hran spojujících α_j a α_k v Dynkinově diagramu je roven $\#\{n \in \mathbb{Z} | \alpha_k + n\alpha_j \in \Delta\} - 1$.

Důkaz. Počet hran mezi α_j, α_k je $a_{jk}a_{kj} = 4\frac{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle^2}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle \langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} \in \{0, 1, 2, 3\}$. Pokud $a_{jk}a_{kj} = 0$, pak je $\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle = 0$, tj. $\alpha_k + n\alpha_j \notin \Delta$, pro všechna $n \neq 0$ (připomeňte si lemma 10.1 a uvědomte si, že pro prosté kořeny $\alpha_k - n\alpha_j$, $n \in \mathbb{N}$ nikdy není kořen díky větě 10.15, tj. $p = 0$ v lemmatu 10.1). Pokud $a_{jk}a_{kj} \in \{1, 2, 3\}$ pak dle předpokladu je $a_{jk} = 2\frac{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = -1$, $a_{kj} = 2\frac{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \in \{-1, -2, -3\}$. Dle lemmatu 10.1 je $\{\alpha_k + n\alpha_j\}_{n=p}^{q} \subset \Delta$, kde $p = 0, -(p + q) = -q = a_{kj}$, množina všech kořenů tvaru $\alpha_k + n\alpha_j$. Takže máme $a_{jk}a_{kj} = \#\{n \in \mathbb{Z} | \alpha_k + n\alpha_j \in \Delta\} - 1$. □

Poznámka 11.6. Označme $e_j = \frac{\alpha_j}{\|\alpha_j\|}$, kde $\alpha_j \in \Delta^P$, tj. $(e_j)_{j=1}^{l} \equiv \Delta^P_{(N)}$ je normovaná báze $\mathfrak{h}^*$. Nechť $n_{jk} = a_{jk}a_{kj}$ je počet hran spojujících α_j a α_k. Pak platí $\langle e_j, e_k \rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{n_{jk}}$. Pro libovolný $x = \sum_j x_j e_j \neq 0$ zjišťujeme, že

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_j x_j^2 + 2\sum_{j<k} x_j x_k \langle e_j, e_k \rangle = \sum_j x_j^2 - \sum_{j<k} x_j x_k \sqrt{n_{jk}} > 0\,. \qquad (11.1)$$

Definice 11.7. Graf s l vrcholy nazýváme **přípustný**, pokud konstanty n_{jk} jím určené definují předpisem

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{l} x_j^2 - \sum_{j<k} x_j x_k \sqrt{n_{jk}}.$$

pozitivně definitní skalární součin na $\mathbb{R}^l$ se souřadnicemi $x_1, \ldots, x_l$.

Evidentně, je-li graf přípustný, musí být přípustný i jakýkoliv jeho podgraf (tj. graf obsahující výběr vrcholů z původního grafu a všechny hrany tyto vybrané vrcholy spojující).

Lemma 11.8. Přípustné grafy

- neobsahují uzavřené smyčky,
- v každém jejich vrcholu se setkávají nejvýše tři hrany,
- nahradíme-li dvojici vrcholů přípustného grafu spojených jednou hranou jediným vrcholem dostaneme opět přípustný graf.

Důsledek 11.9. Grafy



nejsou přípustné.

Důkaz.

- Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ odpovídají minimální uzavřené smyčce, tj. neobsahující žádnou podsmyčku. Položíme $x = \sum_{j=1}^{k} e_j$, tj. $\langle e_j, e_{j+1}\rangle \neq 0$, $\langle e_k, e_1\rangle \neq 0$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, kdykoliv $i < j - 1$. Ztotožníme $k + 1 \equiv 1$. Pak

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{k} 1 - \sum_{j=1}^{k} \sqrt{n_{j,j+1}} \leq k - k = 0,$$

  tj. nacházíme nepřípustný graf.

- Nechť $e_0 \in \Delta_{(N)}^P$ odpovídá vrcholu přípustného grafu a je spojený hranami s vrcholy odpovídajícími $\{e_j\}_{j=1}^k$. Pak $x = e_0 - \sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle e_j \neq 0$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ kdykoliv $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$. Máme

$$\langle x, x\rangle = 1 + \sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle^2 - 2\sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle\langle e_0, e_j\rangle = 1 - \sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle^2 > 0,$$

$$\text{tj. } 1 > \sum_{j=1}^{k} \langle e_0, e_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \alpha_0, \alpha_j\rangle^2}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{4} \underbrace{a_{0j} a_{j0}}_{=n_{0j}}.$$

  Tudíž počet hran setkávajících se ve vrcholu $\alpha_0 \equiv e_0$ je menší než 4.

- Nechť α_1, α_2 jsou spojené hranou v přípustném grafu. Pro libovolné $x = \sum_{j=1}^{l} x^j e_j$ platí

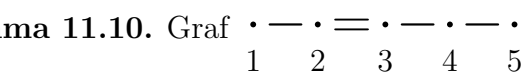
  $$\langle x, x\rangle = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - x^1 x^2 + p_1\left(x^3, \ldots, x^l\right) x^1 + p_2\left(x^3, \ldots, x^l\right) x^2 + p_3\left(x^3, \ldots, x^l\right),$$

  kde p_1, p_2, p_3 jsou jisté lineární a kvadratické polynomy v uvedených proměnných. Nahraďme vrcholy e_1, e_2 jediným sloučeným vrcholem e_{12}. Pro $y = x^{12} e_{12} + \sum_{j=3}^{l} x^j e_j$ spočítáme jeho kvadrát normy dosazením $x^1 = x^2 = x^{12}$ do $\langle x, x\rangle$ a vynecháním jednoho příspěvku $\left(x^{12}\right)^2$ za dvojnásobně započítaný vrchol a stejného příspěvku za zrušenou hranu

  $$\langle y, y\rangle = \left(x^{12}\right)^2 + \left(p_1\left(x^3, \ldots, x^l\right) + p_2\left(x^3, \ldots, x^l\right)\right) x^{12} + p_3\left(x^3, \ldots, x^l\right).$$

  Vidíme, že máme opět pozitivně definitní skalární součin, nyní odpovídající sloučenému grafu.

□

Lemma 11.10. Graf  není přípustný.

Důkaz. Uvažujme $x = \sum_{j=1}^{5} x^j e_j$,

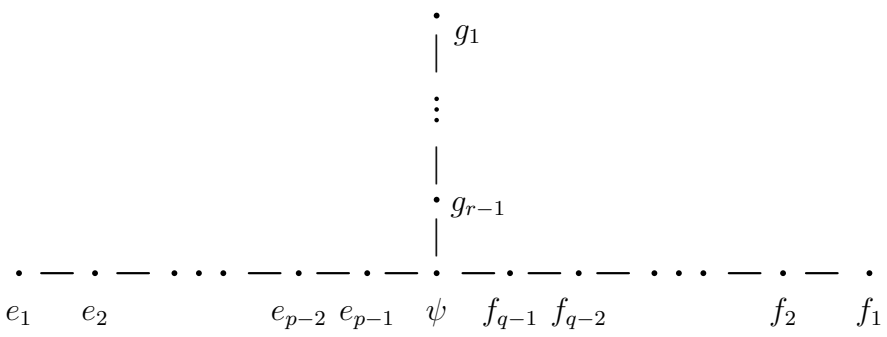
$$Q(x) = \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{5} \left(x^j\right)^2 - x^1 x^2 - \sqrt{2} x^2 x^3 - x^3 x^4 - x^4 x^5$$

a najděme minimum $Q(x)$. Extrém je určen rovnicemi $\frac{\partial Q}{\partial x^j} = 0$, tj.

$$\begin{aligned} 2x^1 - x^2 &= 0, & 2x^2 - x^1 - \sqrt{2}x^3 &= 0, & 2x^3 - \sqrt{2}x^2 - x^4 &= 0, \\ 2x^4 - x^3 - x^5 &= 0, & 2x^5 - x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením vidíme, že $Q(x)$ nabývá extrému pro libovolný násobek $x = \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3, 2, 1\right)$, kde $Q(x) = \langle x, x\rangle = 0$. Takže $\langle ., .\rangle$ není pozitivně definitní, tj. uvedený diagram není přípustný. □

Lemma 11.11. Uvažujme diagram tvaru



kde $\|\psi\| = \|e_j\| = \|f_j\| = \|g_j\| = 1$ a $p \geq q \geq r \geq 2$. Pak

- definujeme-li $x = \sum_{j=1}^{p-1} j e_j,\ y = \sum_{j=1}^{q-1} j f_j,\ z = \sum_{j=1}^{r-1} j g_j$, je

  $$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle = 0,\ \langle x, x\rangle = \frac{p(p-1)}{2},\ \langle y, y\rangle = \frac{q(q-1)}{2},\ \langle z, z\rangle = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Důkaz.

$$\langle x,x\rangle = \sum_{j=1}^{p-1} j^2 - \sum_{j=1}^{p-2} j(j+1) = (p-1)^2 - \sum_{j=1}^{p-2} j = (p-1)^2 - \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \\ = \frac{p(p-1)}{2},$$

ostatní části tvrzení dokazujeme obdobně. □

- Buďte $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ úhly mezi x, y, z a ψ. Pak je $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z < 1$.

  Důkaz. Uvědomme si že, x, y, z jsou navzájem kolmé a uvažme (neúplný) Fourierův rozklad vektoru ψ do x, y, z. Zjišťujeme, že

$$\psi - \sum_{u\in\{x,y,z\}} \frac{\langle\psi,u\rangle}{\|u\|} u \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 > \sum_{u\in\{x,y,z\}} \frac{|\langle\psi,u\rangle|^2}{\langle u,u\rangle} = \sum_{u\in\{x,y,z\}} \cos^2 \sphericalangle(\psi,u).$$

  □

- Platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$.

  Důkaz.

$$\frac{|\langle\psi,x\rangle|^2}{\langle x,x\rangle} = \frac{|\langle\psi,(p-1)e_{p-1}\rangle|^2}{\langle x,x\rangle} = \frac{(p-1)^2}{\frac{p(p-1)}{2}} \underbrace{|\langle\psi,e_{p-1}\rangle|^2}_{=\frac{1}{4}} = \frac{(p-1)}{2p}$$

  Z předchozího tvrzení máme

$$1 > \sum_{u\in\{x,y,z\}} \frac{|\langle\psi,u\rangle|^2}{\langle u,u\rangle} = \frac{p-1}{2p} + \frac{q-1}{2q} + \frac{r-1}{2r} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right),$$

  tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$. □

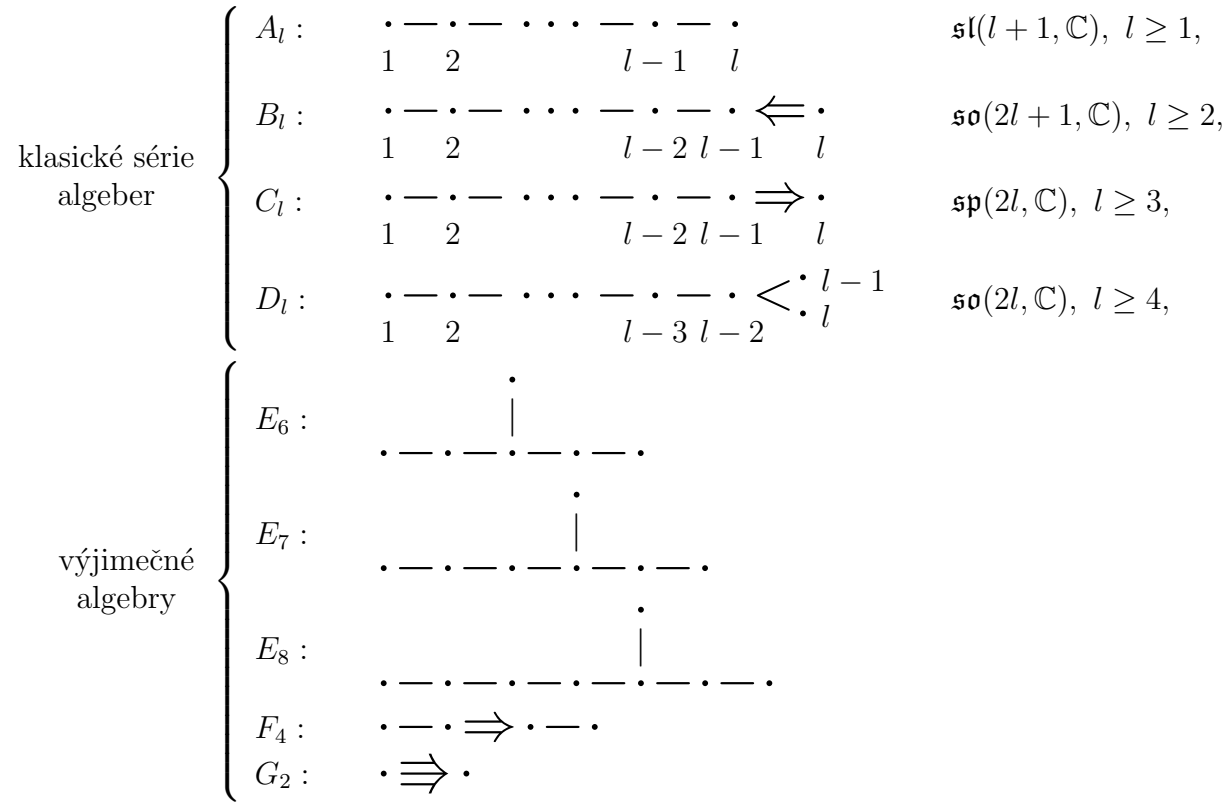
- Přípustné možnosti pro parametry p, q, r tudíž jsou pouze následující

$$\begin{array}{lll} r=2, & q=2, & p\geq 2, \\ r=2, & q=3, & p=3,4,5. \end{array}$$

Poznámka 11.12. Je dobré si uvědomit, že kořenové vektory pozitivních kořenů společně s $\mathfrak{g}_0$ tvoří řešitelnou podalgebru v $\mathfrak{g}$, podprostor tvořený lineárními kombinacemi kořenových vektorů pozitivních kořenů tvoří nilpotentní podalgebru v $\mathfrak{g}$.

Věta 11.13 (Cartanova o klasifikaci prostých algeber)**.** Buď $\mathfrak{g}$ komplexní prostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ systém kořenů, $\Delta^P \subset \Delta$ prosté kořeny. Pak její

Dynkinův diagram má jednu z následujících podob:



Důkaz. Výše jsme ukázali, že toto jsou všechny přípustné diagramy, existence příslušných algeber byla dokázána jejich zkonstruováním, jednoznačnost plyne z Weylovy-Chevalley normální formy, pokud se detailně uváží struktura konstant $N_{\alpha\beta}$ (což jsme zde neprovedli). □

Při identifikaci Dynkinova diagramu dané algebry ze známé struktury kořenů či z Cartanovy matice lze pro určení směru šipky využít vztah

$$\frac{\|\alpha_i\|}{\|\alpha_j\|} = \sqrt{\frac{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}} = \sqrt{\frac{a_{ij}}{a_{ji}}} \qquad \Rightarrow \qquad \|\alpha_i\| = \sqrt{\frac{a_{ij}}{a_{ji}}}\,\|\alpha_j\| \,. \tag{11.2}$$

11.1 Cvičení

Cvičení 11.1. Nakreslete všechny možné kořenové diagramy v $\mathbb{R}^2$ a přiřaďte jim odpovídající algebry.

Řešení. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_2$.

Cvičení 11.2. K Dynkinovým diagramům přiřaďte odpovídající Cartanovy matice.

Řešení. Kořeny uspořádány dle diagramů, 0 vynechány:

$$\mathcal{A}_{A_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{B_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{C_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{D_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 11.3. Najděte Cartanovu podalgebru, kořeny, kořenový a Dynkinův diagram speciální lineární algebry

$$A_l = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{l+1,l+1} \mid \mathrm{tr} A = 0 \right\}.$$

Řešení.

- Cartanova podalgebra $\mathfrak{g}_0 = \{\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_{l+1}) \mid \sum_j d_j = 0\} \subset \mathfrak{sl}(l+1)$, $\dim \mathfrak{g}_0 = l, [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$. Je abelovská, tj. nilpotentní. Níže uvidíme (rovnice (12.1)), že $\mathfrak{g}_0$ je rovná svému normalizátoru.

- Kořeny: Mějme

$$E_{ij} = \begin{matrix} \\ i \end{matrix} \begin{pmatrix} & \overset{j}{} & \\ & \vdots & \\ \ldots & 1 & \\ & & \end{pmatrix}, \qquad i \neq j.$$

  Pak máme rozklad $\mathfrak{sl}(l+1) = \mathfrak{g}_0 + \mathrm{span}\{E_{ij}\}_{i \neq j}$ a pro $D \in \mathfrak{g}_0$ ve tvaru $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_{l+1})$ máme $[D, E_{ij}] = (d_i - d_j)E_{ij}$. Zaveďme funkcionály $\varphi_j \in \mathfrak{g}_0^*$, $\varphi_j(D) = d_j$. Pak

$$[D, E_{ij}] = (\varphi_i - \varphi_j)(D) E_{ij}.$$

  Tj. máme skutečně Cartanovu podalgebru a kořeny

$$\Delta = \left\{ (\varphi_i - \varphi_j) \mid \ i \neq j, \ i, j \in \widehat{l+1} \right\}$$

  Zvolíme $H_0 = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_{l+1})$, $h_i > h_{i+1}$, tj. $(\varphi_i - \varphi_j)(H_0) \neq 0$. Máme tedy vybrané kladné a prosté kořeny

$$\Delta^+ = \{\varphi_i - \varphi_j | i < j \leq l+1\},$$
$$\Delta^P = \left\{ \varphi_i - \varphi_{i+1} \equiv \alpha_i \middle| i \in \widehat{l} \right\}.$$

  Ověříme, že pomocí Δ^P můžeme nakombinovat celé Δ:

$$\varphi_i - \varphi_j = (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + (\varphi_{i+1} - \varphi_{i+2}) + \cdots + (\varphi_{j-1} - \varphi_j).$$

- Cartanova matice, Dynkinův diagram:

$$a_{\beta\alpha} = -(p+q) \overset{\alpha,\beta\in\Delta^P}{=} -q, \text{ kde} \qquad \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q} \in \Delta^+.$$

Pro $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}, \alpha_j = \varphi_j - \varphi_{j+1}$ máme

$$\alpha_i + k\alpha_j = \varphi_i - \varphi_{i+1} + k(\varphi_j - \varphi_{j+1}) \overset{!}{=} \varphi_a - \varphi_b, \ a < b.$$

Pokud $i < j-1$ nebo $j < i-1$ je $k = 0$, tj. $a_{ij} = 0$. Pro $i = j-1$ nebo $j = i-1$ je $k = 0, 1$, tj. $a_{ij} = -1$, proto má Cartanova matice a Dynkinův diagram tvar

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underset{1}{\bullet} \!\!-\!\! \underset{2}{\bullet} \!\!-\!\! \cdots \!\!-\!\! \underset{l-1}{\bullet} \!\!-\!\! \underset{l}{\bullet}$$

Cvičení 11.4. Najděte Cartanovu podalgebru, kořeny, kořenový a Dynkinův diagram symplektické algebry

$$C_l = \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2l,2l} \mid JA + A^T J = 0 \right\}, \text{ kde } J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Řešení. • Cartanova podalgebra. Označme $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2l,2l}$. Musí platit

$$JA + A^T J = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^T & -a^T \\ d^T & -b^T \end{pmatrix} = 0 \text{ tj. } d = -a^T, \ b = b^T, \ c = c^T.$$

Označme diagonální podalgebru

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{C}^{l,l} \right\}$$

a ověřme, že se jedná o Cartanovu podalgebru. Evidentně je abelovská, zbývá ukázat, že je rovná svému normalizátoru. Máme $[\Lambda, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \in \mathbb{C}^{l,l}$, z čehož plyne

$$\left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}\right] = (\lambda_i - \lambda_j) \underbrace{\begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}}_{\equiv I_{ij},\ i\neq j},$$

$$\left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_{ij}+E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda(E_{ij}+E_{ji}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (E_{ij}+E_{ji})\Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda_i + \lambda_j) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E_{ij}+E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv F_{ij},\ i\leq j},$$

$$G_{ij} = F_{ij}^T: \quad \left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, G_{ij}\right] = -\left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, F_{ij}\right]^T = -(\lambda_i + \lambda_j)G_{ij}.$$

Vidíme, že $\mathfrak{g}_0$ je skutečně Cartanova podalgebra. Funkcionály φ_i, definované předpisem $\varphi_i \left(\begin{smallmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda_i$ pro $i \in \widehat{l}$, tvoří bázi $\mathfrak{g}_0^*$.

- Kořeny. Z relací výše, kde jsme našli kořenové vektory I_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, plyne tvar kořenů

$$\Delta = \{\varphi_i - \varphi_j \mid i \neq j\} \cup \{\varphi_i + \varphi_j \mid i \leq j\} \cup \{-(\varphi_i + \varphi_j) \mid i \leq j\}\,.$$

Zvolme $H_0:\ \varphi_i(H_0) > \varphi_{i+1}(H_0) > 0, \forall i = 1, \ldots, l$. Pak

$$\begin{aligned}
\Delta^+ &= \{\varphi_i - \varphi_j \mid i < j\} \cup \{\varphi_i + \varphi_j \mid i \leq j\}\,,\\
\Delta^- &= \{\varphi_i - \varphi_j \mid i > j\} \cup \{-(\varphi_i + \varphi_j) \mid i \leq j\}\,,\\
\Delta^P &= \{\underbrace{\varphi_i - \varphi_{i+1}}_{\equiv\alpha_i} \mid i \in \widehat{l-1}\} \cup \{\underbrace{2\varphi_l}_{\equiv\alpha_l}\}.
\end{aligned}$$

Ověříme, že kladné kořeny umíme vyjádřit pomocí prostých

$$\begin{aligned}
\varphi_i - \varphi_j &= (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + \cdots + (\varphi_{j-1} - \varphi_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k,\\
\varphi_i + \varphi_j &= 2\varphi_l + (\varphi_i - \varphi_l) + (\varphi_j - \varphi_l) = \alpha_l + \sum_{k=i}^{l-1} \alpha_k + \sum_{k=j}^{l-1} \alpha_k.
\end{aligned}$$

- Cartanova matice. Její složky hledáme ze vztahu $a_{ij} = -q = 1 - \#\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_i + k\alpha_j \in \Delta^+\}$

$$\begin{array}{lll}
\{\alpha_i + k\alpha_j\}_{i,j<l} = (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + k(\varphi_j - \varphi_{j+1}) & \Rightarrow & |i-j| > 1: \quad k = 0,\\
 & & |i-j| = 1: \quad k = 0, 1,\\
\{\alpha_i + k\alpha_l\}_{i<l} = (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + 2k\varphi_l & \Rightarrow & i < l-1: \quad k = 0,\\
 & & i = l-1: \quad k = 0, 1,\\
\{\alpha_l + k\alpha_i\}_{i<l} = 2\varphi_l + k(\varphi_i - \varphi_{i+1}) & \Rightarrow & i < l-1: \quad k = 0,\\
 & & i = l-1: \quad k = 0, 1, 2.
\end{array}$$

Tudíž $a_{l-1,l} = -1 = \frac{\langle\alpha_{l-1},\alpha_l\rangle}{\langle\alpha_l,\alpha_l\rangle}$, $a_{l,l-1} = -2 = \frac{\langle\alpha_l,\alpha_{l-1}\rangle}{\langle\alpha_{l-1},\alpha_{l-1}\rangle}$, tj. $\|\alpha_l\| = \sqrt{2}\,\|\alpha_{l-1}\|$. Celkem tedy máme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}
2 & -1 & & & \\
-1 & \ddots & \ddots & & \\
 & \ddots & 2 & -1 & \\
 & & -1 & 2 & -1\\
 & & & -2 & 2
\end{pmatrix}, \qquad \underset{1}{\bullet} \text{—} \underset{2}{\bullet} \text{—} \cdots \text{—} \underset{l-2}{\bullet} \text{—} \underset{l-1}{\bullet} \Rightarrow \underset{l}{\bullet}$$

Cvičení 11.5. Najděte Cartanovu podalgebru, kořeny, kořenový a Dynkinův diagram speciální ortogonální algebry v sudé dimenzi

$$D_l = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}) = \left\{A \in \mathbb{C}^{2l,2l} \mid A^T + A = 0\right\},\ \text{kde } l > 1.$$

Řešení. Ukážeme, že

$$\mathfrak{g}_0 = \{H = \operatorname{diag}(\lambda_1\sigma_2, \ldots, \lambda_l\sigma_2)\}\,,\ \text{kde } \sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

je Cartanova podalgebra. Nechť $X \in \mathbb{C}^{2,2},\ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Požadujme

$$\lambda_i\sigma_2 X - \lambda_j X\sigma_2 = i\lambda_i \begin{pmatrix} -x_{21} & -x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} - i\lambda_j \begin{pmatrix} x_{12} & -x_{11} \\ x_{22} & -x_{21} \end{pmatrix} \overset{!}{=} c(\lambda_i, \lambda_j) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Rovnici zapíšeme ve tvaru

$$i\begin{pmatrix} ic & -\lambda_j & -\lambda_i & 0 \\ \lambda_j & ic & 0 & -\lambda_i \\ \lambda_i & 0 & ic & -\lambda_j \\ 0 & \lambda_i & \lambda_j & ic \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = 0$$

a z požadavku řešitelnosti soustavy $\det = 0$ dostáváme hodnoty možných konstant $c(\lambda_i, \lambda_j)$ ve tvaru $c_{1,2,3,4} = \pm(\lambda_i \pm \lambda_j)$. Pro

- $c_1 = \lambda_i + \lambda_j$ najdeme (až na libovolný násobek) řešení X ve tvaru $\widetilde{F} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right) = \sigma_3 + i\sigma_1$,
- $c_2 = \lambda_i - \lambda_j$, $i < j$ dává $\widetilde{G} = \mathbb{I} + \sigma_2$,
- zbylé dvě matice získáváme sdružením hermitovským $\widetilde{F}^\dagger$, resp. komplexním $\widetilde{G}^*$.

Nyní již můžeme přímo zkonstruovat kořenové vektory ve tvaru

$$F_{ij} = \begin{matrix} \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} \quad & \overset{i}{\downarrow} & \overset{j}{\downarrow} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \widetilde{F} & \\ \cdots & -\widetilde{F}^T & \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad i < j, \quad [H, F_{ij}] = (\lambda_i + \lambda_j)F_{ij},$$

$$F_{ij}^\dagger: \qquad \left[H, F_{ij}^\dagger\right] = \left[H^\dagger, F_{ij}^\dagger\right] = -\left[H, F_{ij}\right]^\dagger = -(\lambda_i + \lambda_j)F_{ij}^\dagger, \text{ pro } H \in \mathfrak{h},$$

$$G_{ij} = \begin{matrix} \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} \quad & \overset{i}{\downarrow} & \overset{j}{\downarrow} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \widetilde{G} & \\ \cdots & -\widetilde{G}^T & \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad i < j, \quad [H, G_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)G_{ij},$$

$$G_{ij}^\dagger: \qquad \left[H, G_{ij}^\dagger\right] = \left[H^\dagger, G_{ij}^\dagger\right] = -\left[H, G_{ij}\right]^\dagger = -(\lambda_i - \lambda_j)G_{ij}^\dagger, \text{ pro } H \in \mathfrak{h}.$$

Zjišťujeme, že $\mathfrak{g}_0$ je rovna svému normalizátoru (a je abelovská), tj. je Cartanovou podalgebrou.

Zaveďme funkcionály $\varphi_j \in \mathfrak{g}_0^*$ předpisem $\varphi_j(H) = \lambda_j$. Kořeny odpovídající výše nalezeným kořenovým vektorům mají tvar

$$\Delta = \{\varphi_i + \varphi_j \mid i < j\} \cup \{\varphi_i - \varphi_j \mid i \neq j\} \cup \{-(\varphi_i + \varphi_j) \mid i < j\}.$$

Označme $H_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1\sigma_2, \ldots, \lambda_l\sigma_2)$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_l > 0$. Tím máme zavedeny kladné a prosté kořeny

$$\Delta^+ = \{\varphi_i + \varphi_j \mid i < j\} \cup \{\varphi_i - \varphi_j \mid i < j\}$$
$$\Delta^P = \{\underbrace{\varphi_i - \varphi_{i+1}}_{\equiv\alpha_i} \mid i \in \widehat{l-1}\} \cup \{\underbrace{\varphi_{l-1} + \varphi_l}_{\equiv\alpha_l}\}$$

Složky Cartanovy matice hledáme ze vztahu $a_{ij} = -q = -\#\{k|\alpha_i + k\alpha_j \in \Delta^+\} + 1$

$$\begin{array}{lll} \alpha_i + k\alpha_{i+1} &= (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + k(\varphi_{i+1} - \varphi_{i+2}),\ i \in \widehat{l-1} & \Rightarrow \quad k = 0, 1, \\ \alpha_{l-2} + k\alpha_l &= (\varphi_{l-2} - \varphi_{l-1}) + k(\varphi_{l-1} + \varphi_l) & \Rightarrow \quad k = 0, 1, \\ \alpha_{l-1} + k\alpha_l &= (\varphi_{l-1} - \varphi_l) + k(\varphi_{l-1} + \varphi_l) & \Rightarrow \quad k = 0. \end{array}$$

Tomu odpovídá

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ & & -1 & 2 & 0 \\ & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ccccccccccc} \bullet & - & \bullet & - & \cdots & - & \bullet & - & \bullet & < & \begin{array}{l} \bullet\ l-1 \\ \bullet\ l \end{array} \\ 1 & & 2 & & & & l-3 & & l-2 & & \end{array}$$

Změnou báze v $\mathbb{C}^{2l}$ lze přejít k formulaci, v níž bilineární kvadratická forma J není diagonální, tj.

$$D_l = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2l,2l} \mid A^T J + JA = 0 \right\}, \text{ kde } J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{smallmatrix}\right), \ l > 1.$$

Pak je Cartanova podalgebra tvořená všemi diagonálními maticemi v takto zapsané algebře $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$.

Cvičení 11.6. Najděte Cartanovu podalgebru, kořeny, kořenový a Dynkinův diagram speciální ortogonální algebry v liché dimenzi

$$B_l = \mathfrak{so}(2l + 1, \mathbb{C}).$$

Řešení. Ukážeme, že Cartanova podalgebra má tvar

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ H = \begin{pmatrix} \lambda_1\sigma_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l\sigma_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zaveďme funkcionály

$$\varphi_i(H) = \varphi_i \begin{pmatrix} \lambda_1\sigma_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l\sigma_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda_i.$$

Uvažujme matice tvaru

$$X = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \vec{v} \\ -\vec{v}^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2l+1,2l+1}, \text{ kde } \vec{v} \in \mathbb{C}^{2l}, \quad \text{a} \quad H' = \begin{pmatrix} \lambda_1\sigma_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l\sigma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2l,2l}$$

(kde $\mathbb{O} \in \mathbb{C}^{2l,2l}$ je nulová matice). Takové matice vyhovují

$$[H, X] = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & H'\vec{v} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \vec{0} \\ -(\vec{v})^T H' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & H'\vec{v} \\ -(H'\vec{v})^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Za $\vec{v}$ vybereme vlastní vektory H', s vlastními čísly $\pm\lambda_i$. Při zohlednění výsledků cvičení 11.5 tak dostáváme kořenový systém ve tvaru

$$\Delta = \{\varphi_i + \varphi_j\}_{i<j} \cup \{\varphi_i - \varphi_j\}_{i\neq j} \cup \{-(\varphi_i + \varphi_j)\}_{i<j} \cup \{\varphi_i\}_{i=1}^{l} \cup \{-\varphi_i\}_{i=1}^{l}$$

a vidíme, že $\mathfrak{g}_0$ je rovna svému normalizátoru, tj. je Cartanova.

Zvolíme $H_0 : \lambda_i = \varphi_i(H_0)$, $\lambda_1 > \cdots > \lambda_l > 0$. To implikuje tvar kladných a prostých kořenů ve tvaru

$$\begin{aligned}
\Delta^+ &= \{\varphi_i + \varphi_j\}_{i<j} \cup \{\varphi_i - \varphi_j\}_{i<j} \cup \{\varphi_i\}\,, \\
\Delta^P &= \{\underbrace{\varphi_i - \varphi_{i+1}}_{\equiv\alpha_i} \,|\, i \in \widehat{l-1}\} \cup \{\underbrace{\varphi_l}_{\equiv\alpha_l}\}.
\end{aligned}$$

Složky Cartanovy matice hledáme ze vztahu $a_{ij} = 1 - \#\{k|\alpha_i + k\alpha_j \in \Delta^+\}$

$$\begin{array}{lll}
\alpha_{l-2} + k\alpha_l &= (\varphi_{l-2} - \varphi_{l-1}) + k\varphi_l &\Rightarrow \quad k = 0, \\
\alpha_{l-1} + k\alpha_l &= (\varphi_{l-1} - \varphi_l) + k\varphi_l &\Rightarrow \quad k = 0, 1, 2, \\
\alpha_l + k\alpha_{l-1} &= \varphi_l + k(\varphi_{l-1} - \varphi_l) &\Rightarrow \quad k = 0, 1,
\end{array}$$

což nám dává

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}
2 & -1 & & & \\
-1 & \ddots & \ddots & & \\
 & \ddots & 2 & -1 & \\
 & & -1 & 2 & -2 \\
 & & & -1 & 2
\end{pmatrix}, \qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
\bullet & - & \bullet & - & \cdots & - & \bullet & - & \bullet & \Longleftarrow & \bullet \\
1 & & 2 & & & & l-2 & & l-1 & & l
\end{array}$$

Kapitola 12

Reálné formy komplexních poloprostých Lieových algeber

V předchozí kapitole jsme dokončili klasifikaci všech konečněrozměrných poloprostých komplexních Lieových algeber (připomeňme, že poloprosté algebry jsou součtem prostých ideálů, ty jsou klasifikovány větou 11.13). V této kapitole se budeme zabývat otázkou, jak lze z této klasifikace odvodit klasifikaci reálných poloprostých algeber.

12.1 Konstrukce reálných forem

Z 2. Cartanova kritéria, tj. věty 8.5, víme, že reálná algebra je poloprostá právě tehdy, když její komplexifikace je poloprostá. (Je vhodné si zároveň uvědomit, že pro prosté algebry totéž neplatí, komplexifikace prosté algebry může mít netriviální prosté ideály, viz $\mathfrak{so}(1,3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$.) Uvažme poloprostou reálnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbb{R}} \mathrm{i}\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$. Algebra $\mathfrak{g}$ se dá popsat jako reálná podalgebra v $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ charakterizovaná zobrazením ϕ:

$$\phi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \ \phi(u + \mathrm{i}v) = u - \mathrm{i}v, \ \forall u, v \in \mathfrak{g},$$
$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \phi(X) = X\}.$$

Takto definované zobrazení ϕ má evidentně následující vlastnosti

- $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$, tj. je **involutivní**,
- $\phi(\lambda X) = \overline{\lambda}\phi(X)$, $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y)$, tj. je **antilineární**,
- $\phi\big([u_1 + \mathrm{i}v_1, u_2 + \mathrm{i}v_2]\big) = \phi\big(([u_1,u_2] - [v_1,v_2]) + \mathrm{i}\,([v_1,u_2] + [u_1,v_2]) \big) =$
  $= ([u_1,u_2] - [v_1,v_2]) - \mathrm{i}\,([v_1,u_2] + [u_1,v_2]) = [u_1 - \mathrm{i}v_1, u_2 - \mathrm{i}v_2] =$
  $= \big[\phi(u_1 + \mathrm{i}v_1), \phi(u_2 + \mathrm{i}v_2)\big]$, tj. je **automorfismus**.

Naopak, mějme komplexní algebru $\mathfrak{g}$ a její involutivní antilineární automorfismus ϕ. Pak $\mathfrak{g}_\phi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \phi(X) = X\}$ nám určuje reálnou podalgebru $\mathfrak{g}_\phi$ v $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : (\mathfrak{g}_\phi)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$.

Důkaz. Označme odpovídající $\mathbb{R}$–lineární zobrazení $\phi_{\mathbb{R}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ definované ve zvolené bázi $(e_j, \mathrm{i}e_j)_{j=1}^{l}$ algebry $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ předpisem $\phi_{\mathbb{R}}(e_i) = \phi(e_i) = a_i^j e_j +$

$b_i^j(\mathrm{i}e_j)$, $\phi_{\mathbb{R}}(\mathrm{i}e_i) = -\mathrm{i}\phi(e_i) = b_i^j e_j - a_i^j(\mathrm{i}e_j)$, kde $a_i^j, b_i^j \in \mathbb{R}$. Involutivnost evidentně zůstává zachována, $\phi_{\mathbb{R}} \circ \phi_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}$, takže $\sigma(\phi_{\mathbb{R}}) \subset \{\pm 1\}$. Proto

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \underbrace{\ker(\phi_{\mathbb{R}} - \mathbb{I})}_{\mathfrak{g}_\phi} \dot{+} \ker(\phi_{\mathbb{R}} + \mathbb{I}). \tag{12.1}$$

Vidíme, že pro každé $X \in \mathfrak{g}_\phi$, tj. $\phi(X) = X$, je $\phi(\mathrm{i}X) = -\mathrm{i}X$ tj. $\mathrm{i}X \in \ker(\phi_{\mathbb{R}} + \mathbb{I})$. Proto oba reálné podprostory v rozkladu (12.1) mají stejnou dimenzi a násobení imaginární jednotkou i v $\mathfrak{g}$ zobrazuje jeden na druhý, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_\phi = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\phi \dot{+}_{\mathbb{R}} \mathrm{i}\mathfrak{g}_\phi$. Protože platí $\phi\big([X,Y]\big) = [\phi(X), \phi(Y)] = [X,Y]$, je pro libovolná $X, Y \in \mathfrak{g}_\phi$ též $[X,Y] \in \mathfrak{g}_\phi$, tj. $\mathfrak{g}_\phi$ je reálná podalgebra $\mathfrak{g}$ taková, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\phi \dot{+}_{\mathbb{R}} \mathrm{i}\mathfrak{g}_\phi$. Jinými slovy, $\mathfrak{g}_\phi$ je reálná forma $\mathfrak{g}$. □

Takže jsme dokázali větu

Věta 12.1. Reálné formy komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou popsány involutivními antilineárními automorfismy $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Příklad 12.2. Uvažme $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$ a několik involutivních antilineárních automorfismů $\phi : \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$. Tímto způsobem nacházíme následující reálné formy

$$\begin{aligned}
&\phi(X) = \overline{X}, && \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R}),\\
&\phi(X) = -X^\dagger, && \mathfrak{g} = \big\{X \in \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}) \mid -X^\dagger = X\big\} = \mathfrak{su}(l+1),\\
&\phi(A) = -JA^\dagger J, && \mathfrak{g} = \big\{X \in \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}) \mid -JX^\dagger J = X\big\} = \mathfrak{su}(p,q),
\end{aligned}$$

kde $J = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q})$, $p + q = l + 1$.

Větou 12.1 jsme konstrukci reálných forem převedli na hledání zobrazení s požadovanými vlastnostmi. Zůstává ovšem otázkou, jak lze involutivní antilineární automorfismy hledat a jak lze mezi nimi identifikovat ty, které vedou na izomorfní reálné formy. Tomuto problému se zde nebude podrobněji věnovat, ukážeme si pouze dvě reálné formy, které existují pro každou komplexní poloprostou algebru $\mathfrak{g}$.

Uvažujme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ vyjádřenou ve Weylově-Chevalley bázi, tj.

$$\begin{gathered}
\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta^P} \dot{+} \dot{+}_{\alpha \in \Delta} \mathrm{span}\{E_\alpha\},\\
[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha,\\
H \in \mathbb{R}\text{–span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta^P} = \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad \forall \alpha \in \Delta,\ \alpha(H) \in \mathbb{R}\\
[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \underbrace{K(E_\alpha, E_{-\alpha})}_{\in \mathbb{R}} H_\alpha,\\
[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta},\ N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z},\ N_{(-\alpha)(-\beta)} = -N_{\alpha\beta}.
\end{gathered}$$

Označme

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{split}} = \mathbb{R}\text{–span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta^P} \dot{+} \dot{+}_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}\text{–span}\{E_\alpha\}.$$

Vidíme, že $\mathfrak{g}_{\mathrm{split}}$ je reálná forma algebry $\mathfrak{g}$, určená antilineárním automorfismem definovaným působením na bazické prvky $\phi(H_\alpha) = H_\alpha$, $\phi(E_\alpha) = E_\alpha$.

Vhodným nástrojem pro rozlišení reálných algeber je signatura Killingovy formy, neboť jako jediná ze zřejmých, na bázi nezávisejících charakteristik dané algebry nezůstává po komplexifikaci stejná.

Signatura Killingovy formy K algebry $\mathfrak{g}_{\mathrm{split}}$ plyne z následujících poznatků

- $K(H, E_\alpha) = 0$ protože $\mathfrak{h} \perp \operatorname{span}\{E_\alpha\}$,
- $K|_{\mathfrak{h}}$ je pozitivně definitní,
- $K(E_\alpha, E_\beta) = 0$ kdykoliv $\alpha + \beta \neq 0$.
- Buď $\alpha \in \Delta$, pak $\begin{pmatrix} K(E_\alpha, E_\alpha) & K(E_\alpha, E_{-\alpha}) \\ K(E_{-\alpha}, E_\alpha) & K(E_{-\alpha}, E_{-\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, kde $\lambda \neq 0$. Proto je $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} K(E_\alpha, E_\alpha) & K(E_\alpha, E_{-\alpha}) \\ K(E_{-\alpha}, E_\alpha) & K(E_{-\alpha}, E_{-\alpha}) \end{pmatrix} = (1, 1, 0)$.

Z uvedených vztahů vyplývá, že ve zvolené bázi má při seřazení kořenů ve dvojicích $\alpha, -\alpha$ Killingova forma blokově diagonální tvar a její signatura je $\operatorname{sgn} K|_{\mathfrak{g}_{\text{split}}} = \left(\frac{n+l}{2}, \frac{n-l}{2}, 0\right)$.

Pro každou komplexní poloprostou algebru $\mathfrak{g}$ lze nalézt nejméně jednu další reálnou formu, značenou $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$. Definujeme ji předpisem

$$\mathfrak{g}_{\text{komp}} := \underbrace{\mathbb{R}\text{–span}\{\mathrm{i}H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta^P}}_{i\mathfrak{h}} \dot{+}\dot{+}_{\alpha\in\Delta^+}\operatorname{span}\left\{\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right\},$$

kde bázi kořenových vektorů jsme zvolili tak, že platí $K(E_\alpha, E_{-\alpha}) > 0$ pro všechna $\alpha \in \Delta^+$. Odpovídající zobrazení ϕ je určeno vztahy $\phi(H_\alpha) = -H_\alpha,\ \phi(E_\alpha) = -E_{-\alpha}$. Z jeho definice je evidentně $\phi^2 = \mathbb{I}$. Dále zjišťujeme, že

$$\begin{aligned}
\phi\big([H_\alpha, H_\beta]\big) &= [\phi(H_\alpha), \phi(H_\beta)] = 0, \\
\phi\big([H_\alpha, E_\beta]\big) &= \underbrace{\beta(H_\alpha)}_{\in\mathbb{R}}\phi(E_\beta) = -\beta(H_\alpha)E_{-\beta} = [H_\alpha, E_{-\beta}] = [\phi(H_\alpha), \phi(E_\beta)], \\
\phi\big([E_\alpha, E_\beta]\big) &= N_{\alpha\beta}\,\phi(E_{\alpha+\beta}) = -N_{\alpha\beta}E_{-\alpha-\beta} = N_{(-\alpha)(-\beta)}E_{-\alpha-\beta} = \\
&= [-E_{-\alpha}, -E_{-\beta}] = [\phi(E_\alpha), \phi(E_\beta)], \\
\phi\big([E_\alpha, E_{-\alpha}]\big) &= K(E_\alpha, E_{-\alpha})\phi(H_\alpha) = -K(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \\
&= [-E_{-\alpha}, -E_\alpha] = [\phi(E_\alpha), \phi(E_{-\alpha})], \\
\phi\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \quad \phi\left(\frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-\mathrm{i}(-E_{-\alpha} - E_\alpha)}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}} \\
\phi(\mathrm{i}H_\alpha) &= -\mathrm{i}(-H_\alpha) = \mathrm{i}H_\alpha,
\end{aligned}$$

tj. ϕ je antilineární involutivní automorfismus, jak je požadováno, a $\phi_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}} = \mathbb{I}$. Signaturu Killingovy formy reálné algebry $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$ určíme z toho, že $K|_{\mathrm{i}\mathfrak{h}}$ je negativně definitní a

$$\begin{aligned}
K\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}\right) &= -K(E_\alpha, E_{-\alpha}) < 0, \\
K\left(\frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) &= 0, \\
K\left(\frac{i(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})}{\sqrt{2}}\right) &= -K(E_\alpha, E_{-\alpha}) < 0.
\end{aligned}$$

Celkem tedy vidíme, že $K_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}}$ je negativně definitní, $\operatorname{sgn} K_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}} = (0, n, 0)$.

Bez důkazu si uveďme větu dávající do souvislosti topologicky kompaktní Lieovy grupy a negativní definitnost Killingovy formy.

Věta 12.3 (Weylova o kompaktních Lieových grupách)**.** Buď $\mathfrak{g}$ reálná poloprostá Lieova algebra, G jí odpovídající souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa. Grupa G je kompaktní právě tehdy, když Killingova forma algebry $\mathfrak{g}$ je negativně definitní.

To je důvodem, proč reálné poloprosté Lieovy algebry s negativně definitní Killingovou formou nazýváme **kompaktní**.

12.2 Invariantní integrál na kompaktních Lieových grupách

Kompaktní Lieovy grupy mají jednu podstatnou vlastnost: lze na nich zavést způsob integrování, který je invariantní vůči levému i pravému přenásobení integrační proměnné prvkem grupy. To nám mj. umožňuje ukázat klíčový poznatek, že konečněrozměrné reprezentace kompaktní Lieovy grupy jsou úplně reducibilní.

Mějme $(X_j)_{j=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ bázi $\mathfrak{g}$, a σ^k k ní duální diferenciální 1-formy v $\Gamma(T^*G)$. Jinými slovy, pro všechna $g, h \in G$ máme

$$L_{g*}\left(X_j|_h\right) = X_j|_{gh}\,, \quad \sigma^j\left(X_k|_g\right) = \delta^j{}_k, \quad L_g^*\left(\sigma^j\big|_{gh}\right)\left(X_k|_h\right) = \sigma^j\big|_{gh}\big(\underbrace{L_{g*}\left(X_k|_h\right)}_{X_k|_{gh}}\big) = \delta^j{}_k,$$

tj. $L_g^*\left(\sigma^j|_{gh}\right) = \sigma^j|_h\,.$

Definice 12.4. Diferenciální forma $\omega \in \Omega^\bullet(G)$ se nazývá **levoinvariantní** právě tehdy, když pro všechna $g, h \in G$ platí

$$L_g^*\left(\omega|_{gh}\right) = \omega|_h\,.$$

Formy σ^k duální k bázi $\mathfrak{g}$ jsou tedy levoinvariantní 1-formy a tvoří bázi prostoru všech levoinvariantních 1–forem na G. Diferenciální n–forma $\omega = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$, kde $n = \dim \mathfrak{g}$, je levoinvariantní objemový element na G, neboť je definovaná na celém G a je všude nenulová.

Poznámka 12.5. Levoinvariantní 1-formy (σ^k) duální k bázi (X_j) v $\mathfrak{g}$ se strukturními konstantami $c_{jk}{}^l$, tj. $[X_j, X_k] = \sum_m c_{jk}{}^l X_l$ vyhovují důležitému vztahu zvanému Maurer-Cartanova rovnice

$$\mathrm{d}\sigma^j = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}{}^j \sigma^k \wedge \sigma^l, \tag{12.2}$$

jenž plyne dosazením ze vztahu $\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$ platného pro libovolná $\omega \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Uzavřenost 2-formy $\mathrm{d}\sigma^j$ je pak ekvivalentním vyjádřením Jacobiho identit

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\sigma^j\right) &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}{}^j\left(\mathrm{d}\sigma^k \wedge \sigma^l - \sigma^k \wedge \mathrm{d}\sigma^l\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}{}^j\left(\mathrm{d}\sigma^k \wedge \sigma^l - \mathrm{d}\sigma^l \wedge \sigma^k\right) = \\ &= -\sum_{k,l} c_{kl}{}^j\left(\mathrm{d}\sigma^k \wedge \sigma^l\right) = \frac{1}{2}\sum_{a,b,l}\sum_k c_{kl}{}^j c_{ab}{}^k \sigma^a \wedge \sigma^b \wedge \sigma^l = \\ &= \sum_{a<b<l}\sum_k \left(c_{kl}{}^j c_{ab}{}^k + c_{ka}{}^j c_{bl}{}^k + c_{kb}{}^j c_{la}{}^k\right)\sigma^a \wedge \sigma^b \wedge \sigma^l \end{aligned}$$

neboť $\left(\sigma^a \wedge \sigma^b \wedge \sigma^l\right)_{a<b<l}$ tvoří bázi prostoru 3–forem v libovolném zvoleném bodě $g \in G$.

Věta 12.6. Nechť G je kompaktní. Pak levoinvariantní objemový element $\omega = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$ je současně pravoinvariantní, $R_g^* \omega = \omega$. Říkáme, že ω je **biinvariantní** objemový element či biinvariantní míra.

Důkaz. Sporem: Nechť $R_{g^{-1}}^* \omega \neq \omega$. Bez újmy na obecnosti (jinak zaměníme $g \to g^{-1}$) předpokládejme, že $\omega(X_1, \ldots, X_n) = 1$ a $R_{g^{-1}}^* \omega(X_1, \ldots, X_n)\Big|_h = c$, $|c| > 1$ pro zvolené prvky grupy $g, h \in G$ a bázi $(X_j)_{j=1}^n$ v $\mathfrak{g}$. V případě, že $c < -1$, nahradíme g prvkem g^2, abychom měli nové $c > 1$. Máme

$$[L_{g*}, R_{h*}] = 0 \quad \Rightarrow \quad L_h^* \left(R_{g^{-1}}^* \omega \right) = R_{g^{-1}}^* \big(\underbrace{L_h^* \omega}_{\omega} \big) = R_{g^{-1}}^* \omega,$$

tudíž forma $R_{g^{-1}}^* \omega$ je opět levoinvariantní, tj. při vyhodnocení $R_{g^{-1}}^* \omega(X_1, \ldots, X_n)\Big|_h$ na výběru bodu h nezáleží, výsledek je stejný pro všechna $h \in G$. Zvolíme $h = e$. Protože $\mathrm{Ad}_g = L_{g*} \circ R_{g^{-1}*} : T_e G \to T_e G \equiv \mathfrak{g}$, máme

$$\begin{aligned} c = L_g^* R_{g^{-1}}^* \omega(X_1, \ldots, X_n)\big|_e &= \omega \left(L_{g*} R_{g^{-1}*} \left(X_1|_e \right), \ldots, L_{g*} R_{g^{-1}*} \left(X_n|_e \right) \right) = \\ &= \omega \left(\mathrm{Ad}_g \left(X_1|_e \right), \ldots, \mathrm{Ad}_g \left(X_n|_e \right) \right) = \det \mathrm{Ad}_g \cdot \underbrace{\omega \left(X_1|_e, \ldots, X_n|_e \right)}_{=1} = \det \mathrm{Ad}_g. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro všechny $g \in G$ je $R_{g^{-1}}^* \omega \left(X_1, \ldots, X_n \right) = \det \mathrm{Ad}_g \equiv F(g)$, přičemž pro zvolené g je $F(g) > 1$. Ale zobrazení $F : G \to (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ je homomorfismus grup, neboť

$$F(g_1 g_2) = \det \mathrm{Ad}_{g_1 g_2} = \det \mathrm{Ad}_{g_1} \mathrm{Ad}_{g_2} = \det \left(\mathrm{Ad}_{g_1} \right) \det \left(\mathrm{Ad}_{g_2} \right) = F(g_1) F(g_2).$$

Tudíž $F(g^n) = c^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a v limitě $n \to +\infty$ máme $F(g^n) \to +\infty$. Ale F je hladká funkce na kompaktní varietě G, tj. je omezená a nabývá svého maxima a minima, což je hledaný spor. □

Poznámka 12.7. Buď G kompaktní, ω výše zavedený biinivariantní objemový element. Protože Lieova grupa je vždy orientovatelná, je integrál $\int\limits_G \omega$ definován až na volbu orientace a je konečný. Vhodným výběrem orientace lze docílit $0 < \int\limits_G \omega < \infty$.

Důsledek 12.8. Pro kompaktní Lieovu grupu G platí

- Pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(G)$ je

$$\int\limits_G f \cdot \omega = \int\limits_G (f \circ L_g) \cdot \omega = \int\limits_G (f \circ R_g) \cdot \omega, \tag{12.3}$$

protože

$$\int\limits_G (f \circ L_g)\, \omega = \int\limits_G \left(L_g^* f \right) \left(L_g^* \omega \right) = \int\limits_{L_g(G)} f\omega = \int\limits_G f\omega$$

dle věty o substituci v integrálu, tj. $\int\limits_N \phi^* \kappa = \int\limits_{\phi(N)} \kappa$. Analogicky pro R_g.

- Pro $\rho : G \to GL(V)$, kde V má konečnou dimenzi, a jakýkoliv skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na V, zavedeme jeho zprůměrování přes grupu G,

$$\langle u, v \rangle_G := \int_G \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle \cdot \omega. \tag{12.4}$$

Přímým dosazením je vidět, že se jedná opět o pozitivně definitní symetrickou formu, tj. skalární součin na V. Pro libovolné $\widetilde{g} \in G$ a $u, v \in V$ platí

$$\langle \rho(\widetilde{g})u, \rho(\widetilde{g})v \rangle_G = \int_G \langle \rho(g)\rho(\widetilde{g})u, \rho(g)\rho(\widetilde{g})v \rangle \cdot \omega = \int_G \langle \rho(g\widetilde{g})u, \rho(g\widetilde{g})v \rangle \cdot \omega =$$
$$= \int_G R^*_{\widetilde{g}} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle \cdot \underbrace{\omega}_{=R^*_{\widetilde{g}}\omega} = \int_{R_{\widetilde{g}}(G)} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle \cdot \omega = \langle u, v \rangle_G.$$

Vidíme, že vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ je ρ unitární (ortogonální, dle tělesa V) reprezentace kompaktní grupy G na V.

Z toho vyplývá

Lemma 12.9. Konečněrozměrné reprezentace kompaktní Lieovy grupy G jsou unitární (ortogonální) vůči vhodně zvolenému skalárnímu součinu. Proto jsou též úplně reducibilní.

Věta 12.10 (Weylova)**.** Konečněrozměrné reprezentace komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ jsou úplně reducibilní.

Důkaz. Pro algebru $\mathfrak{g}$ a její reprezentaci $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ najdeme $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$, $(\mathfrak{g}_{\text{komp}})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$ a $\rho|_{\mathfrak{g}_{\text{komp}}} : \mathfrak{g}_{\text{komp}} \to \mathfrak{gl}(V)$, máme tedy i reprezentaci příslušné kompaktní souvislé a jednoduše souvislé Lieovy grupy G, ta je úplně reducibilní. Proto máme ireducibilní invariantní podprostory pro G_{komp}, $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$ i $\mathfrak{g}$. □

Tento přístup k důkazu úplné reducibility reprezentací poloprostých algeber oklikou přes reprezentace kompaktních grup se v literatuře obvykle nazývá Weylův unitární trik. Je to původní způsob odvození tohoto výsledku. Čistě algebraické důkazy, nevyužívající odpovídající Lieovu grupu, byly nalezeny až o několik desetiletí později.

12.3 Cvičení

Cvičení 12.1. Uvažujte Lieovu grupu $Af(1)$ a sestavte na ní bazické levoinvariantní 1–formy σ^i, ověřte na nich Maurer–Cartanovy rovnice a sestavte levoinvariantní objemový element ω. Je v tomto případě též pravoinvariantní?
Řešení. Máme $[X_1, X_2] = X_2$, $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$,

$$L_{(a,b)}(x, y) = (ax, ay + b), \qquad R_{(a,b)}(x, y) = (xa, xb + y).$$

Tudíž duální levoinvariantní 1–formy a objemový element mají tvar

$$\sigma^1 = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad \sigma^2 = \frac{\mathrm{d}y}{x}, \qquad \omega = \sigma^1 \wedge \sigma^2 = \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{x^2}.$$

Maurer–Cartanovy rovnice jsou

$$\mathrm{d}\sigma^1 = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = 0 = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} {c_{kl}}^1 \sigma^k \wedge \sigma^l, \ (\text{neboť } {c_{kl}}^1 = 0),$$

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{x}\right) = -\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{x^2} = -\sigma^1 \wedge \sigma^2 = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} {c_{kl}}^2 \sigma^k \wedge \sigma^l.$$

Levoinvarianci a případnou pravoinvarianci můžeme ověřit následovně:

$$L^*_{(a,b)}\sigma^1 = \frac{\mathrm{d}(ax)}{ax} = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma^1, \qquad R^*_{(a,b)}\sigma^1 = \frac{\mathrm{d}(xa)}{xa} = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma^1,$$

$$L^*_{(a,b)}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}(ay+b)}{ax} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \sigma^2, \qquad R^*_{(a,b)}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}(xb+y)}{ax} = \frac{b\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{ax} \neq \sigma^2,$$

$$L^*_{(a,b)}\omega = \omega, \qquad R^*_{(a,b)}\omega = \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{ax^2} \neq \omega.$$

Kapitola 13

Reprezentace poloprostých Lieových algeber

V aplikacích se většinou setkáme s Lieovými grupami nikoliv jako s abstraktními matematickými objekty, ale jako se strukturami působícími na nějakém prostoru prostřednictvím své akce. Mezi nimi nejvýznačnější místo zaujímají lineární akce na vektorových prostorech, tj. reprezentace. Proto je teorie reprezentací zcela zásadní pro využití Lieových grup a algeber v aplikacích. V této kapitole si stručně nastíníme základy teorie reprezentací poloprostých Lieových algeber (a tedy i jim odpovídajících jednoduše souvislých Lieových grup).

13.1 Váhy a váhové podprostory dané reprezentace

Uvažujme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a kořenovým systémem Δ spolu s její reprezentací ρ na komplexním vektorovém prostoru V konečné dimenze.

Buď $\alpha, \beta \in \Delta$. Pak odpovídající $T_\alpha, T_\beta \in \mathfrak{g}_0$ komutují, neboť $[T_\alpha, T_\beta] = 0$. Proto $\rho(\mathfrak{g}_0) = \{\rho(H) \mid H \in \mathfrak{g}_0\}$ je podprostor v $\mathcal{L}(V)$ tvořený komutujícími operátory. Rádi bychom ukázali, že jsou diagonalizovatelné, protože v takovém případě lze V vyjádřit jako direktní součet společných vlastních podprostorů.

Uvažujme $\alpha \in \Delta$. Pak span $\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]\}$ je podalgebra izomorfní $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ a tedy $\rho(X_\alpha)$, $\rho(X_{-\alpha})$, $\rho(T_\alpha)$ definuje reprezentaci algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na V, ta je dle Weylovy věty 12.10 úplně reducibilní, tj. je direktním součtem ireducibilních reprezentací $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, v každé z nich dle věty 9.25 působí $\rho(T_\alpha)$ diagonálně. Proto je operátor $\rho(T_\alpha)$ na V diagonalizovatelný a celá $\rho(\mathfrak{g}_0)$ je množinou komutujících diagonalizovatelných operátorů. Vektorový prostor V lze proto rozložit na společné vlastní podprostory $\rho(\mathfrak{g}_0)$

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}_0^*} V_\lambda, \qquad V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I}\right).$$

Definice 13.1. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a kořenovým systémem Δ a ρ její reprezentace na komplexním vektorovém prostoru V konečné dimenze.

- **Váha** reprezentace ρ je každý funkcionál $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ takový, že

$$V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I}\right) \neq \{0\}.$$

- Příslušný V_λ nazýváme **váhový podprostor** reprezentace ρ příslušný váze λ.
- **Váhový diagram** reprezentace ρ jsou všechny její váhy vyjádřené jako vektory v Euklidově prostoru $\mathfrak{h}^*$.
- **Váhová mřížka** je množina $\mathcal{J} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(T_\alpha) \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \Delta\} \subset \mathfrak{h}^*$.

Poznámka 13.2. Váhy leží v reálném prostoru $\mathfrak{h}^*$, protože $\sigma\left(\rho(T_\alpha)\right) \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ dle věty 9.25.

Příklad 13.3. Pro adjungovanou reprezentaci ($\rho = \mathrm{ad}$) jsou nenulové váhy kořeny a V_0 je Cartanova podalgebra.

Poznámka 13.4. Váhová mřížka $\mathcal{J}$ je mřížkou ve smyslu

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{J},\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \in \mathcal{J}.$$

Bázi $(\lambda_j)_{j=1}^l$ mřížky $\mathcal{J}$ tvoří $\lambda_j \in \mathcal{J}$ taková, že pro každé $\lambda \in \mathcal{J}$ existují $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z}$ splňující $\lambda = \sum_{j=1}^l m_j\lambda_j$. Později uvidíme, že bázi (λ_j) váhové mřížky $\mathcal{J}$ lze volit ve tvaru $\lambda_j(T_{\alpha_k}) = \delta_{jk},\ \forall \alpha_k \in \Delta^P$.

Věta 13.5. Mějme ρ reprezentaci komplexní poloprosté algebry $\mathfrak{g}$ na vektorovém prostoru V. Nechť Λ_ρ je množina všech jejích vah, $\Lambda_\rho = \left\{\lambda \in \mathfrak{g}_0^* \mid V_\lambda = \bigcap_{H\in\mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{I}\right) \neq 0\right\}$. Pak $\Lambda_\rho \subset \mathcal{J}$, $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_\rho} V_\lambda$ a Λ_ρ je invariantní vzhledem k působení Weylovy grupy $\mathcal{W}$ kořenového systému Δ, tj. pokud je $\alpha \in \Delta$, $\lambda \in \Lambda_\rho$, pak $S_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha \in \Lambda_\rho$. Pro libovolné $\lambda \in \Lambda_\rho$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}\lambda(T_\alpha)$ dokonce platí $\{\lambda, \lambda - \varepsilon\alpha, \dots, \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha = S_\alpha(\lambda)\} \subset \Lambda_\rho$ a $\dim V_\lambda = \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$.

Důkaz. Už víme, že $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_\rho} V_\lambda$ a $\sigma\left(\rho(T_\alpha)\right) \subset \mathbb{Z}$, protože $\rho(T_\alpha)$ patří do vhodné reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Proto je $\Lambda_\rho \subset \mathcal{J}$. Pro $\alpha \in \Delta$ označme $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha = \operatorname{span}\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha\}$. Vezměme $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$. Pak pro všechny $H \in \mathfrak{g}_0$ máme $\rho(H)v = \lambda(H)v$ a platí

$$\rho(H)\left(\rho(X_{\pm\alpha})v\right) = \rho\big(\underbrace{[H, X_{\pm\alpha}]}_{\pm\alpha(H)X_{\pm\alpha}}\big)v + \rho(X_{\pm\alpha})(\lambda(H)v) = \left(\lambda(H) \pm \alpha(H)\right)\left(\rho(X_{\pm\alpha})v\right). \tag{13.1}$$

Vidíme, že je-li $\rho(X_{\pm\alpha})v \neq 0$, pak $\lambda \pm \alpha \in \Lambda_\rho$ a $\rho(X_{\pm\alpha})v \in V_{\lambda\pm\alpha}$. Máme-li $\lambda \in \Lambda_\rho$ a $\alpha \in \Delta$, pak vždy najdeme ireducibilní reprezentaci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ na nějakém $\tilde{V} \subset V$ takovou, že $\lambda|_{(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha)_0}$ je vahou této reprezentace, tj. existuje nenulový vektor $v \in \tilde{V} \cap V_\lambda$ takový, že $\rho(T_\alpha)v = \lambda(T_\alpha)v$. Z věty 9.25 vidíme, že $\lambda(T_\alpha) \in \{-r, -r+2, \dots, r\} = \sigma(\rho(T_\alpha)|_{\tilde{V}})$, tj.

$$\{\lambda(T_\alpha), \lambda(T_\alpha) - \underbrace{\varepsilon\alpha(T_\alpha)}_{2\varepsilon}, \dots, \lambda(T_\alpha) - 2\lambda(T_\alpha) = -\lambda(T_\alpha)\} \subset \{-r, \dots, r\}$$

a vektory $\rho(X_{-\varepsilon\alpha})v, \left(\rho(X_{-\varepsilon\alpha})\right)^2 v, \dots, \left(\rho(X_{-\varepsilon\alpha})\right)^{|\lambda(T_\alpha)|} v$ jsou díky vlastnostem ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ nenulové vlastní vektory operátoru $\rho(T_\alpha)|_{\tilde{V}}$. Proto jsou podprostory $V_{\lambda-\varepsilon\alpha}, \dots, V_{\lambda-\lambda(T_\alpha)\alpha}$ nenulové, tj. s využitím rovnice (13.1) vidíme, že $\lambda - \varepsilon\alpha, \dots, \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha$ jsou váhy. Z jednorozměrnosti váhových podprostorů ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ vidíme, že pro lineárně nezávislé vektory z V_λ nacházíme různé ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$, každá zobrazuje vzájemně jednoznačně vektory $v \leftrightarrow \left(\rho(E_{-\varepsilon\alpha})\right)^{|\lambda(T_\alpha)|} v \in V_{S_\alpha(\lambda)}$. Proto musí být $\dim V_\lambda \leq \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$ Využitím $S_\alpha^2 = \mathbb{I}$ vidíme, že nerovnost lze obrátit, musí tedy platit rovnost $\dim V_\lambda = \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$. □

Definice 13.6. Pro $\lambda \in \Lambda_\rho$ dimenzi $\dim V_\lambda \equiv n_\lambda$ nazýváme **násobnost** váhy λ.

Definice 13.7. Váha $\lambda \in \Lambda_\rho$ je **dominantní** právě tehdy, když pro všechny $\alpha \in \Delta^+$ je $\lambda(T_\alpha) \geq 0$ (tj. $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$). Stejně definujeme dominantní prvky váhové mřížky $\mathcal{J}$.

Definice 13.8. Váha $\lambda \in \Lambda_\rho$ je **nejvyšší** právě tehdy, když pro všechny $\alpha \in \Delta^+$ platí, že $\lambda + \alpha$ není vahou reprezentace ρ.

Poznámka 13.9. Evidentně díky konečné dimenzi V každá reprezentace $\mathfrak{g}$ na V má alespoň jednu nejvyšší váhu.

Definice 13.10. Pro reprezentaci $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ a její nejvyšší váhu λ zvolíme vektor $v \in V_\lambda,\ v \neq 0$ a definujeme

$$R_\lambda = \operatorname{span}\{\rho(X_1) \dots \rho(X_k)v \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ X_j \in \mathfrak{g}\},$$

tj. $R_\lambda \subset\subset V$ a $\rho(X)R_\lambda \subset R_\lambda$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$.

Věta 13.11. R_λ je invariantní podprostor reprezentace $\rho,\ \rho|_{R_\lambda} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(R_\lambda)$ je ireducibilní, $\dim R_\lambda \cap V_\lambda = 1$, tj. $R_\lambda \cap V_\lambda = \operatorname{span}\{v\}$.

Důkaz. V definici R_λ stačí uvažovat $X_i = E_\alpha,\ \alpha \in \Delta$ a $X_i = H,\ H \in \mathfrak{g}_0$, cokoliv jiného získáváme lineární kombinací. Uvažujme $\alpha, \dots, \omega \in \Delta$, pak opakovaným využitím $\rho\big([H, E_\alpha]\big) = \alpha(H)\rho(E_\alpha)$ zjišťujeme, že

$$\rho(H)\big(\rho(E_\alpha) \dots \rho(E_\omega)v\big) = \big(\lambda(H) + \alpha(H) + \dots + \omega(H)\big)\big(\rho(E_\alpha) \dots \rho(E_\omega)v\big). \qquad (13.2)$$

Proto $\rho(E_\alpha) \dots \rho(E_\omega)v \in V_{\lambda+\alpha+\dots+\omega}$, a v definici R_λ stačí uvažovat $X_i = E_\alpha,\ \alpha \in \Delta$. Operátory $\rho(H)$ na R_λ působí diagonálně v bázi vybrané z prvků tvaru $\rho(E_\alpha) \dots \rho(E_\omega)v$.

Vezměme $w \in R_\lambda \cap V_\lambda$ ve tvaru $w = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \Delta \\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} \text{konst.}\, \rho(E_{\alpha_1}) \dots \rho(E_{\alpha_k})v$. Protože v každém členu je dle rovnice (13.2) váhový vektor, váhové podprostory mají nulový průnik a chceme, aby výsledkem byl vektor s vahou λ, musí po případném vyrušení opakujících se členů v lineární kombinaci být pro každý člen $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$. Proto některé z kořenů v součtu musí být kladné, některé záporné. Kladné prokomutujeme doprava pomocí vztahů $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, resp. $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \text{konst.}\, H_\alpha$. Nakonec jsou všechny kladné kořeny napravo a z maximality λ pro $\alpha \in \Delta^+$ platí $\rho(E_\alpha)v = 0$. Tudíž nyní jsou v součtu jen záporné kořeny, ale stále platí $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$. Proto $k = 0$, $w = \text{konst.}\, v$, $R_\lambda \cap V_\lambda = \operatorname{span}\{v\}$.

Ireducibilitu dokážeme sporem: mějme invariantní podprostor $W \subset\subset R_\lambda$ takový, že $W \cap (R_\lambda \cap V_\lambda) = \{0\}$. Podprostor W musí být rozložitelný do váhových podprostorů reprezentace ρ na R_λ. Proto má nenulový průnik s nějakými $V_\kappa,\ \kappa \neq \lambda,\ \kappa \in \Lambda_{\rho|_{R_\lambda}}$. Označme $W_\kappa = W \cap V_\kappa$. Pak platí $W = \dot{+}W_\kappa$. Z úplné reducibility reprezentace $\rho|_{R_\lambda}$ ale vyplývá, že z $v \in V_\lambda$ se nelze dostat do W_κ působením $\rho(X)$, tj. $W_\kappa \cap R_\lambda = 0$, $W = \{0\}$. □

Důsledek 13.12. Ireducibilní reprezentace ρ poloprosté komplexní algebry na V s nejvyšší vahou λ je nutně totožná s příslušným R_λ, tj. $V = R_\lambda$.

Věta 13.13. Buďte $\rho, \widetilde{\rho}$ ireducibilní reprezentace dané komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorových prostorech $V, \widetilde{V}$ se stejnou nejvyšší vahou λ. Pak jsou reprezentace $\rho, \widetilde{\rho}$ ekvivalentní, tj. existuje lineární bijekce $T : V \to \widetilde{V}$ taková, že pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ platí

$$\widetilde{\rho}(X) \circ T = T \circ \rho(X).$$

Důkaz. Z předpokládané ireducibility plyne $V = R_\lambda, \widetilde{V} = \widetilde{R}_\lambda$. Definujeme nekonečněrozměrný prostor $\mathcal{V}^\lambda$ nazývaný **Verma modul** s nejvyšší vahou λ a reprezentaci algebry $\mathfrak{g}$ na něm následujícím způsobem. Buď $\Delta^P = \{\alpha_j\}_{j=1}^l$, $E_{\pm j} \equiv E_{\pm\alpha_j}$ a v_0 abstraktní vektor. $\mathcal{V}^\lambda$ získáme jako lineární obal všech vícenásobných formálních aplikací E_{-j} na vektor v_0

$$\mathcal{V}^\lambda := \operatorname{span}\left\{E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0 \mid j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,l\},\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\right\},$$

Protože $\operatorname{span}\left\{E_\alpha, E_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta^P\right\}$ generuje pomocí komutátorů celou algebru $\mathfrak{g}$, je libovolná reprezentace algebry $\mathfrak{g}$ určená působením $E_{\pm\alpha}$, $\alpha \in \Delta^P$.

Nejprve definujeme působení algebry $\mathfrak{g}$ na v_0:

$$\begin{aligned} &T_\alpha(v_0) = \lambda(T_\alpha)v_0, && \forall\alpha \in \Delta, \\ &E_j(v_0) = 0, && E_{-j}(v_0) = E_{-j}v_0, && \forall j \in \{1,\dots,l\}. \end{aligned}$$

Obdobně definujeme

$$E_{-j}\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) = E_{-j}E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0.$$

Konzistentnost takto definované reprezentace vyžaduje

$$\begin{aligned} T_\beta\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \left(\lambda(T_\beta) - \alpha_{j_1}(T_\beta) - \dots - \alpha_{-j_k}(T_\beta)\right) E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0, \\ E_j\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \delta_{jj_1}\underbrace{T_{\alpha_j}\left(E_{-j_2}\dots E_{-j_k}v_0\right)}_{\left(\lambda\left(T_{\alpha_j}\right)-\alpha_{j_2}\left(T_{\alpha_j}\right)-\dots-\alpha_{-j_k}\left(T_{\alpha_j}\right)\right)E_{-j_2}\dots E_{-j_k}v_0} + \\ &\quad + \delta_{jj_2}E_{-j_1}\left(\lambda\left(T_{\alpha_j}\right) - \alpha_{j_3}\left(T_{\alpha_j}\right) - \dots - \alpha_{-j_k}\left(T_{\alpha_j}\right)\right)E_{-j_3}\dots E_{-j_k}v_0 + \\ &\quad + \dots + \delta_{jj_k}\lambda\left(T_{\alpha_j}\right)E_{-j_1}\dots E_{-j_{k-1}}v_0. \end{aligned}$$

Lze ukázat, že tímto způsobem definované působení $\operatorname{span}\{E_\alpha, E_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta^P\}$ na V_λ definuje konzistentním způsobem reprezentaci $\mathfrak{g}$ na $\mathcal{V}^\lambda$.

Nyní můžeme definovat lineární zobrazení $\pi : \mathcal{V}^\lambda \to R_\lambda$, $\widetilde{\pi} : \mathcal{V}^\lambda \to \widetilde{R}_\lambda$ předpisem

$$\begin{aligned} \pi\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \rho\left(E_{-j_1}\right)\dots\rho\left(E_{-j_k}\right)v, \\ \widetilde{\pi}\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) &= \widetilde{\rho}\left(E_{-j_1}\right)\dots\widetilde{\rho}\left(E_{-j_k}\right)\widetilde{v}. \end{aligned}$$

Protože $\operatorname{span}\left\{E_\alpha, E_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta^P\right\}$ generuje pomocí komutátorů celou algebru $\mathfrak{g}$, jsou zobrazení $\pi, \widetilde{\pi}$ surjektivní. Z konstrukce $\mathcal{V}^\lambda$ pro libovolné $X \in \mathfrak{g}$ platí $\rho(X)\circ\pi = \pi\circ X$, $\widetilde{\rho}(X)\circ\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}\circ X$ a π, $\widetilde{\pi}$ zobrazují váhové podprostory reprezentace na $\mathcal{V}^\lambda$ na váhové podprostory $\rho, \widetilde{\rho}$.

V důsledku pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ platí $X(\ker\pi) \subset \ker\pi$ a podobně pro $\ker\widetilde{\pi}$, tj. $\ker\pi$ a $\ker\widetilde{\pi}$ jsou invariantní podprostory $\mathcal{V}^\lambda$. Jejich zobrazením projekcemi $\pi, \widetilde{\pi}$ získáváme podprostory

$$\widetilde{\pi}(\ker\pi) = \operatorname{span}\left\{\widetilde{\pi}(Z) \mid Z \in \ker\pi,\ \text{tj. } \pi(Z) = 0\right\}$$

a podobně $\pi(\ker\widetilde{\pi})$. Vzhledem k tomu, že

$$\widetilde{\rho}(X)\left(\widetilde{\pi}(\ker\pi)\right) = \widetilde{\pi}(X\ker\pi) \subset \widetilde{\pi}(\ker\pi), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}$$

jsou to invariantní podprostory reprezentace $\widetilde{\rho}$, resp. ρ. Obě reprezentace ρ, $\widetilde{\rho}$ jsou ireducibilní a jednorozměrné váhové podprostory $\operatorname{span}\{v\} = \pi\left(\operatorname{span}\{v_0\}\right)$, $\operatorname{span}\{\widetilde{v}\} = \widetilde{\pi}\left(\operatorname{span}\{v_0\}\right)$ z definice neleží v $\pi(\ker\widetilde{\pi})$, resp. $\widetilde{\pi}(\ker\pi)$, neboť $v_0 \notin \ker\pi$, resp. $v_0 \notin \ker\widetilde{\pi}$. Proto je

$\widetilde{\pi}(\ker\pi)=\{0\}$ a $\pi(\ker\widetilde{\pi})=\{0\}$. Definujeme $T:R_\lambda\to\widetilde{R}_\lambda$ následovně: $T(w)=\widetilde{\pi}(W)$, kde $W\in\mathcal{V}^\lambda$ je libovolný vektor splňující $w=\pi(W)\in R_\lambda$. Ověřme konzistenci této definice: buď $W_0\in\ker\pi$, $W'=W+W_0$, pak $w=\pi(W')$ a

$$\widetilde{\pi}(W')=\widetilde{\pi}(W+W_0)=\widetilde{\pi}(W)+\underbrace{\widetilde{\pi}(W_0)}_{=0}=\widetilde{\pi}(W)=T(w).$$

Evidentně k T existuje inverzní zobrazení záměnou π a $\widetilde{\pi}$ v jeho definici, tj. T je bijekce. Protože pro libovolné $X\in\mathfrak{g}$ platí

$$T\big(\rho(X)w\big)=T\big(\rho(X)\pi(W)\big)=T\big(\pi(XW)\big)=\widetilde{\pi}(XW)=\widetilde{\rho}(X)\widetilde{\pi}(W)=\widetilde{\rho}(X)T(w),$$

je $T\circ\rho(X)=\widetilde{\rho}(X)\circ T$. □

Důsledek 13.14. Ireducibilní reprezentace ρ je plně určena svou nejvyšší vahou λ.

Definice 13.15. Mějme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{g}_0$ a systémem kořenů $\Delta\supset\Delta^+\supset\Delta^P=\{\alpha_j\}_{j=1}^l$. Definujeme $\lambda_j\in\mathcal{J}\subset\mathfrak{h}^*$: $\lambda_j\left(T_{\alpha_k}\right)=\delta_{jk}$. Funkcionály λ_j nazýváme **fundamentální váhy** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jim příslušející reprezentace nazýváme **fundamentální reprezentace**.

Poznámka 13.16. To, že $\lambda_j\in\mathcal{J}$ a že existují příslušné reprezentace je třeba ukázat. Obecný důkaz je poněkud náročnější, proto tak učiníme pro jednotlivé klasické série algeber.

Poznámka 13.17. Fundamentální váhy lze určit z Cartanovy matice vztahem $\lambda_j=\mathcal{M}_{jk}\alpha_k$, kde $\mathcal{M}_{jk}=\mathcal{A}^{-1}$ je inverze Cartanovy matice, neboť $\alpha_j=a_{jk}\lambda_k$ ze vztahu

$$\alpha_i\left(T_{\alpha_k}\right)=a_{ik}=a_{ij}\delta_{jk}=a_{ij}\lambda_j\left(T_{\alpha_k}\right).$$

Věta 13.18. Ke každé l–tici nezáporných celých čísel $m_1,\dots,m_l$ existuje právě jedna ireducibilní reprezentace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jejíž nejvyšší váha je $\lambda=\sum_{j=1}^l m_j\lambda_j$.

Důkaz. To, že může být nejvýše jedna jsme již ukázali, existenci ukážeme konstrukcí pro jednotlivé klasické série algeber, pro výjimečné algebry ponecháme bez důkazu. □

Cvičení 13.1. Popište strukturu adjungované a definující reprezentace prostých Lieových algeber $A_l=\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$. Najděte fundamentální váhy.

Řešení.

- Adjungovaná reprezentace: váhy jsou kořeny, viz cvičení 11.3 (a nulový funkcionál odpovídající Cartanově podalgebře), tj. $\alpha_{ij}=\varphi_i-\varphi_j$. Z výběru uspořádání pomocí vektoru H_0 plyne, že nejvyšší váha je $\varphi_1-\varphi_{l+1}=\alpha_1+\cdots+\alpha_l$, kde $\alpha_i=\varphi_i-\varphi_{i+1}$ jsou prosté kořeny.

  Vektory $T_j=\operatorname{diag}(t_{j,1},\dots,t_{j,l+1})$ jsou určeny vztahem $\alpha_i(T_j)=a_{ij}$, kde a_{ij} jsou složky Cartanovy matice. K jejich explicitnímu nalezení využijeme, že $\alpha_i(T_j)=a_{ij}=t_{j,i}-t_{j,i+1}\neq0$ pouze pro $i=j-1,j,j+1$,

$$\left.\begin{array}{rl}\alpha_{j-1}(T_j) & =t_{j,j-1}-t_{j,j}=-1,\\ \alpha_j(T_j) & =t_{j,j}-t_{j,j+1}=2,\\ \alpha_{j+1}(T_j) & =t_{j,j+1}-t_{j,j+2}=-1\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad T_j=\begin{pmatrix}\ddots & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 1 & \dots & \dots & \dots & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \end{pmatrix}\leftarrow j$$

- Fundamentální váhy jsou určené vztahem $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \varphi_1,$$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 1, \qquad \lambda_2 \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

  implikuje $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2$. Obdobně zjišťujeme, že $\lambda_i = \varphi_1 + \cdots + \varphi_i$. Snadno lze ověřit, že $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$.

- Definující reprezentace: Mějme definující reprezentaci v standardní bázi $(e_j)_{j=1}^{l+1} \subset \mathbb{C}^{l+1}$, $D \in \mathfrak{g}_0$, $De_j = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{l+1} \end{pmatrix} \cdot e_j = d_j e_j$. Její váhy tudíž jsou $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{l+1}\}$, kde $\varphi_{l+1} = -(\varphi_1 + \cdots + \varphi_l)$. Lze je vyjádřit ve tvaru $\{\varphi_1, \varphi_1 - \alpha_1, \varphi_1 - \alpha_1 - \alpha_2, \ldots, \varphi_1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_l\}$. Nejvyšší váha je proto $\varphi_1 = \lambda_1$, všechny násobnosti vah jsou 1.

Cvičení 13.2. Popište strukturu definující reprezentace algebry $C_l = \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C})$. Najděte fundamentální váhy této algebry.

Řešení.

- Definující reprezentace: $D \in \mathfrak{g}_0$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & d_l & & & & \\ & & & -d_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -d_l \end{pmatrix}, \quad \varphi_i(D) = d_i.$$

  Definující reprezentace má váhy $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l, -\varphi_1, \ldots, -\varphi_l\}$, její dimenze je $2l$, nejvyšší váha je v uspořádání dle cvičení 11.4 rovna φ_1.

- Máme prosté kořeny $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1},\ i \le l-1,\ \alpha_l = 2\varphi_l$. Tudíž vektory T_j určené vztahem $\alpha_i(T_j) = a_{ij}$ jsou

$$T_j = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow l+j \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad \text{kde } j \le l-1,$$

a

$$\left.\begin{array}{rl}\alpha_i(T_l) & = 0,\ i < l-1 \\ \alpha_{l-1}(T_l) & = -1 \\ \alpha_l(T_l) & = 2\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad T_l = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & -1 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow l \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} .$$

Fundamentální váhy určené vztahem $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$ jsou

$$\lambda_i = \varphi_1 + \dots + \varphi_i,\ i \in \hat{l}.$$

Cvičení 13.3. Najděte fundamentální váhy algebry $D_l = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$.
Řešení. Z výsledku cvičení 11.5 máme

$$H = \begin{pmatrix} d_1\sigma_2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_l\sigma_2 \end{pmatrix} \equiv H(d_1, \dots, d_l), \qquad \varphi_i(H) = d_i,$$

prosté kořeny jsou $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}$ pro $i \le l-1$ a $\alpha_l = \varphi_{l-1} + \varphi_l$, vektory

$$T_i = H(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{-1}, 0, \dots, 0) \text{ pro } i \le l-1.$$

Vektor T_l je vztahy

$$\alpha_{l-2}(T_l) = -1 = d_{l-2} - d_{l-1}, \quad \alpha_{l-1}(T_l) = 0 = d_{l-1} - d_l, \quad \alpha_l(T_l) = 2 = d_{l-1} + d_l$$

určen ve tvaru

$$T_l = H(0, \dots, 0, 1, 1).$$

Rovnice $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$ určuje fundamentální váhy

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varphi_1, \\ \lambda_i &= \varphi_1 + \dots + \varphi_i,\ i \le l-2, \\ \lambda_{l-1} &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_{l-1} - \varphi_l), \\ \lambda_l &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_l). \end{aligned}$$

Definující reprezentace na $\mathbb{C}^{2l}$ má váhy $\{\varphi_1, \dots, \varphi_l, -\varphi_1, \dots, -\varphi_l\}$, tj. její nejvyšší váha je $\lambda_1 = \varphi_1$.
Cvičení 13.4. Najděte fundamentální váhy algebry $B_l = \mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C})$.
Řešení. Z výsledků cvičení 11.6 máme

$$H = \begin{pmatrix} d_1\sigma_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_l\sigma_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_i(H) = d_i,$$

prosté kořeny $\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}$, kde $i \leq l-1$, a $\alpha_l = \varphi_l$. Podobně jako pro $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$ máme $T_i = H(0,\ldots,0,\underset{i}{1},\underset{i+1}{-1},0,\ldots,0)$ pro $i \leq l-1$. Vektor T_l je určen rovnicemi

$$\alpha_{l-1}(T_l) = -2, \qquad\qquad \alpha_l(T_l) = 2,$$

jež implikují $T_l = H(0,\ldots,0,2)$. Fundamentální váhy určené $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$ jsou

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \varphi_1 + \cdots + \varphi_i,\ i \leq l-1,\\ \lambda_l &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_l).\end{aligned}$$

13.2 Konstrukce ireducibilní reprezentace se zadanou nejvyšší vahou

Zabývejme se nyní otázkou, jak k zadané nejvyšší váze $\lambda = \sum_{j=1}^{l} m_j\lambda_j \in \mathcal{J}$ najít příslušnou ireducibilní reprezentaci s touto nejvyšší vahou. K tomu je dobré si uvědomit, jaké váhy má tenzorový součin dvou reprezentací.

Mějme reprezentace $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, $\widetilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(\widetilde{V}\right)$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na vektorových prostorech V, $\widetilde{V}$. Na tenzorovém součinu $V \otimes \widetilde{V}$ definujeme reprezentaci $\rho \otimes \widetilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(V \otimes \widetilde{V}\right)$, zvanou **tenzorový součin** reprezentací ρ a $\widetilde{\rho}$, předpisem

$$(\rho \otimes \widetilde{\rho})\,(X) = \rho(X) \otimes \mathbb{I}|_{\widetilde{V}} + \mathbb{I}|_{V} \otimes \widetilde{\rho}(X), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Snadno ověříme, že $\rho \otimes \widetilde{\rho}$ je homomorfismus $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{gl}\left(V \otimes \widetilde{V}\right)$

$$\begin{gathered}[(\rho \otimes \widetilde{\rho})\,(X), (\rho \otimes \widetilde{\rho})\,(Y)]\,(v \otimes \widetilde{v}) =\\ = (\rho \otimes \widetilde{\rho})\,(X)\big(\rho(Y)v \otimes \widetilde{v} + v \otimes \widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}\big) - (\rho \otimes \widetilde{\rho})\,(Y)\big(\rho(X)v \otimes \widetilde{v} + v \otimes \widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}\big) =\\ = \rho(X)\rho(Y)v \otimes \widetilde{v} + \rho(Y)v \otimes \widetilde{\rho}(X)\widetilde{v} + \rho(X)v \otimes \widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v} + v \otimes \widetilde{\rho}(X)\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v} -\\ -\rho(Y)\rho(X)v \otimes \widetilde{v} - \rho(X)v \otimes \widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v} - \rho(Y)v \otimes \widetilde{\rho}(X)\widetilde{v} - v \otimes \widetilde{\rho}(Y)\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v} =\\ = \big(\rho\big([X,Y]\big)v\big) \otimes \widetilde{v} + v \otimes \big(\widetilde{\rho}\big([X,Y]\big)\widetilde{v}\big) = (\rho \otimes \widetilde{\rho})\big([X,Y]\big)v \otimes \widetilde{v}.\end{gathered}$$

Buď nadále $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra a Λ_ρ, $\Lambda_{\widetilde{\rho}}$ odpovídající systémy vah reprezentací $\rho, \widetilde{\rho}$. Pro libovolná $\lambda \in \Lambda_\rho$, $v \in V_\lambda$, $\mu \in \Lambda_{\widetilde{\rho}}$, $\widetilde{v} \in \widetilde{V}_\mu$ a $H \in \mathfrak{g}_0$ máme

$$(\rho \otimes \widetilde{\rho})(H)v \otimes \widetilde{v} = \underbrace{\rho(H)v}_{\lambda(H)v} \otimes \widetilde{v} + v \otimes \underbrace{\widetilde{\rho}(H)\widetilde{v}}_{\mu(H)\widetilde{v}} = (\lambda+\mu)(H)v \otimes \widetilde{v},$$

tudíž $\lambda+\mu$ je váhou reprezentace $\rho \otimes \widetilde{\rho}$, $\Lambda_{\rho\otimes\widetilde{\rho}} = \{\lambda+\mu \mid \lambda \in \Lambda_\rho, \mu \in \Lambda_{\widetilde{\rho}}\}$ a máme rozklad $V \otimes \widetilde{V}$ do odpovídajících váhových podprostorů $V_{\lambda+\mu}$, $\lambda \in \Lambda_\rho$, $\mu \in \Lambda_{\widetilde{\rho}}$.

Speciálně pokud $\lambda_{\max}$, $\mu_{\max}$ jsou nejvyšší váhy uvedených reprezentací, pak $\lambda_{\max}+\mu_{\max}$ je nejvyšší vahou reprezentace $\rho \otimes \widetilde{\rho}$.

Příklad 13.19. Buď D^j $(2j+1)$–rozměrná reprezentace algebry $\mathfrak{so}(3)$, kde $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$. Pak lze rozložit

$$D^j \otimes D^k = D^{j+k} \oplus \cdots \oplus D^{|j-k|}.$$

Jedná se o Clebsch–Gordanův rozklad známý z teorie momentu hybnosti v kvantové mechanice.

Reprezentace $\rho\otimes\widetilde{\rho}$ je v naprosté většině případů reducibilní. Její rozklad na ireducibilní reprezentace je obecně netriviální kombinatorická úloha. Určitě je v $V\otimes\widetilde{V}$ obsažena ireducibilní reprezentace s nejvyšší vahou $\lambda_{\max}+\mu_{\max}$.

Pokud speciálně $\widetilde{V}=V$, můžeme uvažovat lineární operátor

$$S_{12}: V\otimes V\to V\otimes V: S_{12}(u\otimes v)=v\otimes u.$$

Vidíme, že $S_{12}^2=\mathbb{I}$, tudíž $\sigma(S_{12})=\{\pm1\}$, a pro libovolné $X\in\mathfrak{g}$ platí

$$\begin{aligned}[S_{12},(\rho\otimes\rho)(X)](u\otimes v) &= S_{12}\big(\rho(X)u\otimes v+u\otimes\rho(X)v\big)-(\rho\otimes\rho)(X)(v\otimes u)=\\ &= v\otimes\rho(X)u+\rho(X)v\otimes u-\rho(X)v\otimes u-v\otimes\rho(X)u=0,\end{aligned}$$

tj.

$$[S_{12},(\rho\otimes\rho)(X)]=0.$$

Proto lze reprezentaci $\rho\otimes\rho$ zúžit na vlastní podprostory S_{12}

$$\begin{aligned} V\otimes_S V &= \operatorname{span}\{u\otimes v+v\otimes u\mid u,v\in V\}, & S_{12}|_{V\otimes_S V}&=\mathbb{I}|_{V\otimes_S V},\\ V\wedge V &= \operatorname{span}\{u\otimes v-v\otimes u\mid u,v\in V\}, & S_{12}|_{V\wedge V}&=-\mathbb{I}|_{V\wedge V}.\end{aligned}$$

Takto definované reprezentace na $V\otimes_S V$, resp. $V\wedge V$ nazýváme **symetrický**, resp. **antisymetrický tenzorový součin** reprezentace ρ se sebou samotnou a značíme je $\rho\otimes_S\rho$, resp. $\rho\wedge\rho$.

Symetrizace resp. antisymetrizace nám určuje, které váhové podprostory v $V\otimes_S V$, resp. $V\wedge V$, zůstanou. Pokud λ je nejvyšší váha a μ druhá nejvyšší váha reprezentace ρ na V, pak

- $\rho\otimes_S\rho$ na $V\otimes_S V$ má nejvyšší váhu 2λ,
- $\rho\wedge\rho$ na $V\wedge V$ má nejvyšší váhu $\lambda+\mu$.

Příklad 13.20. V případě algebry $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ a třírozměrné reprezentace $V=D^1$ máme váhy

$$\underset{\text{váhy:}}{D^1\otimes D^1} = \underset{\mathbf{5}}{D^2}\oplus\underset{\mathbf{3}}{D^1}\oplus\underset{\mathbf{1}}{D^0} = \underbrace{\underset{\mathbf{6}}{D^1\otimes_S D^1}}_{D^2\oplus D^0}\oplus\underbrace{\underset{\mathbf{3}}{D^1\wedge D^1}}_{D^1},$$

kde první rovnost odpovídá Clebsch–Gordanovu rozkladu, druhá rozkladu do symetrické a antisymetrické části tenzorového součinu.

Zobecněním tohoto postupu je rozklad vyšších tenzorových mocnin reprezentací, tj. $\rho^{\otimes k}=\rho\otimes\rho\otimes\cdots\otimes\rho$ na $V^{\otimes k}=V\otimes V\otimes\cdots\otimes V$. Reprezentace $\rho^{\otimes k}$ je definována předpisem

$$(\rho\otimes\cdots\otimes\rho)(X)=\rho(X)\otimes\mathbb{I}\otimes\cdots\otimes\mathbb{I}+\mathbb{I}\otimes\rho(X)\otimes\mathbb{I}\otimes\cdots\otimes\mathbb{I}+\cdots+\mathbb{I}\otimes\cdots\otimes\mathbb{I}\otimes\rho(X).$$

Definujeme operátor $S_{ij}: V^{\otimes k}\to V^{\otimes k}$ zaměňující i–tou a $j-$tou složku tenzorového součinu,

$$S_{ij}(u_1\otimes\cdots\otimes u_i\otimes\cdots\otimes u_j\otimes\cdots\otimes u_k)=u_1\otimes\cdots\otimes u_j\otimes\cdots\otimes u_i\otimes\cdots\otimes u_k.$$

Podobně jako výše zjišťujeme, že

$$[S_{ij},(\rho\otimes\cdots\otimes\rho)(X)]=0,$$

tj. operátory $\rho^{\otimes k}(X)$ komutují s přirozenou reprezentací symetrické grupy S_k na $V^{\otimes k}$ zaměňující pořadí složek v tenzorovém součinu. Protože grupa S_k, kde $k > 2$, není abelovská, pro $k > 2$ již neexistuje rozklad $V^{\otimes k}$ do společných vlastních podprostorů S_{ij}. Složitější postup vycházející z teorie reprezentací symetrické grupy (tzv. Youngovy tabulky) je zapotřebí, pokud se mají identifikovat všechny možné invariantní podprostory. Nicméně, dva společné vlastní podprostory vždy existují:

- $V^{\otimes_S k} = V \otimes_S \cdots \otimes_S V$, $S_{ij}|_{V^{\otimes_S k}} = \mathbb{I}|_{V^{\otimes_S k}}$,
- $V^{\wedge k} = V \wedge \cdots \wedge V$, $S_{ij}|_{V^{\wedge k}} = -\mathbb{I}|_{V^{\wedge k}}$.

Příslušné reprezentace algebry $\mathfrak{g}$ značíme $\rho^{\otimes_S k}$, $\rho^{\wedge k}$. Ze struktury váhových podprostorů vidíme, že pokud ρ je ireducibilní s vahami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, přičemž $\lambda_1(H_0) > \lambda_2(H_0) \geq \cdots \geq \lambda_n(H_0)$, pak:

- $\rho^{\otimes_S k}$ má nejvyšší váhu $k\lambda_1$,
- $\rho^{\wedge k}$ má nejvyšší váhu $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ po zohlednění případných násobností.

Na závěr si stručně shrňme celý postup vysvětlený v této kapitole. Mějme komplexní poloprostou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$, její fundamentální váhy $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathcal{J}$ a příslušné fundamentální reprezentace ρ_j na V_j. Nechť $\lambda = \sum_j m_j\lambda_j$, kde $m_j \in \mathbb{N}_0$. Příslušnou ireducibilní reprezentaci s nejvyšší vahou λ najdeme v $(\rho_1)^{\otimes_S m_1} \otimes (\rho_2)^{\otimes_S m_2} \otimes \cdots \otimes (\rho_l)^{\otimes_S m_l}$. Jednorozměrný váhový podprostor V_λ, příslušející nejvyšší váze λ je roven tenzorovému součinu podprostorů $V_{\lambda_j}^{\otimes m_j} = \underbrace{V_{\lambda_j} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_j}}_{m_j-\text{krát}}$. Z něj lze získat celou reprezentaci určením invariantního podprostoru R_λ.

Cvičení 13.5. Uvažujme algebru $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ s Lieovými závorkami $[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm$, $[L_+, L_-] = 2L_3$. Její fundamentální reprezentace $\rho \equiv D^{1/2}$ na $D^{1/2} = \text{span}\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ má tvar

$$\rho(L_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad \rho(L_+) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \rho(L_-) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$\rho(L_3)|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle, \qquad \rho(L_3)|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle, \qquad \text{váhy: } \lambda = \pm\frac{1}{2},$$

Explicitně rozložte tenzorový součin ρ se sebou samou na ireducibilní reprezentace.

Řešení.

$$(\rho\otimes\rho)(L_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

působí na bazické vektory následovně

$$(\rho\otimes\rho)(L_3)|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \qquad (\rho\otimes\rho)(L_3)|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\rangle = 0,$$
$$(\rho\otimes\rho)(L_3)|\downarrow\downarrow\rangle = -|\downarrow\downarrow\rangle, \qquad (\rho\otimes\rho)(L_3)|\downarrow\uparrow\rangle = 0,$$

$$(\rho\otimes\rho)(L_-)|\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle, \qquad (\rho\otimes\rho)(L_-)\big(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\big) = 2|\downarrow\downarrow\rangle,$$
$$(\rho\otimes\rho)(L_-)|\downarrow\downarrow\rangle = 0, \qquad (\rho\otimes\rho)(L_-)\big(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\big) = |\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle = 0,$$

a podobně pro $(\rho\otimes\rho)(L_+)$. Váhy jsou $\pm 2\lambda, 0$, násobnosti $n_{\pm 2\lambda} = 1$, $n_0 = 2$.

Ireducibilní podprostory jsou symetrizovaný a antisymetrizovaný tenzorový součin,

$$D^1 = \text{span}\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}, \qquad D^0 = \text{span}\{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\}.$$

Cvičení 13.6. Nalezněte pomocí tenzorových mocnin definující reprezentace všechny fundamentální reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$.

Řešení. Víme, že první fundamentální reprezentace ρ_1 je definující reprezentace, $\dim \rho_1 = l+1$, viz cvičení 13.1. Pro antisymetrizovaný tenzorový součin $\rho_1 \wedge \rho_1$ máme

$$\begin{aligned}(\rho_1 \wedge \rho_1)(D)(e_i \wedge e_j) &= (\rho_1(D) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \rho_1(D))(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = \\ &= d_i e_i \otimes e_j - d_j e_j \otimes e_i + e_i \otimes d_j e_j - e_j \otimes d_i e_i = (d_i + d_j)(e_i \wedge e_j),\end{aligned}$$

tj. váhy jsou $\{\varphi_i + \varphi_j \mid i \neq j\}$, $\dim \rho \wedge \rho = \binom{l+1}{2}$, nejvyšší je $\varphi_1 + \varphi_2$.

Pro $\rho^{\wedge j}$ jsou váhy $\left\{\varphi_{i_1} + \cdots + \varphi_{i_j} \mid i_1 < \cdots < i_j\right\}$, $\dim \rho^{\wedge j} = \binom{l+1}{j}$, nejvyšší váha je $\lambda_j = \varphi_1 + \cdots + \varphi_j$.

Pro $\rho^{\wedge l}$ jsou váhy $\left\{\sum_{i\neq 1} \varphi_i, \ldots, \sum_{i \neq l+1} \varphi_i\right\} = \{-\varphi_1, \ldots, -\varphi_{l+1}\}$. Poznamenejme, že pro $l > 1$ to je množina vah různá od vah definující reprezentace $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{l+1}\}$, tj. jedná se o jinou, neekvivalentní reprezentaci stejné dimenze $l+1$. Nejvyšší váha této reprezentace je λ_{l+1}. V případě, že $l = 1$, je $\rho^{\wedge l=1} \simeq \rho$, tj. $\rho^{\wedge l=1}$ je totožná s definující reprezentací.

Tím jsme zkonstruovali všechny fundamentální reprezentace algebry $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$.

Cvičení 13.7. Určete, které z fundamentálních reprezentací algeber B_l, C_l a D_l lze zkonstruovat tenzorovými mocninami z příslušných definujících reprezentací.

Řešení. Všechny kromě

- B_l reprezentace s nejvyšší vahou $\lambda_l = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_{l-1} + \varphi_l)$,
- D_l reprezentace s nejvyššími vahami

$$\lambda_{l-1} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_{l-1} - \varphi_l), \qquad \lambda_l = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_{l-1} + \varphi_l).$$

Zdůvodněte.

13.3 Spinorové reprezentace

Při studiu příkladů jsme zjistili, že většinu fundamentálních reprezentací klasických sérií prostých algeber lze získat z definující reprezentace antisymetrizovanými tenzorovými součiny. Reprezentacím, které umíme získat tenzorovými součiny z definující maticové reprezentace na příslušném vektorovém prostoru, říkáme **vektorové**. V případě sérií $B_l = \mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C})$, $D_l = \mathfrak{so}(2l,\mathbb{C})$ ale existují i fundamentální váhy a jim odpovídající reprezentace, které takto získat nelze. Příslušné tzv. **spinorové** reprezentace konstruujeme následujícím postupem, s využitím pojmu Cliffordovy algebry.

Definice 13.21. Uvažujme 2^n–rozměrnou asociativní algebru

$$\mathcal{C}\ell(n) = \operatorname{span}\{\mathbb{I}, \gamma^{a_1} \ldots \gamma^{a_k} \mid 1 \leq k \leq n,\ a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$$

s asociativním násobením určeným antikomutačním vztahem

$$\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} \equiv \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\delta^{ab}\mathbb{I},$$

který nám umožňuje výsledek násobení vždy zapsat jako prvek $\mathcal{C}\ell(n)$ prokomutováním do patřičného pořadí generátorů γ^{a_j}. Tuto algebru nazýváme **Cliffordova algebra** s n generátory.

V Cliffordově algebře $\mathcal{C}\ell(n)$ lze definovat vektory

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b = \frac{1}{4}\left[\gamma^a, \gamma^b\right], \qquad a \neq b, \qquad \Sigma^{ab} = -\Sigma^{ba},$$

které vyhovují komutačním relacím

$$\begin{aligned}\left[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}\right] &= \frac{1}{4}\left(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d - \gamma^c\gamma^d\gamma^a\gamma^b\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(2\delta^{bc}\gamma^a\gamma^d - 2\delta^{ac}\gamma^b\gamma^d + 2\delta^{bd}\gamma^c\gamma^a - 2\delta^{ad}\gamma^c\gamma^b\right) = \\ &= \delta^{bc}\Sigma^{ad} - \delta^{ac}\Sigma^{bd} - \delta^{bd}\Sigma^{ac} + \delta^{ad}\Sigma^{bc}\end{aligned}$$

Pro porovnání si uvědomme, že v algebře $\mathfrak{so}(n)$ obvyklá báze $\left(S^{ab} = E^{ab} - E^{ba}\right)_{a<b}$ (kde E^{ab} je matice s jednotkou na pozici (a, b) a nulami všude jinde) má stejné komutační relace:

$$\left[S^{ab}, S^{cd}\right] = \delta^{bc}S^{ad} - \delta^{ac}S^{bd} - \delta^{bd}S^{ac} + \delta^{ad}S^{bc}.$$

Proto libovolná reprezentace asociativní Cliffordovy algebry $\mathcal{C}\ell(n)$ definuje též reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{so}(n)$. Uvažme dva případy podle parity dimenze n.

- $n = 2l$. Přejděme k nové bázi Cliffordovy algebry $\mathcal{C}\ell(2l)$

$$\sigma_j = \frac{\gamma^{2j-1} + \mathrm{i}\gamma^{2j}}{2}, \qquad \sigma_j^* = \frac{\gamma^{2j-1} - \mathrm{i}\gamma^{2j}}{2} \tag{13.3}$$

  s antikomutátory popsanými rovnicemi

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 0 = \{\sigma_j^*, \sigma_k^*\}, \qquad \{\sigma_j, \sigma_k^*\} = \delta_{jk}\mathbb{I}. \tag{13.4}$$

  Vidíme, že máme algebru l fermionových kreačních a anihilačních operátorů. Jejich reprezentace se dá přirozeně zkonstruovat na 2^l–rozměrném vektorovém prostoru

$$V = \mathrm{span}\left\{\sigma_{a_1}^* \ldots \sigma_{a_k}^*|0\rangle \mid 0 \leq k \leq l,\ 1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq l\right\},$$

  kde působení anihilačních operátorů plyne z $\sigma_a|0\rangle = 0$ a rovnic (13.4). Tím získáváme též reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{so}(2l)$ na V. Protože prvky $\mathfrak{so}(2l)$ jsou reprezentovány kvadratickými výrazy v σ_j, σ_k^*, vektorový prostor V se z hlediska reprezentace $\mathfrak{so}(2l)$ rozpadá na dva invariantní podprostory, se sudým, resp. lichým, počtem σ^* působících na $|0\rangle$.

  Přímým výpočtem zjišťujeme, že bázi algebry $\mathfrak{so}(2l)$ ve tvaru F_{ij} ,$F_{ij}^\dagger$, G_{ij}, $H(\kappa_1, \ldots, \kappa_l)$ reprezentujeme operátory

$$F_{ij} = \sigma_i^*\sigma_j^*, \quad F_{ij}^\dagger = \sigma_i\sigma_j, \quad G_{ij} = \sigma_i^*\sigma_j, \quad H(\kappa_1, \ldots, \kappa_l) = \sum_{j=1}^{l} \kappa_j \left(\sigma_j^*\sigma_j - \frac{1}{2}\right).$$

  Protože

$$H(\kappa_1, \ldots, \kappa_l)\sigma_{a_1}^* \ldots \sigma_{a_k}^*|0\rangle = \sum_{j=1}^{l} \kappa_j \left(n_j - \frac{1}{2}\right) \sigma_{a_1}^* \ldots \sigma_{a_k}^*|0\rangle.$$

jsou bazické vektory $\sigma^*_{a_1}\dots\sigma^*_{a_k}|0\rangle \in V$ současně váhovými vektory konstruované reprezentace algebry $\mathfrak{so}(2l)$, s vahou $\sum_{j=1}^{l}\left(n_j-\frac{1}{2}\right)\varphi_j$. Vektor $\sigma^*_1\dots\sigma^*_l|0\rangle \in V$ je váhový vektor s nejvyšší vahou, která je rovna $\frac{1}{2}(\varphi_1+\ldots+\varphi_l)$. Tato váha je současně nejvyšší vahou ireducibilní **spinorové reprezentace** na podprostoru

$$V_1=\operatorname{span}\left\{\sigma^*_{a_1}\dots\sigma^*_{a_k}|0\rangle \mid 0\le k\le l,\ 1\le a_1<\dots<a_k\le l\right\},\quad 2\,|\,l-k.$$

Pro podprostor

$$V_2=\operatorname{span}\left\{\sigma^*_{a_1}\dots\sigma^*_{a_k}|0\rangle \mid 0\le k\le l,\ 1\le a_1<\dots<a_k\le l\right\},\quad 2\not|\,l-k$$

s opačnou paritou vektorů máme váhy $\sum_{j=1}^{l}\left(n_j-\frac{1}{2}\right)\varphi_j$, kde

$$k=\sum_{j=1}^{l}n_j\in\{l-1,l-3,\dots,0\vee 1\ (\text{dle parity } l)\}.$$

Nejvyšší váha této **spinorové reprezentace** je při našem uspořádání rovna $\frac{1}{2}(\varphi_1+\dots+\varphi_{l-1}-\varphi_l)$. Odpovídá váhovému vektoru $\sigma^*_1\dots\sigma^*_{l-1}|0\rangle$. Poznamenejme, že $\dim V_1=\dim V_2=2^{l-1}$.

- $n=2l+1$. Postupujeme obdobně, ale při změně báze (13.3) nám přebývá γ^{2l+1} vyhovující

$$\left\{\gamma^{2l+1},\sigma_j\right\}=0=\left\{\gamma^{2l+1},\sigma^*_j\right\}. \tag{13.5}$$

Vybudujeme stejně jako výše reprezentaci vektorů σ_j, σ^*_j na 2^l–rozměrném vektorovém prostoru V. Působení generátoru γ^{2l+1} v souladu s antikomutátory (13.5) definujeme předpisem

$$\gamma^{2l+1}|0\rangle=|0\rangle,\qquad \gamma^{2l+1}\left(\sigma^*_{a_1}\dots\sigma^*_{a_k}|0\rangle\right)=(-1)^k\left(\sigma^*_{a_1}\dots\sigma^*_{a_k}|0\rangle\right).$$

Prvky představující bazické vektory algebry $\mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C})$ v Cliffordově algebře $\mathcal{C}\ell(2l+1)$ nyní obsahují γ^{2l+1}, proto operátory reprezentující Lieovu algebru $\mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C})$ na V nejsou výlučně kvadratické v fermionových kreačních a anihilačních operátorech σ_j, σ^*_j. V důsledku vektorový prostor V neobsahuje invariantní podprostory, tudíž **spinorová reprezentace** Lieovy algebry $\mathfrak{so}(2l+1)$ na V je ireducibilní s nejvyšší vahou $\frac{1}{2}(\varphi_1+\dots+\varphi_l)$. Její dimenze je 2^l.

Kapitola 14

Reprezentace algebry $\mathfrak{su}(3)$ v částicové fyzice

Jako příklad využití teorie reprezentací poloprostých Lieových algeber si nyní nastíníme ve zjednodušené a historicky ne zcela přesné podobě cestu, po níž fyzikové dospěli ke kvarkovému modelu silně interagujících částic, tzv. hadronů. V této kapitole předpokládáme, že čtenář má základní znalosti kvantové mechaniky.

14.1 Symetrie a integrály pohybu

V klasické mechanice spojité symetrie, tj. invariance teorie vůči spojitým grupám transformací, implikují existenci a konkrétní tvar integrálů pohybu. Toto tvrzení je obsahem tzv. věty Noetherové.

V kvantové mechanice se tato korespondence stává mnohem přirozenější: generátory 1-parametrických grup symetrií Hamiltoniánu reprezentované (anti)samosdruženými operátory na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$ přímo jsou integrály pohybu, tj. pozorovatelné komutující s Hamiltoniánem (vynásobené imaginární jednotkou, viz poznámka 4.8). Množina antisamosdružených operátorů komutujících s Hamiltoniánem je uzavřená vzhledem ke komutátoru a reálným lineárním kombinacím, proto máme reálnou Lieovu algebru integrálů pohybu.

Uvažujme nadále případ, kdy Lieova algebra integrálů pohybu je konečněrozměrná kompaktní Lieova algebra. Pak lze ukázat, že i pro nekonečněrozměrný Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ je její antisamosdružená reprezentace na $\mathscr{H}$ direktním součtem konečněrozměrných ireducibilních reprezentací, tj. v $\mathscr{H}$ existuje báze tvořená váhovými vektory. Cartanova podalgebra je tvořena komutujícími operátory, ty současně komutují s Hamiltonánem. Pokud Lieova algebra integrálů pohybu je dostatečně velká, pak Cartanova podalgebra společně s Hamiltoniánem může definovat úplnou množinu pozorovatelných, tj. ireducibilní reprezentace jsou určené energií a váhové vektory jsou vektory s přesně určenými hodnotami úplné množiny pozorovatelných tvořené Cartanovou podalgebrou a Hamiltoniánem.

14.2 Izospin

Je experimentálně zjištěným faktem, že proton a neutron se z hlediska silné jaderné interakce chovají v podstatě stejně. Proto W. Heisenberg počátkem 30. let 20. století zkusil zfor-

mulovat teorii jaderných sil založenou na předpokladu, že p a n jsou 2 stavy jediné částice zvané nukleon. Tj. předpokládal, že existuje nějaký vnitřní stupeň volnosti nukleonu, jemu odpovídající Hilbertův prostor můžeme chápat jako $\mathbb{C}^2$, se ztotožněním $|p\rangle = \binom{1}{0}$ a $|n\rangle = \binom{0}{1}$. Teorii jaderné interakce pak budujeme jako invariantní vůči jejich libovolnému míšení zachovávajícímu normu, tj. grupě $SU(2)$. Proto uvažujeme 2–rozměrnou reprezentaci $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$, což je dvojznačná reprezentace grupy $SO(3)$, tj. reprezentace poločíselného spinu. Tento spin je ve vnitřním Hilbertově prostoru nesouvisejícím s prostoročasovými vlastnostmi, momentem hybnosti apod. a rozlišuje mezi různými nukleony. Proto ho nazýváme **izotopický spin** neboli **isospin**. Z teorie reprezentací momentu hybnosti víme, že na $\mathscr{H}$ máme dva komutující operátory I^2, I_3, které v bázi $(|p\rangle, |n\rangle)$ působí

$$I^2|p\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|p\rangle, \qquad I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle,$$
$$I^2|n\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|n\rangle, \qquad I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle.$$

Vidíme, že elektrický náboj nukleonů lze vyjádřit vztahem

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}.$$

Postupně byly objeveny další silně interagující částice: antinukleony, piony aj. K popisu této pozorované různorodosti bylo zavedeno baryonové číslo B, tj. počet nukleonů, které se dle výsledků experimentů zachovává při všech interakcích. Jednotlivé druhy částic byly zařazeny do vhodně vybraných reprezentací isospinové algebry $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$. Pionům byla přiřazena vektorová reprezentace $\mathfrak{so}(3)$, tj. $l = 1$, $m = -1, 0, 1$, antinukleonům reprezentace sdružená k nukleonové spinové reprezentaci. Hodnota baryonového čísla je dána zvolenou reprezentací a pro elektrický náboj platí

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B.$$

Konkrétně máme pro

- nukleony $B = 1$, $\sigma(I_3) = \{\pm\frac{1}{2}\}$, $Q \in \{0, 1\}$,
- piony $B = 0$, $\sigma(I_3) = \{-1, 0, 1\}$, $Q \in \{-1, 0, 1\}$,
- antinukleony: $B = -1$, $\sigma(I_3) = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$, $Q \in \{0, -1\}$

Situace se dále zkomplikovala objevem kaonů, které se rozpadají na tehdy již známé částice, ale podstatně pomaleji, než fyzikové očekávali. To vedlo k poznání, že jsou dva druhy jaderných interakcí, nyní zvané silná a slabá, a že se kaony rozpadají pod vlivem slabé interakce, nikoliv silné. Proto byla zavedena nová veličina zachovávající se při silných jaderných interakcích, nazvaná ze zřejmého důvodu **podivnost**. Elektrický náboj pak byl vyjádřen Gell-Mann-Nishijimovým vzorcem

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \text{ kde } Y = S + B \text{ je tzv. hypernáboj.} \tag{14.1}$$

Tento vzorec vedl k pokusům najít popis silných jaderných interakcí, v němž by I_3 a Y byly komutující prvky jedné větší algebry integrálů pohybu, nejlépe prosté kompaktní.

Po několika neúspěšných pokusech (ve smyslu dávajících předpovědi v rozporu s tehdy prováděnými experimenty) v roce 1964 nezávisle na sobě dva fyzikové, M. Gell-Mann a G. Zweig, přišli s ekvivalentními teoriemi využívajícími algebru $\mathfrak{su}(3)$ a myšlenku nukleonů složených z hypotetických komponent, které byly později experimentálně prokázány a v souladu s Gell-Mannovým popisem nazvány kvarky.

14.3 Reprezentace $\mathfrak{su}(3)$

Uvažujme bázi Lieovy algebry $\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ ve tvaru tzv. Gell-Mannových matic

$$I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}, \tag{14.2}$$

$$I_+ = E_{12} = E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_+ = E_{23} = E_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_+ = [I_+, U_+] = E_{13} = E_{\alpha+\beta}, \qquad I_- = (I_+)^T, \qquad U_- = (U_+)^T, \qquad V_- = (V_+)^T$$

s komutačními relacemi

$$\begin{aligned}
&[I_+, V_+] = 0, && [U_+, V_+] = 0, && [I_3, Y] = 0 \\
&[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm, && [I_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm, && [I_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm, \\
&[Y, I_\pm] = 0, && [Y, U_\pm] = \pm U_\pm, && [Y, V_\pm] = \pm V_\pm, \\
&[I_+, I_-] = 2I_3, && [U_+, U_-] = -I_3 + \frac{3}{2}Y, && [V_+, V_-] = I_3 + \frac{3}{2}Y.
\end{aligned} \tag{14.3}$$

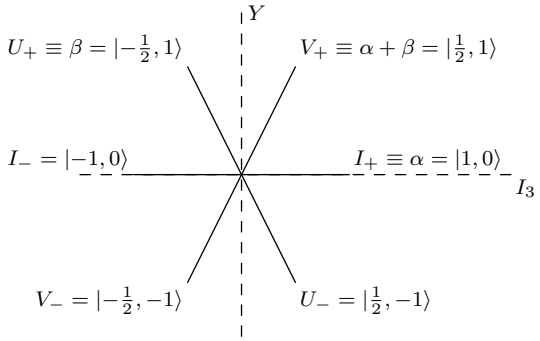
Cartanova podalgebra je $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{span}\{I_3, Y\}$, se skalárním součinem na $\mathfrak{h}$ daným

$$K(I_3, Y) = 0 \qquad K(I_3, I_3) = c\frac{1}{2} \qquad K(Y, Y) = c\frac{2}{3}, \tag{14.4}$$

kde c je nějaká pro další úvahy nepodstatná nenulová konstanta. Tj. bazické vektory I_3 a Y jsou ortogonální, ale nejsou normalizované na stejnou délku. Proto v kořenových a váhových diagramech vynášíme hodnoty odpovídajících funkcionálů na kolmé osy, ale v různých měřítkách, jejichž poměr $\frac{\sqrt{3}}{2}$ odpovídá poměru norem vektorů I_3 a Y vzhledem ke Killingově formě v (14.4). Kořenové a váhové vektory značíme hodnotami vlastních čísel operátorů I_3 a Y v odpovídající reprezentaci

$$|\lambda, \mu\rangle : \qquad I_3|\lambda,\mu\rangle = \lambda|\lambda,\mu\rangle, \qquad Y|\lambda,\mu\rangle = \mu|\lambda,\mu\rangle.$$

Kořenový diagram s uvedením kořenových vektorů na místě jim odpovídajících kořenů má následující tvar

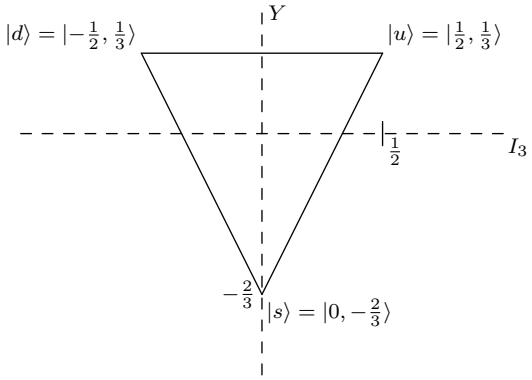


odpovídající komutačním relacím v (14.3) a jimi určeným vlastním hodnotám operátorů ad_{I_3}, ad_Y. Adjungovanou reprezentaci algebry $\mathfrak{su}(3)$ vzhledem k její dimenzi obvykle značíme **8**.

Definující vektorová reprezentace $\mathfrak{su}(3)$ na $\mathbb{C}^3$, obvykle značená **3**, je současně fundamentální reprezentace algebry $\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(3)$. V Gell-Mannově kvarkovém modelu se v ní transformují částice zvané kvarky

$$|u\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle, \qquad |d\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \qquad |s\rangle = |0, -\frac{2}{3}\rangle$$

mající baryonové číslo $B = \frac{1}{3}$. Její váhový diagram je

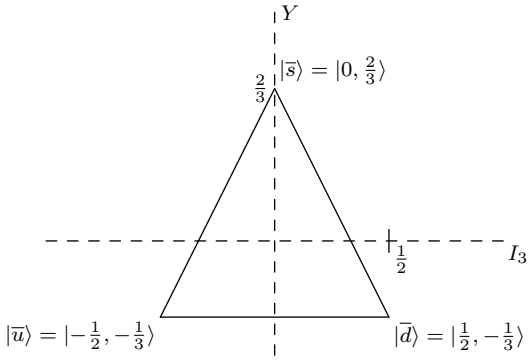


jak plyne z hodnot vlastních čísel odpovídajících společným vlastním vektorům matic I_3 a Y v (14.2).

Druhá fundamentální (též zvaná antifundamentální) reprezentace $\bar{\mathbf{3}}$ algebry $\mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}}$ je reprezentace **sdružená** k vektorové reprezentaci **3** ve smyslu

$$\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V^*) \qquad \left(\overline{\rho(X)}\phi\right)(v) = -\phi\left(\rho(X)v\right), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, v \in V, \phi \in V^*.$$

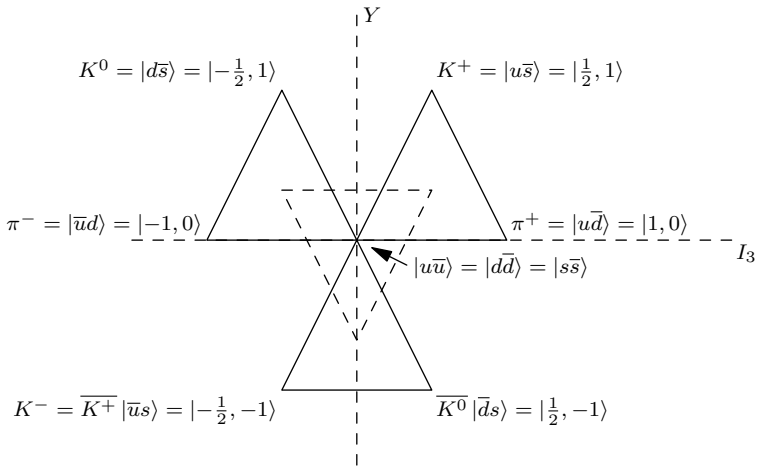
(Opačné znaménko v definici je třeba proto, abychom získali opět reprezentaci algebry $\mathfrak{g}$.) Váhový diagram $\bar{\mathbf{3}}$ je dán opačnými hodnotami vlastních čísel, tj. je z diagramu pro **3** získán inverzí vzhledem k počátku souřadných os,



V této reprezentaci se transformují částice zvané **antikvarky**, značené $|\bar{u}\rangle$, $|\bar{d}\rangle$, $|\bar{s}\rangle$, mající baryonové číslo $B = -\frac{1}{3}$.

V přírodě pozorované částice mají celočíselný elektrický náboj. Proto experimentálně detekované částice hledáme v reprezentacích, jimž odpovídá celočíselný náboj dle Gell-Mann-Nishijimova vzorce (14.1).

Vázané stavy kvark–antikvark jsou popsány reprezentací $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$, jejíž rozklad na ireducibilní reprezentace je $\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$:

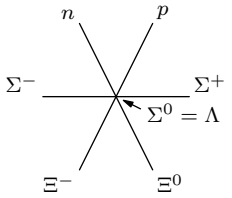


kde

$$\pi^0 = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle}{\sqrt{6}}, \quad 1 = \mathrm{span}\left\{\eta' = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}}\right\}.$$

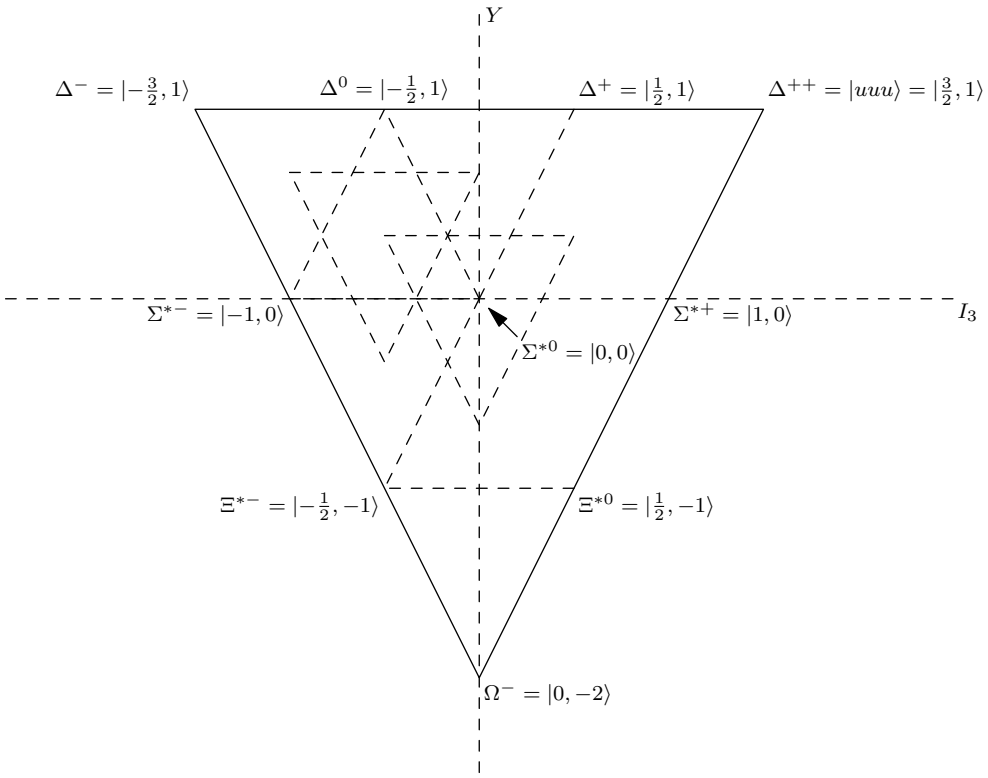
Tyto částice mají baryonové číslo $B = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. To, že $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$ v sobě musí obsahovat $\mathbf{8}$ plyne z nejvyšší váhy tenzorového součinu $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$, singletová reprezentace $\mathbf{1}$ tam pak musí být z rozměrových důvodů.

Reprezentace vedoucí na vázané stavy trojice kvarků je $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$, s hodnotou baryonového čísla $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Její ireducibilní složky zjistíme následovně: nejvyšší váha odpovídá totálně symetrizovanému tenzorovému součinu $\mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3}$, z počtu kombinací s opakováním zjišťujeme její dimenzi $\binom{5}{3} = 10$, jednorozměrné váhové podprostory pak dokládají její ireducibilitu (nic nelze vynechat, aniž bychom narušili známé vlastnosti váhových diagramů dle věty 13.5). Tj. máme reprezentaci $\mathbf{10}$. Dále v rozkladu musí být totálně antisymetrizovaný tenzorový součin $\mathbf{3} \wedge \mathbf{3} \wedge \mathbf{3} = \mathbf{1}$. Ze skládání vah, viz obrázek 14.1, pak vidíme, že doplňkový podprostor v $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ má stejné váhy jako adjungovaná reprezentace a že každý váhový podprostor má dvojnásobnou dimenzi oproti odpovídajícímu podprostoru v $\mathbf{8}$. Tudíž máme v rozkladu ještě dvě kopie adjungované reprezentace, tj. $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$. Jedna z $\mathbf{8}$ obsahuje proton a neutron,



ostatní obsahují exotičtější částice. Pro úspěch kvarkového modelu je podstatná zejména reprezentace $\mathbf{10}$, viz obrázek 14.1. V době, kdy Gell-Mann a Zweig vytvořili tuto teorii, byly známé všechny částice s odpovídajícími hodnotami nábojů, s výjimkou částice označené v diagramu jako Ω^-. Její předpověď na základě kvarkového modelu byla záhy experimentálně potvrzena.

Dnes je tato teorie, zvaná $\mathfrak{su}(3)$ teorie vůní, již zastaralá, protože kvarků, resp. z nich složených částic, je známo víc. Současný, tzv. standardní model elementárních částic, je uspořádán jinak. Gell-Mannův kvarkový model zůstává použitelným přiblížením při experimentech s dostatečně nízkou energií, vylučující vznik dalších, jím nepopsaných, kvarků.



Obrázek 14.1: Konstrukce vah reprezentace $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ a v ní obsažené ireducibilní reprezentace $\mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} = \mathbf{10}$

Rejstřík

akce, 23
    adjungovaná, 35
    efektivní, 23
    lineární, 27
    tranzitivní, 23
    volná, 23
automorfismus, 37

Cartanova celá čísla, 63
Cartanova matice, 66
centrum, 34
Cliffordova algebra, 96
coset, 23

deformační retrakt, 15
derivace, 35
    vnější, 37
    vnitřní, 37
diferenciální forma
    biinvariantní, 83
    levoinvariantní, 82
direktní součet, 34
distribuce
    k–rozměrná, 21
    integrabilní, 21
    maximální list, 22
Dynkinův diagram, 67

endomorfismus, 37
exponenciální zobrazení, 13
    matic, 13

faktoralgebra, 33
foliace, 22
forma
    invariantní, 41
    invariantní vzhledem k automorfismům, 41

graf
    přípustný, 69
grupa izotropie, 23

homogenní prostor, 24
homomorfismus, 37
    Lieových grup, 12

ideál, 33
integrální podvarieta, 21
invariantní podprostor, 28
isospin, 100
izomorfismus, 37
    Lieových grup, 12

jednoduchá souvislost, 15

Killingova forma, 41
kořenový diagram, 64
kořenový podprostor, 56
kořenový vektor, 56
kořeny, 56
    kladné, 64
    prosté, 65
    záporné, 64
komplexifikace, 37
kompoziční řada, 46

Lieova algebra, 8
    řešitelná, 34
    abelovská, 33
    Lieovy grupy, 8
    nerozložitelná, 34
    nilpotentní, 34
    poloprostá, 33
    prostá, 33
    rozložitelná, 34
    speciální lineární, 73
    speciální ortogonální, 75
    symplektická, 74
Lieova grupa, 6
    afinních transformací, 9
    komplexní, 6
    maticové, 6
    ortogonální, 10
    pseudoortogonální, 10

pseudounitární, 10
speciální ortogonální, 10
speciální pseudoortogonální, 10
speciální pseudounitární, 10
speciální unitární, 10
symplektická, 10
unitární, 10
lokálně n–parametrická topologická grupa, 6

násobnost váhy, 88
nakrytí, 29
nilradikál, 35
nulita, 54

operátor
diagonalizovatelný, 43
nilpotentní, 43
poloprostý, 43
orbita, 23
ortogonální doplněk, 42

podalgebra, 33
podgrupa
jednoparametrická, 12
podivnost, 100

radikál, 35
Killingovy formy, 51
reálná forma, 37
kompaktní, 82
regulární vektor, 54
reprezentace, 27
úplně reducibilní, 28
adjungovaná, 36
fundamentální, 90
ireducibilní, 28
Lieovy algebry, 27
Lieovy grupy, 27
reducibilní, 28
sdružená, 102
spinorová, 96
unitární, 28
víceznačná, 31
věrná, 28
vektorová, 96

série
derivovaná, 34
dolní centrální, 34
horní centrální, 34
Schurovo lemma, 28
strukturní konstanty, 8

tenzorový součin, 93
antisymetrický, 94
symetrický, 94

váha, 86
dominantní, 88
fundamentální, 90
nejvyšší, 88
váhová mřížka, 87
váhový diagram, 87
váhový podprostor, 87
věta
1. Cartanovo kritérium, 51
2. Cartanovo kritérium, 51
Ado, 30
Cartanova o klasifikaci prostých algeber, 71
Chevalley, 22
Frobeniova, 22
Leviho, 35
Lieova, 48
o Jordanově rozkladu, 44
Weylova, 84
Weylova o kompaktních Lieových grupách, 82
Weylova-Chevalley normální forma, 63
varieta
jednoduše souvislá, 29
vektor
ad–nilpotentní, 45
vektorová pole
levoinvariantní, 7
pravoinvariantní, 7
vlastní podprostory
zobecněné, 54

Weylova grupa, 64

zobrazení
antilineární, 79
involutivní, 79

Literatura

[1] A. Arvanitoyeorgos: *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, American Mathematical Society 2003.

[2] A. Borel: *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, American Mathematical Society 2001.

[3] K. Erdmann, M. J. Wildon: *Introduction to Lie Algebras*, Springer Verlag 2006.

[4] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, IRIS 2007.

[5] Th. Frankel: *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press 1999, 2003, 2011.

[6] N. Jacobson: *Lie Algebras*, Dover Publications 1979.

[7] A. W. Knapp: *Lie Groups: Beyond an Introduction*, Birkhäuser 2002.

[8] Y. Kosmann-Schwarzbach: *Groups and symmetries*, Springer 2010.

[9] R. Penrose: *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Knopf 2005.

[10] H. Samelson: *Notes on Lie algebras*, Springer Verlag 1990.

[11] D.H. Sattinger, O.L. Weaver: *Lie Groups and Algebras*, Springer Verlag 1986.

[12] L. Šnobl and P. Winternitz: *Classification and Identification of Lie Algebras*, American Mathematical Society and Centre de Recherches Mathématiques 2014.

[13] K. Tapp: *Matrix Groups for Undergraduates*, 2nd Edition, American Mathematical Society 2016.

GEOMETRICKÉ METODY FYZIKY 2

Heinrich der Vogler

14. května 2021

Předmluva

Vážení studenti a jiní čtenáři. Do rukou se vám dostaly poznámky z předmětu Geometrické Metody Fyziky 2 v podobě vyučované počínaje letním semestrem akademického roku 2016/2017. Nejedná se o oficiální skripta k předmětu. V textu se s pravděpodobností hraničící s jistotou nalézá velké množství chyb a překlepů. Autor tohoto textu bude vděčný za každého pozorného čtenáře, neváhejte se ozvat. Šíření tohoto textu provádějte s rozmyslem, jedná se pouze o učební pomůcku, nikoliv o oficiální publikaci vyhovující běžným akademickým standardům.

Přednáška je z velké části inspirovaná přístupem ve skvělé knize Mariána Fecka [1], kapitoly 13, 16, 19-21. V důkazech se občas používají podrobnější vlastnosti hladkých zobrazení (pod)variet. Velmi pěkná (včetně moderního značení) kniha na toto téma je [3]. V poslední kapitole jsme použili konstrukci asociativního fibrovaného prostoru, která se v téměř identické podobě nachází v třetí kapitole knihy [4]. Alternativním zdrojem pro nauku o hlavních fibrovaných prostorech je [5]. Standardním textem (pro mírně pokročilé čtenáře) je i klasická kniha [2]. Do jejího čtení se pouštějte jen s dostatkem volného času a odvahy.

Příjemné čtení vám přeje Heinrich der Vogler, vévoda saský a král východofranský.

Obsah

Předmluva **1**

1 Lokální kalibrační invariance **4**

1.1 Maxwellovy rovnice 4

1.1.1 Hodgeova dualita 4

1.1.2 Vektorová analýza v E^3 6

1.1.3 Modifikace pro $E^{1,3}$ 7

1.1.4 Maxwellovy rovnice pomocí forem 9

1.2 Elektřina, magnetismus a akce 10

1.3 Komplexní skalární pole 11

1.4 Minimální interakce 13

2 Hlavní fibrovaný prostor **14**

2.1 Akce Lieových grup 14

2.2 Fibrované prostory 18

2.3 Principální fibrace 20

2.4 Fundamentální vektorová pole, vertikální podprostor 25

3 Forma konexe **31**

3.1 Formy s hodnotami ve vektorovém prostoru 31

3.2 Formy afinní konexe 32

3.3 Forma konexe na hlavním fibrovaném prostoru 35

4 Horizontální distribuce a zdvih **38**

4.1 Hladké distribuce a jejich integrabilita 38

4.2 Horizontální distribuce 40

4.3 Horizontální zdvih, paralelní přenos 42

4.4 Veličiny typu ρ a jejich paralelní přenos 45

5 Vnější kovariantní derivace, forma křivosti **47**
5.1 Horizontální část forem 47
5.2 Vnější kovariantní derivace 48
5.3 Forma křivosti 49
5.4 Kovariantní derivace forem typu ρ 54
5.5 Integrabilita paralelního přenosu, holonomie 57

6 Kalibrační teorie **63**
6.1 Lokální formy, kalibrační transformace 63
6.2 Kalibračně invariantní účinek 69
6.3 Pohybové rovnice kalibrační teorie 73

7 Přidružený vektorový fibrovaný prostor **76**
7.1 Redukce ekvivariantních vektorových bandlů 76
7.2 Asociovaná fibrace 81
7.3 Paralelní přenos, kovariantní derivace 82
7.4 Kalibrační teorie podruhé 86

8 Spinová teorie **90**
8.1 Cliffordovy algebry a spinová grupa 90
8.2 Prolongace hlavních fibrovaných prostorů 96
8.3 Spinový bandl 98
8.4 Spinorové reprezentace, spinorová pole 101
8.5 Diracův operátor, Diracovo pole 103

Kapitola 1

Lokální kalibrační invariance

1.1 Maxwellovy rovnice

Standardní diferenciální tvar Maxwellových rovnic je následující. Nechť $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ jsou vektory intenzity elektrického pole a magnetické indukce. Maxwellovy rovnice jsou:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \text{(homogenní rovnice)} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}. \qquad \text{(nehomogenní rovnice)} \tag{1.2}$$

Používáme soustavu kde $c = 1$, abychom si ušetřili práci. Primárním cílem této části je ukázat, že $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ mohou být zakódovány do 2-formy $F \in \Omega^2(E^{1,3})$ na varietě Minkowského prostoru $E^{1,3} \equiv (\mathbb{R}^4, g)$, kde g je Minkowského metrika. F se nazývá **tenzor elektromagnetického pole**. Maxwellovy rovnice získají extrémně jednoduchý tvar:

$$dF = 0 \text{ (homogenní rovnice)}\ , \quad \delta F = -j \text{ (nehomogenní rovnice)}\ , \tag{1.3}$$

kde $j \in \Omega^1(E^{1,3})$ je **1-forma proudu**. V následujícím si vysvětlíme význam všech přítomných písmenek. d je obyčejná vnější derivace $d : \Omega^2(E^{1,3}) \to \Omega^3(E^{1,3})$.

1.1.1 Hodgeova dualita

Nechť (M, g, o) je libovolná orientovaná varieta vybavená metrikou.

Připomeňme si, že na orientované varietě má každá lokální soustava souřadnic $(x^1, \ldots, x^n)$ orientaci $o(x^1, \ldots, x^n) = \pm 1$, přičemž Jakobián přechodové funkce mezi shodně orientovanými soustavami musí být vždy kladný.

Na (M, g, o) je vždy význačná všude nenulová n-forma, tzv. **metrická forma objemu** ω_g:

$$\omega_g = o(x^1, \ldots, x^n)\sqrt{|g|} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{1.4}$$

kde $|g| = |\det g_{ij}|$ a $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Orientovanost variety M zaručí, že definice ω_g nezáleží na volbě souřadnic. Existuje obvyklý trik jak pracovat s ω_g. Na okolí libovolného bodu $m \in M$ lze vždy pracovat v pravotočivém ortonormálním poli repérů:

Definice 1.1.1. Nechť U je okolí bodu $m \in M$. Potom $(e_1, \ldots, e_n)$ nazýváme **polem repérů** (angl. local frame), pokud $e_i \in \mathfrak{X}(U)$ a $(e_1|_p, \ldots, e_n|_p)$ tvoří bázi T_pM.

Řekneme, že $(e_1, \ldots, e_n)$ je **ortonormální** pokud $g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$, a **pravotočivý**, pokud $(e_1|_p, \ldots, e_n|_p)$ tvoří pravotočivou bázi T_pM. Tj. jsou-li $(x^1, \ldots, x^n)$ pravotočivé souřadnice na okolí p, a máme $e_i|_p = \mathbf{A}_i^j \cdot \partial_j|_p$, je $\det \mathbf{A} = +1$.

Duálním polem repérů $(e^1, \ldots, e^n)$ nazýváme 1-formy $e^i \in \Omega^1(U)$ splňující $e^i(e_j) = \delta^i_j$, tj. v každém bodě tvoří duální bázi k $(e_1|_p, \ldots, e_n|_p)$.

Tvrzení 1.1.2. *Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je pravotočivé ortonormální pole repérů. Potom*

$$\omega_g = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n. \tag{1.5}$$

Jinými slovy, komponentní funkce $(\omega_g)_{i_1\ldots i_n} = \epsilon_{i_1\ldots i_n}$, kde $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ je přímočaré zobecnění Levi-Civitova symbolu ($+1$ na sudé permutace $(1, \ldots, n)$, -1 na liché a 0 v jiných případech).

Příklad 1.1.3. V $E^{1,3}$ máme globální souřadnice. Vyhlásíme $o(t, x, y, z) = +1$, tím zavedeme orientaci. Je-li g Minkowského metrika, máme $\sqrt{|g|} = 1$ a forma objemu má tvar

$$\omega_g = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{1.6}$$

Definice 1.1.4. Nechť (M, g, o) je orientovaná varieta s metrikou. **Hodgeova dualita** je lineární zobrazení $*_{g,o} : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ definované jako

$$(*_{g,o}\alpha)_{i_1\ldots i_{n-p}} = \frac{1}{p!}\alpha^{k_1\ldots k_p}(\omega_g)_{k_1\ldots k_p i_1\ldots i_{n-p}}, \tag{1.7}$$

kde $\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{j_1\ldots j_p} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_p}$ je p-forma napsaná v bázi libovolného pole repérů, a $\alpha^{k_1\ldots k_k} = g^{k_1 j_1} \ldots g^{k_p j_p} \cdot \alpha_{j_1\ldots j_p}$ jsou komponenty zdvižené metrikou.

V následujícím budeme psát $* \equiv *_{g,o}$.

Tvrzení 1.1.5 (Vlastnosti Hodgeovy duality)**.**

1. *$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ je lineární isomorfismus vektorových prostorů, přičemž*

$$*^{-1} = sgn(g) * \hat{\eta}^{n+1}, \tag{1.8}$$

   kde $sgn(g) = sgn(\det g_{ij})$ a $\hat{\eta}(\alpha) = (-1)^p\alpha$ pro $\alpha \in \Omega^p(M)$ „měří stupeň formy“.

2. *Pracujeme-li v pravotočivém ortogonálním poli repérů, máme*

$$(*\alpha)_{i_1\ldots i_{n-p}} = \frac{1}{p!}\eta^{k_1 j_1} \ldots \eta^{k_p j_p} \cdot \alpha_{j_1\ldots j_p} \cdot \epsilon_{k_1\ldots k_p i_1\ldots i_{n-p}}. \tag{1.9}$$

3. *Ve speciálních případech $p = 0$ a $p = n$ dostáváme*

$$*(1) = \omega_g, \quad *(\omega_g) = sgn(g). \tag{1.10}$$

Cvičení 1.1.6. *Dokažte předchozí tvrzení.*

Vidíme, že metrická orientovaná varieta poskytuje kanonický isomorfismus prostoru svých diferenciálních forem. Obecně lze z dimenzionálních důvodů, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, nalézt pouze lokálně. Vnější derivace je lineární operátor na vnější algebře zvyšující stupeň formy. Hodgeova dualita umožní sestrojit operátor *snižující stupeň formy.*

Definice 1.1.7. Nechť (M, g, o) je orientovaná varieta s metrikou. **Kodiferenciál** $\delta : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ je lineární zobrazení definované jako

$$\delta = *^{-1} d * \hat{\eta}. \tag{1.11}$$

Kodiferenciál splňuje $\delta^2 = 0$. Pomocí kodiferenciálu můžeme definovat **Laplaceův - de Rhamův operátor** $\Delta = -(\delta d + d\delta)$.

1.1.2 Vektorová analýza v E^3

Místo obecných souřadnicových vyjádření prozkoumáme Hodgeovu dualitu, kodiferenciál a Laplaceův-de Rhamův operátor pro eukleidovský prostor $E^3 = (\mathbb{R}^3, g)$ se standardní metrikou a orientaci $o(x, y, z) = +1$.

Metrika nám umožňuje jednoduše ztotožnit vektorová pole a 1-formy. Máme tedy zobrazení

$$\sharp : \Omega^1(E^3) \to \mathfrak{X}(E^3) \text{ (zdvihání indexů)} , \quad \flat : \mathfrak{X}(E^3) \to \Omega^1(E^3) \text{ (snižování indexů)} . \tag{1.12}$$

V souřadnicích (x^1, x^2, x^3) máme $\sharp(\alpha_i dx^i) = g^{ij}\alpha_j \partial_i$ a $\flat(X^i \partial_i) = g_{ij} X^j dx^i$. Na druhou stranu jsme právě objevili, že Hodgeova dualita nám umožní ztotožnit (kanonicky) prostory $\Omega^1(E^3)$ a $\Omega^{3-1}(E^3) = \Omega^2(E^3)$. Podobně máme ztotožnění $C^\infty(E^3) \equiv \Omega^0(E^3)$ s prostorem $\Omega^3(E^3)$.

Pojďme si spočítat Hodgeovu dualitu explicitně. Upozornění: (x^1, x^2, x^3) nemusí být kartézské souřadnice! Můžou to být například sférické (lokální) souřadnice (r, ϑ, φ). Potom tedy $g_{ij} \neq \delta_{ij}$. Předpokládáme $o(x^1, x^2, x^3) = +1$. Zavedeme si následující (standardní) označení:

$$dV := \omega_g = \frac{1}{3!}\omega_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \text{ (element objemu)} \tag{1.13}$$

$$dS_i := \frac{1}{2}\omega_{ijk} dx^j \wedge dx^k. \text{ (element plochy)} \tag{1.14}$$

Víme, že explicitně $\omega_{ijk} = \sqrt{|g|}\epsilon_{ijk}$. Už jsme ukázali, že $*(1) = \omega_g \equiv dV$. Následně

$$(*(dx^i))_{jk} = \frac{1}{1!}(dx^i)^m \omega_{mjk} = g^{mn}(dx^i)_n \omega_{mjk} = g^{mn}\delta^i_n \omega_{mjk} = g^{im}\omega_{mjk}. \tag{1.15}$$

Celá 2-forma $*(dx^i)$ má tedy souřadnicové vyjádření

$$*\,(dx^i) = \frac{1}{2}(*(dx^i))_{jk} dx^j \wedge dx^k = g^{im}(\frac{1}{2}\omega_{mjk} dx^j \wedge dx^k) = g^{im} dS_m. \tag{1.16}$$

Mimo jiné vidíme, že (dS_1, dS_2, dS_3) tvoří v každém bodě bázi $\Omega^2(E^3)$. To nás přivede na následující značení:

1. Každou 1-formu můžeme psát jako $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv A_i dx^i = A^i g_{ij} dx^j$.
2. Každou 2-formu můžeme psát jako $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \equiv B^i dS_i$.
3. Každou 3-formu můžeme psát jako $h\, dV$, kde $h \in C^\infty(E^3)$.

Důvod pro značení je následující. Ukážeme si, že $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ skutečně tvoří vektorová pole na E^3. Důvodem je samozřejmě Hodgeova dualita:

Tvrzení 1.1.8. *S použitím výše zavedené notace má operátor Hodgeovy duality tvar*

$$*(f) = f\ dV, \qquad *(h\ dV) = h, \tag{1.17}$$

$$*(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \quad *(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} \tag{1.18}$$

Nechť $\mathbf{A} = A^i\partial_i$ *a* $\mathbf{B} = B^i\partial_i$. *Potom* $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \flat(\mathbf{A})$ *a* $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = *\flat(\mathbf{B})$.

Důkaz. Pro $(M, g, o) = E^3$ platí $*^{-1} = sgn(g) * \hat{\eta}^4 = *$. Stačí tedy spočítat první (levou) polovičku rovnic. První plyne z $*(1) = dV$ a druhá z již odvozeného:

$$*\,(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) = *(A^j g_{ji} dx^i) = A^j g_{ji} * (dx^i) = A^j g_{ji} g^{im} dS_m = A^j dS_j = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.19}$$

Zbývající tvrzení již triviálně plynou. ■

Tento formalismus nám nyní umožňuje velmi snadno zavést (stále v obecných pravotočivých souřadnicích v $\mathbb{R}^3$) všechny známé vektorové operace na E^3. *Definujeme je* pomocí následujícího komutativního diagramu:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(E^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(E^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(E^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(E^3) \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \sharp} & & \downarrow{\scriptstyle \sharp *} & & \downarrow{\scriptstyle *} \\ C^\infty(E^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(E^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X}(E^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(E^3) \end{array} \tag{1.20}$$

Explicitně tedy dostáváme následující výrazy:

$$\text{grad} = \sharp\, d, \quad \text{rot} = \sharp * d\, \flat, \quad \text{div} = *\, d\ * \flat = -\delta\cdot\flat. \tag{1.21}$$

V parametrizaci zavedené nahoře potom můžeme vnější derivaci přepsat pomocí vektorových operací. Dostáváme následující tvrzení:

$$df = \text{grad}\, f\cdot d\mathbf{r}, \quad d(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) = (\text{rot}\,\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}, \quad d(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = \text{div}\,\mathbf{B}\ dV, \quad d(h\ dV) = 0. \tag{1.22}$$

Cvičení 1.1.9. *Ukažte, že v kartézských souřadnicích dostáváme standardní operace. Nalezněte* grad, rot *a* div *ve sférických souřadnicích.*

Cvičení 1.1.10. *Co plyne z identity* $d^2 = 0$*?*

Protože platí $\delta = *d * \hat{\eta}$, dá se pohotově odvodit i podobný diagram kde vystupuje kodiferenciál. Dostaneme vyjádření δ pomocí vektorových operací:

$$\delta f = 0, \quad \delta(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) = -\,\text{div}\,\mathbf{A}, \quad \delta(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = (\text{rot}\,\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}, \quad \delta(h\ dV) = -(\text{grad}\, h)\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.23}$$

1.1.3 Modifikace pro $E^{1,3}$

Nyní bychom chtěli odvodit obdobné výrazy pro Minkowského prostor $E^{1,3} = (\mathbb{R}^4, g)$. Místo libovolných souřadnic nyní budeme pracovat ve standardních kartézských souřadnicích $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, přičemž $o(t, x, y, z) = +1$. Naším cílem je vyjádřit diferenciál a kodiferenciál libovolné 2-formy. Užitečným nástrojem je následující jednoduché lemma:

Lemma 1.1.11. *Nechť $\alpha \in \Omega^p(E^{1,3})$. Potom existují jednoznačné formy $\hat{r} \in \Omega^p(E^{1,3})$ a $\hat{s} \in \Omega^{p-1}(E^{1,3})$, tak že $i_{\partial_t}(\hat{r}) = i_{\partial_t}(\hat{s}) = 0$ a*

$$\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}. \tag{1.24}$$

Jinými slovy, rozklady forem $\hat{r}$ a $\hat{s}$ do souřadnicové báze neobsahují 1-formu dt.

Důkaz. Nechť $\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Protože je produkt bazických 1-forem totálně antisymetrický, buď obsahuje dt právě jednou nebo vůbec. Máme tedy

$$\alpha = dt \wedge \{\frac{1}{(p-1)!}\alpha_{0j_1\dots j_{p-1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}}\} + \frac{1}{p!}\alpha_{j_1\dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, \tag{1.25}$$

kde všechny sčítací indexy probíhají jen množinu $\{1,2,3\}$. ∎

Všimněme si, že formálně tedy vypadají $\hat{r}$ a $\hat{s}$ jako formy na podprostoru E^3. Jejich komponenty ale můžou záviset i na zbývající souřadnici t. Řekneme, že forma α je **prostorová**, pokud $\hat{s} = 0$. Můžeme tedy používat podobnou parametrizaci jako na E^3:

$$\text{0-formy: } \alpha = f \qquad (\hat{s}, \hat{r}) = (0, f), \tag{1.26}$$
$$\text{1-formy: } \alpha = f dt + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \qquad (\hat{s}, \hat{r}) = (f, \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}), \tag{1.27}$$
$$\text{2-formy: } \alpha = dt \wedge (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) + \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\hat{s}, \hat{r}) = (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}, \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}), \tag{1.28}$$
$$\text{3-formy: } \alpha = dt \wedge (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}) + h\, dV \qquad (\hat{s}, \hat{r}) = (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}, h\, dV), \tag{1.29}$$
$$\text{4-formy: } \alpha = dt \wedge (h\, dV) \qquad (\hat{s}, \hat{r}) = (h\, dV, 0). \tag{1.30}$$

Důrazné upozornění: $f = f(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r})$ atd. Vyzbrojeni tímto rozkladem, je jasné, kam směřuje následující počítání. Jelikož umíme vnější derivaci na formy na E^3, chtěli bychom nějak chytře rozložit i vnější derivaci na $\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}$. Jelikož chceme i formulku pro kodiferenciál, odvodíme i pravidlo pro Hodgeovu dualitu.

Použijeme následující značení: $\hat{d}$ a $\hat{*}$ jsou vnější diferenciál a Hodgeova dualita působící formách v E^3 odpovídající Eukleidovské metrice a orientaci $o(x, y, z) = +1$ tamtéž. Můžeme jimi působit i na *prostorové formy* v $E^{1,3}$, v kterých vystupuje t jen jako „parametr“. Zavedeme symbol $\partial_t(\alpha) \equiv \mathcal{L}_{\partial_t}(\alpha)$. Pro prostorové formy jde opravdu jen o parciální derivaci komponent podle času t.

Tvrzení 1.1.12. *Nechť $\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}$. Potom platí následující pravidla:*

$$d\alpha = dt \wedge (\partial_t \hat{r} - \hat{d}\hat{s}) + \hat{d}\hat{r}, \tag{1.31}$$
$$*\alpha = dt \wedge \hat{*}\hat{r} + \hat{*}\hat{\eta}\hat{s}, \tag{1.32}$$
$$\delta\alpha = dt \wedge \hat{\delta}\hat{s} + (-\partial_t \hat{s} - \hat{\delta}\hat{r}) \tag{1.33}$$

Cvičení 1.1.13. *Dokažte tvrzení.*

Nyní už můžeme velice snadno zkombinovat všechna tvrzení a odhalit následující formulky pro vnější derivaci a kodiferenciál v $E^{1,3}$. Dostáváme:

$$df = (\partial_t f) dt + (\operatorname{grad} f) \cdot d\mathbf{r}, \tag{1.34}$$
$$d(f dt + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) = dt \wedge (\partial_t \mathbf{a} - \operatorname{grad} f) \cdot d\mathbf{r} + (\operatorname{rot} \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}, \tag{1.35}$$
$$d\{dt \wedge (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) + \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}\} = dt \wedge (\partial_t \mathbf{b} - \operatorname{rot} \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} + (\operatorname{div} \mathbf{b})\, dV, \tag{1.36}$$
$$d\{dt \wedge (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}) + h\, dV)\} = dt \wedge (\partial_t h - \operatorname{div} \mathbf{b})\, dV. \tag{1.37}$$

Výsledky pro kodiferenciál jsou podobné:

$$\delta(f dt + \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}) = -\partial_t f + \operatorname{div}\mathbf{a}, \tag{1.38}$$

$$\delta(dt\wedge(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}) + \mathbf{b}\cdot d\mathbf{S}) = -(\operatorname{div}\mathbf{a})dt - (\partial_t\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b})\cdot d\mathbf{r}, \tag{1.39}$$

$$\delta(dt\wedge(\mathbf{b}\cdot d\mathbf{S}) + h\, dV) = dt\wedge(\operatorname{rot}\mathbf{b})\cdot d\mathbf{r} + (-\partial_t\mathbf{b} + \operatorname{grad}h)\cdot d\mathbf{S}, \tag{1.40}$$

$$\delta(dt\wedge(h\, dV)) = dt\wedge(-\operatorname{grad}h\cdot d\mathbf{S}) - (\partial_t h)\, dV. \tag{1.41}$$

Cvičení 1.1.14. *Pomocí vzorečků pro diferenciál d a kodiferenciál δ odvoďte vzorečky pro Laplace-de Rhamův operátor $\Delta = -(d\delta + \delta d)$. Zejména ukažte že na 0-formách dostáváme*

$$\Delta(f) = \partial_t^2(f) - \operatorname{div}\operatorname{grad}f, \tag{1.42}$$

a tedy na funkcích $\Delta = \Box$.

1.1.4 Maxwellovy rovnice pomocí forem

Definujme 1-formu proudu jako $j = \rho\, dt - \mathbf{j}\cdot d\mathbf{r}$. Z výrazu (1.28) vidím, že nejobecnější 2-forma na $E^{1,3}$ je jednoznačně parametrizována dvojicí *časově závislých* vektorových polí na E^3. Uvažujme tedy obecnou 2-formu $F \in \Omega^2(E^{1,3})$ kterou parametrizujeme jako

$$F = dt\wedge(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}) - \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.43}$$

Protože F je kovariantní antisymetrický tenzor 2. řádu, lze jej psát jako matici 4×4 odpovídající komponentní matici $F_{\mu\nu}$. Lze snadno spočítat, že je to přesně známý EM tenzor.

Cvičení 1.1.15. *Ukažte, že tomu tak opravdu je.*

S výše vyrobenými nástroji lze snadno spočítat dF a δF. Dostáváme

$$dF = dt\wedge(-\partial_t\mathbf{B} - \operatorname{rot}\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} - (\operatorname{div}\mathbf{B})dV, \tag{1.44}$$

$$\delta F = -(\operatorname{div}\mathbf{E})dt - (\partial_t\mathbf{E} - \operatorname{rot}\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}. \tag{1.45}$$

Protože obě formy $\hat{r}$ and $\hat{s}$ jednoznačně určují formu v $E^{1,3}$, jejich porovnáním dostáváme ekvivalenci rovnic $dF = 0$ a $\delta F = -j$ s oběma sadami Maxwellových rovnic.

Věta 1.1.16. *Maxwellovy rovnice jsou ekvivalentní soustavě rovnice $dF = 0$ a $\delta F = -j$.*

Rovnice $\delta F = -j$ bývá často zapisována jako $d(*F) = -*j$, kterou dostaneme zapůsobením bijekce $*$ na obě strany rovnice. **Duální elektromagnetický tenzor** $*F \in \Omega^2(M)$ je (ve 4 dimenzích) opět antisymetrický tenzor, jehož explicitní podoba je

$$*F = *(dt\wedge\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = dt\wedge(-\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}) - \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.46}$$

Dostane se tedy z F záměnou $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ za $(-\mathbf{B},\mathbf{E})$. 3-forma $J = *j$ má tvar $J = \rho\, dV - dt\wedge\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$.

Tento elegantní popis umožní velmi rychle a logicky odvodit základní tvrzení v kovariantní teorii elektromagnetického pole. Například, forma F je uzavřená v $\mathbb{R}^4$. Pokud nepředpokládáme žádná další topologická omezení na $\mathbb{R}^4$, automaticky existuje $A \in \Omega^1(M)$, taková, že $dA = F$. Opět si můžeme A parametrizovat prostorovou 0 a 1-formou jako

$$A = \varphi\, dt - \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}. \tag{1.47}$$

Potom $dA = dt \wedge (-\partial_t \mathbf{A} - grad(\varphi)) \cdot d\mathbf{r} - (\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$. Porovnáním s definicí F dostaneme

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \mathrm{grad}\,\varphi, \quad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{1.48}$$

Uzavřenost 2-formy F a Poincarého lemma tedy společně implikují existenci elektromagnetického 4-potenciálu. Forma A není určená jednoznačně, můžu k ní zjevně přičíst libovolnou uzavřenou 1-formu. Ta je však vždy (Poincarého lemma) alespoň lokálně exaktní. Stačí tedy uvažovat $A' = A + d\chi$ pro $\chi \in C^\infty(E^{1,3})$. Z výrazů pro d nahoře snadno spočtu, že

$$A' = (\varphi + \partial_t \chi)\, dt - (\mathbf{A} - \mathrm{grad}\,\chi) \cdot d\mathbf{r}. \tag{1.49}$$

Vidím tedy, že dostávám přesně standardní kalibrační transformace v elektřině a magnetismu.

1.2 Elektřina, magnetismus a akce

Další užitečná aplikace Hodgeovy duality číhá při snaze zapsat Maxwellovy rovnice pomocí variace akčního funkcionálu. Výsledek (a výpočet) jsou s užitím správných geometrických nástrojů otázkou chvilky.

Nechť (M, g, o) je obecná orientovaná varieta s metrikou. Pro libovolné $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ máme $\alpha \wedge *\beta \in \Omega^n(M)$. Jako každá n-forma, je i tato násobkem formy objemu ω_g. Můžeme tedy definovat funkci $(\alpha, \beta)_g \in C^\infty(M)$ vztahem

$$\alpha \wedge *\beta =: (\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g. \tag{1.50}$$

Na první pohled není vidět, že je $(\alpha, \beta)_g$ je symetrická v (α, β). S troškou kombinatoriky ale

$$(\alpha, \beta)_g = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \beta^{i_1 \dots i_p}. \tag{1.51}$$

Je-li $(\alpha, \beta)_g = 0$ pro všechny $\beta \in \Omega^p(M)$, je nutně $\alpha = 0$. Důležité je, že d a δ tvoří „téměř" samosdružené operátory:

Tvrzení 1.2.1. *Pro libovolnou (M, g, o) a dvojici forem $\alpha \in \Omega^p(M)$ a $\beta \in \Omega^{p+1}(M)$ platí identita*

$$\{(d\alpha, \beta)_g - (\alpha, \delta\beta)_g\} \cdot \omega_g = d(\alpha \wedge *\beta) \tag{1.52}$$

S použitím Stokesovy věty pak dostáváme integrální identitu

$$\int_M (d\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g = \int_M (\alpha, \delta\beta)_g \cdot \omega_g + \int_{\partial M} \alpha \wedge *\beta. \tag{1.53}$$

Předpokládá se, že integrály mají smysl. Pokud je $\partial M = 0$ a nebo je libovolná z forem α nebo β na hranici rovna nule, dostáváme

$$\int_M (d\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g = \int_M (\alpha, \delta\beta)_g \cdot \omega_g. \tag{1.54}$$

Důkaz. Pustíme d na $\alpha \wedge *\beta$ a budeme používat definice:

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge *\beta)) &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^p \alpha \wedge d * \beta = (d\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g - \alpha \wedge (d * \hat{\eta})(\beta) \\ &= (d\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g - \alpha \wedge (*^{-1} d * \hat{\eta})(\beta) \\ &= \{(d\alpha, \beta) g - (\alpha, \delta\beta)_g\} \cdot \omega_g. \end{aligned}$$

Zbytek tvrzení je jednoduchou aplikací Stokesovy věty. ∎

Pokud má integrování smysl, definuje se skalární součin (opravdický) jako integrál

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \int_M (\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g. \tag{1.55}$$

Nyní už snadno můžeme vyslovit a dokázat následující tvrzení.

Věta 1.2.2. *Nechť $A \in \Omega^1(M)$ a $j \in \Omega^1(M)$ jsou libovolné 1-formy. Potom funkcionál*

$$S[A] = -\frac{1}{2}\langle dA, dA \rangle_g - \langle A, j \rangle_g \tag{1.56}$$

je extremální pro $F = dA$ splňující nehomogenní Maxwellovy rovnice. Funkcionál je kalibračně invariantní pokud j splňuje rovnici kontinuity $\delta j = 0$.

Důkaz. Nechť $A' = A + \epsilon\alpha$ pro $\alpha \in \Omega^1(M)$ s vlastností $\alpha|_{\partial M} = 0$ (podmínka pevných konců). Funkcionál je extremální pro A pokud $S[A'] = S[A] + o(\epsilon^2)$. Dostaneme

$$S[A'] = -\frac{1}{2}\langle dA', dA' \rangle_g - \langle A', j \rangle_g = S[A] - \epsilon\{\langle dA, d\alpha \rangle_g + \langle \alpha, j \rangle_g\} + o(\epsilon^2) \tag{1.57}$$

Dostáváme tedy podmínku $\langle dA, d\alpha \rangle_g + \langle \alpha, j \rangle_g = 0$ pro všechny α nulové na hranici. S použitím předchozího tvrzení tedy $\langle \alpha, \delta F + j \rangle_g = 0$. Z nedegenerovanosti plyne $\delta F = -j$.

Funkcionál je kalibračně invariantní pokud $\langle A + d\chi, j \rangle_g = \langle A, j \rangle_{\mathfrak{g}}$ pro všechny $\chi \in C^\infty(M)$, a tedy $\langle d\chi, j \rangle_g = 0$. Za rozumných předpokladů (například kalibrační transformace nulové na hranici ∂M) můžeme použít předchozí tvrzení a dostáváme $\langle d\chi, j \rangle_g = \langle \chi, \delta j \rangle = 0$. ■

1.3 Komplexní skalární pole

Uvažujme nyní (opět libovolnou) varietu (M, g, o) a uvažujme teorii komplexního skalárního pole. Geometricky máme tedy $\phi \in \Omega^0(M) \otimes \mathbb{C}$, což můžeme interpretovat jako hladkou komplexní funkci reálné proměnné $x \in M$. $\phi(x) \in \mathbb{C}$.

Obecně, uvažujme $\alpha \in \Omega^p(M) \otimes \mathbb{C}$. Můžeme psát $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$, kde $\alpha_i \in \Omega^p(M)$ jsou obyčejné p-formy na M. Definujeme skalární (komplexní) skalární součin $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ jako kombinaci standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}$ a součinu $(\cdot, \cdot)_g$ na diferenciálních formách:

$$\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle = \int_M (\bar{\alpha}, \beta)_g \cdot \omega_g, \tag{1.58}$$

kde $\bar{\alpha} = \alpha_0 - i\alpha_1$ označuje komplexní sdružení. Součin není symetrický, ale symetrický s komplexním sdružením, tj. $\langle\langle \beta, \alpha \rangle\rangle = \overline{\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle}$. Pro dvě stejné formy je reálný a

$$\langle\langle \alpha, \alpha \rangle\rangle = \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_g + \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle_g \in \mathbb{R}. \tag{1.59}$$

Všechny operace z předchozích sekcí se (po složkách) dají rozšířit na $\Omega^p(M) \otimes \mathbb{C}$. Nechť $m \geq 0$ je reálné nezáporné číslo. Funkcionál komplexního skalárního pole má tvar

$$S_0[\phi] = \langle\langle d\phi, d\phi \rangle\rangle - m^2 \langle\langle \phi, \phi \rangle\rangle. \tag{1.60}$$

V obvyklém značení na $E^{1,3}$ máme $d\phi = \partial_\mu \phi \cdot dx^\mu$ a funkcionál má obvyklý tvar

$$S_0[\phi] = \int_M \{\partial^\mu \bar{\phi} \cdot \partial_\mu \phi - m^2 \bar{\phi} \cdot \phi\} dx^4 \tag{1.61}$$

V tomto případě musí být člověk trošku opatrnější, protože skalární součin dvou různých forem není obecně reálné číslo, místo toho dostaneme podmínku

$$\langle\langle \Delta\phi + m^2\phi, \beta \rangle\rangle + \overline{\langle\langle \Delta\phi + m^2\phi, \beta \rangle\rangle} = 0. \tag{1.62}$$

Volbou reálného nebo ryze imaginárního β dostaneme podmínky

$$\Re(\Delta\phi + m^2\phi) = 0, \;\; \Im(\Delta\phi + m^2\phi) = 0, \tag{1.63}$$

a tedy jednu komplexní rovnici $\Delta\phi + m^2\phi = 0$. Tento drobný problém s variací reálných funkcionálů poskládaných z komplexních čísel se často řeší považováním ϕ a $\bar{\phi}$ za nezávislé proměnné a následnou (nezávislou) variací podle obou. V (1.42) jsme ukázali, že na funkce je v $M = \mathbb{R}^{1,3}$ působí Δ jako D'Alembertův operátor $\Box$. Výsledná rovnice je tedy komplexní **Klein-Gordonova** rovnice.

Funkcionál S_0 i pohybové rovnice jsou evidentně invariantní vůči transformacím ve tvaru $\phi'(x) = e^{-i\alpha}\phi(x)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Takové transformaci se říká **globální kalibrační transformace**. Uvažujme třídu transformací ve tvaru $\phi'_\epsilon(x) = e^{-i\epsilon\alpha(x)}\phi(x)$, kde $\alpha \in C^\infty(M)$ jsou funkce které jsou nulové na hranici, tedy $\alpha|_{\partial M} = 0$. Vůči takové transformaci S_0 *není invariantní*. Říká se jí **lokální kalibrační transformace**.

Tuto neinvarianci můžeme s výhodou využít pro odhalení zachovávajících se veličin teorie komplexního skalárního pole. Dosazením ϕ'_ϵ dostáváme

$$\begin{aligned} S_0[\phi'_\epsilon] &= \langle\langle d(e^{-i\epsilon\alpha}\phi), d(e^{-i\epsilon\alpha}\phi) \rangle\rangle - m^2 \langle\langle e^{-i\epsilon\alpha}\phi, e^{-i\epsilon\alpha}\phi \rangle\rangle \\ &= \langle\langle e^{-i\epsilon\alpha} d\phi, e^{-i\epsilon\alpha} d\phi \rangle\rangle - m^2 \langle\langle e^{-i\epsilon\alpha}\phi, e^{-i\epsilon\alpha}\phi \rangle\rangle \\ &\quad + \langle\langle -i\epsilon e^{-i\epsilon\alpha}\phi d\alpha, e^{-i\epsilon\alpha} d\phi \rangle\rangle + \langle\langle e^{-i\epsilon\alpha} d\phi, -i\epsilon e^{-i\epsilon\alpha}\phi d\alpha \rangle\rangle + o(\epsilon^2) \\ &= S_0[\phi] + \epsilon \langle\langle d\alpha, i(\bar{\phi} d\phi - \phi d\bar{\phi}) \rangle\rangle + o(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{1.64}$$

Nyní předpokládejme, že ϕ řeší pohybové rovnice. Jelikož $\phi'_0 = \phi$, musí platit $S_0[\phi'_\epsilon] = S_0[\phi] + o(\epsilon^2)$. Odtud tedy dostáváme, že pro řešení pohybových rovnic musí platit

$$\langle\langle d\alpha, i(\bar{\phi} d\phi - \phi d\bar{\phi}) \rangle\rangle = 0 \tag{1.65}$$

Protože α je nulové na hranici, jsou d a δ v tomto případě sdružené. Nechť $j = i(\bar{\phi} d\phi - \phi d\bar{\phi})$. Pak nutně $\delta j = 0$. Pro $M = E^{1,3}$ není $\delta j = 0$ nic jiného než rovnice kontinuity. Označme $J = *j$. Rovnice kontinuity je ekvivalentní rovnici $dJ = 0$. J je 3-forma, můžeme ji proto integrovat přes 3-rozměrné podvariety $\{t\} \times E^3$. V notaci podsekce 1.1.3 máme

$$j = i\{\bar{\phi}\, \partial_t\phi - \phi\, \partial_t\bar{\phi}\}\, dt + i\{\bar{\phi}\, \mathrm{grad}\, \phi - \phi\, \mathrm{grad}\, \bar{\phi}\} \cdot d\mathbf{r}. \tag{1.66}$$

Potom pro $J = *j$ dostaneme

$$J = i\{\bar{\phi}\, \mathrm{grad}\, \phi - \phi\, \mathrm{grad}\, \bar{\phi}\} \cdot dt \wedge d\mathbf{S} + i\{\bar{\phi}\, \partial_t\phi - \phi\, \partial_t\bar{\phi}\} \cdot dV. \tag{1.67}$$

Nyní definujeme **náboj** Q jako integrál z J přes „plátky“ $\{t\} \times E^3$:

$$Q(t) = \int_{\{t\}\times E^3} J = \int_{E^3} i\{\bar{\phi}\, \partial_t\phi - \phi\, \partial_t\bar{\phi}\}(t) \cdot dV = \int_{\mathbb{R}^3} i\{\bar{\phi}\, \partial_t\phi - \phi\, \partial_t\bar{\phi}\}(t, x, y, z) d\vec{r}. \tag{1.68}$$

Pomocí Stokesovy věty se dá ukázat, že $\dot{Q}(t) = 0$ a tedy jde o integrál pohybu.

1.4 Minimální interakce

Přece jenom by se nám líbilo mít Lagrangián pro komplexní skalární pole, který *je lokálně kalibračně invariantní*, tedy invariantní vůči transformacím $\phi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\phi(x)$, kde $\alpha(x)$ je libovolná funkce na M. Problém vznikl v členu s vnější derivací, která se vůči kalibračním transformacím chovala nehezky. Nápad je tedy nahradit operátor d operátorem $\mathcal{D}$ **kovariantní derivace** (jehož podoba ale bude záviset na volbě kalibrace) tak, že bude platit pravidlo

$$\mathcal{D}'\phi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\mathcal{D}\phi(x). \tag{1.69}$$

První inteligentní nápad je vzít $\mathcal{D}\phi = d\phi + \mathcal{A}\cdot\phi$, kde $\mathcal{A} \in \Omega^1(M)\otimes\mathbb{C}$, kde $\mathcal{A}'$ musí jít vyjádřit pomocí $\mathcal{A}$ a funkce α. Protože problematické členy jsou ryze imaginární, též musí být $\mathcal{A}$. Píšeme proto $\mathcal{A}' = iA'$ pro $A' \in \Omega^1(M)$. Potom

$$\mathcal{D}'\phi' = e^{-i\alpha}(d\phi + i(A' - d\alpha)\cdot\phi)). \tag{1.70}$$

Porovnáním s pravou stranou tedy dostáváme transformační pravidlo $A' = A + d\alpha$. Ale to je přesně kalibrační transformace pro elektromagnetický potenciál A! Stačí tedy přidat interakci s novým polem A a situace je zachráněná! Vyrobili jsme tedy akci

$$S_0'[\phi] = \langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle - m^2\langle\!\langle \phi, \phi\rangle\!\rangle. \tag{1.71}$$

Jenže my umíme přidat další kalibračně invariantní člen do akce. Zatím je A pouze „pozadí“, ale není problém ho povýšit na dynamické pole a definovat:

$$S[\phi, A] = -\frac{1}{2}\langle dA, dA\rangle_g + \langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle - m^2\langle\!\langle \phi, \phi\rangle\!\rangle. \tag{1.72}$$

Výsledné akci se říká **minimální lokálně kalibračně invariantní model**, přičemž interakční členy (obsahující ϕ i A současně) se nazývají minimální interakcí. Zdánlivě chybí člen obsahující proudy j. Ale my můžeme rozepsat člen obsahující $\mathcal{D}$:

$$\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle d\phi, d\phi\rangle\!\rangle - \langle A, i(\bar\phi d\phi - \phi d\bar\phi)\rangle_g + \langle\!\langle A\cdot\phi, A\cdot\phi\rangle\!\rangle \tag{1.73}$$

Je přímočaré spočítat pohybovou rovnici, a dostáváme

$$\delta F = -i(\bar\phi d\phi - \phi d\bar\phi) + 2\bar\phi\phi A = -i(\bar\phi\mathcal{D}\phi - \phi\overline{\mathcal{D}\phi}). \tag{1.74}$$

Vidíme, že na pravé straně na místě proudu stojí „vylepšený“ proud z předchozí podsekce. V prvé řadě je lokálně kalibračně invariantní. Za povšimnutí stojí, že A vystupuje (schované v $\mathcal{D}$) i na pravé straně „Maxwellových rovnic“.

Hlavním cílem tohoto předmětu je osvětlit geometrický význam všech objektů vyskytujících se v tomto jednoduchém, ale důležitém příkladu.

Kapitola 2

Hlavní fibrovaný prostor

2.1 Akce Lieových grup

Lieova grupa dle definice = abstraktní hladká varieta spolu s hladkou operací násobení a inverze. Jakákoliv jejich aplikace ve fyzice = máme prostor(očas) a nějakou třídu jeho transformací, které se uzavírají do grupy. Toto zodpovídá nějaké abstraktní Lieově grupě *působící akcí* na varietě.

Definice 2.1.1. Nechť G je Lieova grupa. M je hladká varieta. Řekneme, že zobrazení $\theta : G \times M \to M$ je **levá akce Lieovy grupy** G **na varietě** M, pokud je hladké a zobrazení $\theta_g : M \to M$ definované jako $\theta_g(m) \equiv \theta(g, m)$ splňuje:

1. $\theta_e = 1_M$, kde $e \in G$ je jednotka grupy. *Jednotka grupy působí triviálně.*
2. $\theta_g \circ \theta_{g'} = \theta_{gg'}$, pro všechny $g, g' \in G$. *Akce respektuje grupovou strukturu.*

Je-li jasné o které akci mluvíme, používá se značení $\theta_g(m) = g \cdot m$. Axiomy potom mají tvar:

$$e \cdot m = m, \quad g \cdot (g' \cdot m) = (gg') \cdot m. \tag{2.1}$$

Někdy je výhodné pracovat s **pravou akcí grupy** $\theta' : M \times G \to M$, kde je skládání v druhém axiomu naopak, tedy $\theta'_g \circ \theta'_{g'} = \theta'_{g'g}$. V tomto případě se používá označení $\theta'_g(m) = m \cdot g$ a druhý axiom (pro pravou akci) lze psát jako $(m \cdot g) \cdot g' = m \cdot (gg')$.

Tvrzení 2.1.2. *Pro každé $g \in G$, zobrazení $\theta_g : M \to M$ tvoří difeomorfismus M.*

Cvičení 2.1.3. *Dokažte předchozí tvrzení.*

Cvičení 2.1.4. *Ukažte, že pro libovolnou levou akci θ, zobrazení $\theta' : M \times G \to M$ definované jako $\theta'(m, g) = \theta(g^{-1}, m)$ tvoří pravou akci grupy a naopak. Množiny levých a pravých akcí grupy G na varietě M jsou tedy izomorfní.*

Definice 2.1.5. Je-li $M = V$ pro vektorový prostor V, a pro každé $g \in G$ máme $\theta_g \in \mathrm{GL}(V)$, tedy G působí pomocí lineárních zobrazení, používá se značení $\rho(g) = \theta_g$, a zobrazení $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ se nazývá **reprezentace Lieovy algebry** G **na vektorovém prostoru** V.

Příklad 2.1.6. Nechť $M = \mathbb{R}^n$. Nechť $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Pro $(\mathbf{A}, x) \in G \times \mathbb{R}^n$ definujeme $\theta(\mathbf{A}, x) = \mathbf{A}.x$. Je snadné ukázat, že θ je levou akcí grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na varietě $\mathbb{R}^n$. Navíc $\rho(\mathbf{A}) = \theta_{\mathbf{A}}$ je reprezentace.

Příklad 2.1.7. Nechť G je libovolná Lieova grupa a $M = G$. Potom **levá translace** kde $\theta_g(h) = L_g(h) = gh$ tvoří levou akci, přičemž **pravá translace** kde $\theta'_g(h) = R_g(h) = hg$ tvoří pravou akci. Konečně, **konjugace** kde $\theta_g(h) = ghg^{-1}$ tvoří levou akci G na G.

Příklad 2.1.8. Nechť $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Nechť V je konečně-rozměrný reálný vektorový prostor. Označme si množinu všech bází prostoru V jako $\mathcal{E}(V)$.

Nechť $e = (e_1, \ldots, e_n)$ je element $\mathcal{E}(V)$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Definujeme novou bázi $e \cdot \mathbf{A}$ prostoru V vztahem $(e \cdot \mathbf{A})_i = \mathbf{A}^k_i e_k$, kde horní index matice označuje řádky a dolní sloupečky. Potom

$$(e \cdot (\mathbf{A}.\mathbf{B}))_i = (\mathbf{A}.\mathbf{B})^k_i e_k = \mathbf{A}^k_j \mathbf{B}^j_i e_k = \mathbf{B}^j_i (\mathbf{A}^k_j e_k) = \mathbf{B}^j_i (e \cdot \mathbf{A})_j = ((e \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B})_i \tag{2.2}$$

Zřejmě $e \cdot \mathbf{1} = e$. Definovali jsme tedy *pravou akci* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na množině $\mathcal{E}(V)$. Je tahle akce hladká? Zatím jsme neřekli, jaká je hladká struktura na $\mathcal{E}(V)$. Zvolím si fixní bázi e^0 prostoru V. Každá báze $e \in \mathcal{E}(V)$ lze tedy napsat jako $e = e^0 \cdot \mathbf{A}(e)$. Zobrazení $\varphi(e) := \mathbf{A}(e) \in GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n,n}$ definuje globální souřadnicovou mapu pro $\mathcal{E}(V)$. Je snadné si nyní rozmyslet, proč je pravá akce hladká v takto zavedených souřadnicích.

Definice 2.1.9. Nechť $\theta : G \times M \to M$ je akce G na M. Nechť $m \in M$ je libovolný fixní bod. **Orbitové zobrazení** $\theta^{(m)} : G \to M$ příslušné bodu m definujeme jako $\theta^{(m)}(g) = \theta(g, m)$.

Jeho obrazem $\theta^{(m)}(G)$ je **orbita bodu** m označovaná jako $G \cdot m \subseteq M$. Množinově

$$G \cdot m = \{m' \in M \mid m' = g \cdot m \text{ pro nějaké } g \in G\}, \tag{2.3}$$

a orbitu bodu m si lze tedy představovat jako množinu všech bodů v M kam z bodu m reálně **dosáhneme akcí grupy** G.

Tvrzení 2.1.10. *Nechť θ je akce grupy G na M. Definujeme následující relaci na varietě M:*

$$m \approx m' \Leftrightarrow \textit{body } m \textit{ a } m' \textit{ leží oba v jedné orbitě nějakého bodu} \tag{2.4}$$

Potom relace $\approx$ je ekvivalence. Příslušné třídy ekvivalence jsou orbity akce θ a celá varieta M lze tedy napsat jako disjunktní sjednocení orbit akce.

Důkaz. Musíme ukázat, že $\approx$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Zjevně $m \approx m$, protože $m \in G \cdot m$. Relace je symetrická z definice.

Abychom dokázali tranzitivitu, stačí si uvědomit, že pokud dvě orbity $G \cdot p$ a $G \cdot p'$ mají nějaký společný bod, jsou stejné: $G \cdot p = G \cdot p'$. Vskutku, je li $m \in (G \cdot p) \cap (G \cdot p')$, mám $m = g \cdot p = g' \cdot p'$. Odtud $p' = (g'^{-1} g) \cdot p$. Je-li $h \cdot p' \in G \cdot p'$, pak $h \cdot p' = (hg'^{-1} g) \cdot p \in G \cdot p$, a tedy $G \cdot p' \subseteq G \cdot p$. Opačná inkluze se dokáže stejně.

Tranzitivita je nyní triviální záležitostí. Je-li $m \approx m'$ a $m' \approx m''$, vím, že jsou orbity $G \cdot p$ a $G \cdot p'$, že $m, m' \in G \cdot p$ a $m', m'' \in G \cdot p'$. Potom ale mají obě orbity společný bod m', jsou stejné a rozhodně tedy $m \approx m'$.

Dokázali jsme tedy, že $\approx$ je relace ekvivalence. Zbytek jsou vlastnosti relace ekvivalence. ■

Poznámka 2.1.11. Zatím jsme mluvili o orbitách jako o podmnožinách M. Dá se ukázat, že každá orbita je *vnořená podvarieta* M. Nejsou to tedy obecně vložené podvariety s podprostorovou topologií z M.

Příklad 2.1.12. Nechť $G = \mathrm{SO}(2)$ a $M = \mathbb{R}^2$. Uvažujme standardní akci grupy rotací na $\mathbb{R}^2$. Potom orbita každého bodu $x \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ je kružnice $\mathbb{S}^1_{\|x\|} \subseteq \mathbb{R}^2$, tj. $\mathrm{SO}(2) \cdot x = \mathbb{S}^1_{\|x\|}$, a pro $x = 0$ je orbitou počátek $\mathrm{SO}(2) \cdot 0 = \{0\}$. V tomto případě jsou to vložené podvariety $\mathbb{R}^2$.

Definice 2.1.13. Nechť $\theta : G \times M \to M$ je akce. Nechť $m \in M$ je libovolný fixní bod. Potom **stabilizátor bodu** m je podmnožina $G_m \subseteq G$ definovaná jako

$$G_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\}, \tag{2.5}$$

lze ji tedy chápat jako množina prvků G co **nepohnou bodem** m. G_m se také nazývá **grupou izotropie bodu** m.

Tvrzení 2.1.14. *$G_m \subseteq G$ tvoří podgrupu. Tato podgrupa je uzavřená množina v G a tedy tvoří vloženou Lieovu podgrupu G.*

Důkaz. Je-li $g, g' \in G_m$, mám $(gg') \cdot m = g(g' \cdot m) = g \cdot m = m$. Podobně $g^{-1} \cdot m = g^{-1} \cdot (g \cdot m) = (gg^{-1}) \cdot m = e \cdot m = m$. A tedy $G_m \subseteq G$ je podgrupa. Je to uzavřená množina, protože můžu psát $G_m = (\theta^{(m)})^{-1}(\{m\})$, kde $\theta^{(m)}$ je (spojité) orbitové zobrazení příslušné bodu m.

Zbytek je netriviální (velmi) důkaz z teorie Lieových grup. ■

Grupové akce můžou mít různé vlastnosti, které lze zformulovat přímo i pomocí orbit a stabilizátorů. Shrňme si několik takových vlastností:

Definice 2.1.15. Nechť $\theta : G \times M \to M$ je akce Lieovy grupy G na M. Potom

1. Akce je **tranzitivní**, pokud každé dva body $m, m' \in M$ lze spojit akcí *nějakého prvku* grupy, tj. existuje $g \in G$, takové, že $g \cdot m = m'$.

   Ekvivalentně, akce je tranzitivní, pokud má právě jednu orbitu.

2. Akce je **volná**, pokud pro libovolný bod $m \in M$ rovnost $g \cdot m = g' \cdot m$ implikuje $g = g'$. Ekvivalentně, rovnost $g \cdot m = m$ implikuje $g = e$.

   Akce je volná právě tehdy když je pro každé m příslušný stabilizátor G_m triviální podgrupou G, tj. $G_m = \{e\}$.

3. Akce je **efektivní**, pokud pro každý bod $g \in G$ takový, že $g \neq e$ existuje $m \in M$, takové, že $g \cdot m \neq m$. Tj. každý netriviální element G s nějakým bodem na M pohne.

   Ekvivalentně, průnik všech stabilizátorů je triviální podgrupa G.

Cvičení 2.1.16. *Argumentujte, že každá volná akce je efektivní. Nalezněte příklad akce která je efektivní, ale není volná. Opačné tvrzení tedy neplatí.*

Příklad 2.1.17. Nechť θ je akce z příkladu 2.1.6. Tato akce má dvě orbity $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot 0 = \{0\}$ a $GL(n, \mathbb{R}) \cdot x = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pro $x \neq 0$. Není tedy tranzitivní. Zároveň $G_0 = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a akce není volná. Kdyby $\mathbf{A}.x = x$ pro všechny $x \in \mathbb{R}^n$, znamenalo by to, že $\mathbb{R}^n$ je vlastní podprostor $\mathbf{A}$ s vlastním číslem 1, což ale znamená $\mathbf{A} = \mathbf{1}$. Vidíme, že akce je efektivní. Obecně pro $x \neq 0$, G_x je množina matic pro něž je x vlastním vektorem s vlastním číslem 1.

Příklad 2.1.18. Uvažujme akce z příkladu (2.1.7). Levá translace $\theta_g = L_g$ je tranzitivní, protože rovnice $L_g(h) = h'$ má řešení pro každou dvojici (h, h'). Pokud $L_g(h) = h$, máme $gh = h$ a tedy $g = e$. Levá translace je volná a tedy efektivní.

Nechť $\theta_g(h) = I_g(h) = ghg^{-1}$ je konjugace. Akce není tranzitivní, protože orbitou jednotky je jen jeden bod, tj. $G \cdot e = \{e\}$. To také ukazuje, že akce není ani volná protože $G_e = G$. Tato akce není ani efektivní, protože **centrum grupy** je definované jako množina

$$\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ pro všechny } h \in G\}. \tag{2.6}$$

Konjugace je tedy efektivní právě tehdy když $\mathcal{Z}(G) = \{e\}$. To rozhodně nesplňuje každá grupa. Pro Abelovskou (komutativní) je $\mathcal{Z}(G) = G$, nebo například $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) = \{\lambda \cdot \mathbf{1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 2.1.19 (Hopfova fibrace I)**.** Uvažujme grupu $G = \mathrm{SU}(2)$. Připomeňme, že

$$\mathrm{SU}(2) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{1} \text{ a } \det(\mathbf{A}) = 1\}. \tag{2.7}$$

Snadno se ukáže, že $\mathrm{SU}(2) \doteq \mathbb{S}^3$. Vskutku, parametrizujeme-li obecnou komplexní matici,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

podmínky na $\mathbf{A} \in \mathrm{U}(2)$ okamžitě dávají $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\dagger$. Zároveň víme, že $|\det \mathbf{A}| = 1$ a tedy $\det \mathbf{A} = e^{i\kappa}$ pro nějaké $\kappa \in \mathbb{R}$. Odtud

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\lambda} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = e^{-i\kappa} \begin{pmatrix} \delta & -\lambda \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

To nám určí $\delta = e^{i\kappa}\bar{\alpha}$ a $\gamma = -e^{i\kappa}\bar{\lambda}$. Je praktické přejít k parametrizaci $\alpha = e^{i\kappa/2}\alpha'$ a $\lambda = e^{i\kappa/2}\lambda'$. Zapomeneme na apostrofy a můžeme psát

$$\mathbf{A} = e^{i\kappa/2} \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ -\bar{\lambda} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Ještě nesmíme zapomenout na $\det \mathbf{A} = e^{i\kappa}$. Ale to nám dává podmínku $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$. A tedy

$$\mathrm{U}(2) = \{e^{i\kappa/2} \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ -\bar{\lambda} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1,\ \kappa \in \mathbb{R}\} \doteq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3. \tag{2.11}$$

Pro $\mathrm{SU}(2)$ je $\kappa = 0$, takže vidíme, že $\mathrm{SU}(2) \doteq \mathbb{S}^3$, navíc dostáváme rozklad $\mathrm{U}(2) \doteq U(1) \times \mathrm{SU}(2)$. Ve skutečnosti jsou všechny množinové bijekce i difeomorfismy a kartézský součin je přímý součin Lieových grup. Taky je vidět, že $\mathrm{SU}(2)$ je jednoduše souvislá a $\mathrm{U}(2)$ není.

Uvažujme nyní varietu $M = H_0(2, \mathbb{C})$ hermitovských matic 2×2 s nulovou stopou. Tato množina tvoří vektorový prostor ze kterého zdědí hladkou strukturu. Vskutku:

$$H_0(2, \mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \mid x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}. \tag{2.12}$$

Lineární izomorfismus $\mathbb{R}^3 \to H_2(2, \mathbb{C})$ lze psát jako $\Psi(x) = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$, kde σ_i jsou standardní Pauliho matice:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Je snadné vidět, že $\det(\Psi(x)) = -\|x\|^2$, kde $\|x\|$ je standardní eukleidovská norma v $\mathbb{R}^3$. Nyní definujeme akci $\mathrm{SU}(2)$ na prostoru $H_0(2, \mathbb{C})$ následovně:

$$\theta_{\mathbf{A}}(\mathbf{H}) = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^\dagger \text{ pro všechny } \mathbf{H} \in H_0(2, \mathbf{C}). \tag{2.14}$$

Snadno se ověří, že $\theta_{\mathbf{A}}(\mathbf{H})$ je hermitovská a bezestopá. Můžeme tedy použít tuto akci abychom definovali akci $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vztahem $\hat{\theta}_{\mathbf{A}}(x) = \Psi^{-1}(\theta_{\mathbf{A}}(\Psi(x)))$. Platí pravidlo

$$\|\hat{\theta}_{\mathbf{A}}(x)\|^2 = -\det(\theta_{\mathbf{A}}(\Psi(x))) = -\det(\mathbf{A}\Psi(x)\mathbf{A}^\dagger) = -\det(\Psi(x)) = \|x\|^2. \tag{2.15}$$

Vidíme tedy, že $\hat{\theta}_{\mathbf{A}}$ definuje ortogonální lineární transformace, a tedy elementy grupy $\mathrm{O}(3)$. Můžeme se na $\hat{\theta}$ dívat jako na zobrazení $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$. Ve skutečnosti má $\hat{\theta}$ hodnoty v grupě vlastních ortogonálních transformací a tedy v $\mathrm{SO}(3)$. Jak se to ukáže?

Platí (bez důkazu), že libovolná matice v SU(2) lze psát jako maticová exponenciála ve tvaru

$$\mathbf{A} = \exp(-\frac{i}{2}\alpha\mathbf{n}\cdot\sigma) = \cos(\frac{\alpha}{2})\mathbf{1} - i\sin(\frac{\alpha}{2})(\mathbf{n}\cdot\sigma), \tag{2.16}$$

kde $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je směrový vektor a $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť (e_1, e_2, e_3) je standardní báze v $\mathbb{R}^3$. Máme $\Psi(e_i) = \sigma_i$. Je-li $\mathbf{H} = H^i\sigma_i$ obecná matice v $H_0(2, \mathbb{C})$, můžeme psát $H^i = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_i\mathbf{H})$. Vskutku:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_i H^k \sigma_k) = H^k\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_i\sigma_k) = H^k\frac{1}{4}\operatorname{Tr}(\{\sigma_i, \sigma_k\}) = H^k\frac{1}{4}\operatorname{Tr}(2\delta_{ik}\mathbf{1}) = H^k\delta_{ik} = H^i. \tag{2.17}$$

Chceme-li tedy spočítat jak vypadá matice zobrazení $\hat{\theta}_{\mathbf{A}}$ ve standardní bázi, máme

$$\hat{\theta}_{\mathbf{A}}(e_b) = \Psi^{-1}(\theta_{\mathbf{A}}(\sigma_b)) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_a\mathbf{A}\sigma_b\mathbf{A}^\dagger)\Psi^{-1}(\sigma_a) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_a\mathbf{A}\sigma_b\mathbf{A}^\dagger)\cdot e_a. \tag{2.18}$$

Nyní je potřeba dosadit matici $\mathbf{A}$ v celé své kráse (2.16). To se dá velmi snadno (byť za delší čas) vypočítat s použitím formulek pro stopy součinů Pauliho matic.

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\sigma_1) &= 0, & \operatorname{Tr}(\sigma_a\sigma_b) &= 2\delta_{ab}, \\ \operatorname{Tr}(\sigma_a\sigma_b\sigma_c) &= 2i\epsilon_{abc}, & \operatorname{Tr}(\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d) &= 2(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{cb}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Výsledek je po delším počítáním následující. Pokud $R_{ab} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_a\mathbf{A}\sigma_b\mathbf{A}^\dagger)$, máme

$$R_{ab} = \delta_{ab}\cos(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))n_a n_b - \epsilon_{abc}n_c\sin(\alpha) \tag{2.20}$$

Toto jsou ovšem komponenty nejobecnější matice rotace $\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n})$ o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ okolo osy zadané směrovým vektorem $\mathbf{n}$. Dostáváme tedy grupový homomorfismus $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, který je surjektivní. Z vyjádření matice $R_{ab} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_a\mathbf{A}\sigma_b\mathbf{A}^\perp)$ vidíme, že je to zobrazení hladké. Dokonce platí, že jde o takzvané hladké *ponoření* (angl. submersion).

Sekci zakončíme následující užitečnou definicí:

Definice 2.1.20. Nechť θ a θ' jsou akce Lieovy grupy G na dvou hladkých varietách M a M'. Nechť $\varphi : M \to M'$ je hladké zobrazení. Řekneme, že φ je **G-ekvivariantní**, pokud

$$\varphi(\theta(g, m)) = \theta'(g, \varphi(m)). \tag{2.21}$$

Pomocí „tečkové“ notace zapíšeme přehledněji jako $\varphi(g \cdot m) = g \cdot \varphi(m)$.

2.2 Fibrované prostory

Tato sekce slouží pouze k rychlému připomenutí hlavních pojmů a notace. Stručně řečeno, (hladké) fibrované prostory jsou hladké variety co lokálně v jistém smyslu vypadají jako kartézský součin kousku tzv. bazické variety a tzv. vlákna. Báze a vlákno vystupují v definici nesymetricky.

Definice 2.2.1. Nechť $\pi : E \to M$ je hladké surjektivní zobrazení dvou hladkých variet E a M, nazývaných **totální prostor** E a **bazická varieta** M. Zobrazení π se nazývá **projekce**.

Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí variety M a $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je kolekce hladkých difeomorfismů $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, kde F je hladká varieta nazvaná **typické vlákno**, taková, že platí

$$\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1, \text{ kde } \pi_1 : U_\alpha \times F \to U_\alpha \text{ je projekce.} \tag{2.22}$$

Potom se $\phi \equiv \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ nazývá **lokální trivializace**.

Řekneme, že trojice (E, M, π) se nazývá **fibrovaný prostor**, pokud existuje *nějaká* lokální trivializace. Často píšeme jen $\pi : E \to M$.

Vláknem fibrace nad $m \in M$ rozumíme množinu $E_m \equiv \pi^{-1}(m)$. Základním poznatkem je, že každé vlákno E_m je vložená podvarieta E difeomorfní typickému vláknu F. Každé m je totiž v U_α pro nějaké α a $\phi_\alpha(m,\cdot) : F \to E_m$ je hledaný difeomorfismus. Může se ale stát, že bod m je obsažen ve více okolích z pokrytí daného lokální trivializací. Potom přijdou na přetřes takzvaná **přechodová zobrazení** definovaná pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ jako

$$(g_{\alpha\beta}(m))(f) = \pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m,f)), \tag{2.23}$$

kde $\pi_2 : U_\alpha \times F \to F$ je projekce. Z konstrukce je zobrazení $g_{\alpha\beta}(m)$ pro každé m hladkým zobrazením z F do F. Je to hladký difeomorfismus, protože $g_{\alpha\beta}(m)^{-1} = g_{\beta\alpha}(m)$. Přechodová zobrazení tedy můžeme brát jako $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$. Řekneme, že $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ jsou hladká, pokud pro fixní f, zobrazení $m \mapsto (g_{\alpha\beta}(m))(f) \in F$ je hladké zobrazení.

Pro každé $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ musí tedy $g_{\alpha\beta}$ splňovat podmínky

$$g_{\alpha\alpha}(m) = 1_F, \;\; g_{\beta\alpha}(m) = (g_{\alpha\beta}(m))^{-1}. \tag{2.24}$$

Může se stát, že $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Potom se snadno odvodí tzv. **kocyklová podmínka**:

$$g_{\alpha\beta}(m) \circ g_{\beta\gamma}(m) = g_{\alpha\gamma}(m). \tag{2.25}$$

Často nastane situace, kdy člověk začne s typickým vláknem F, bazickou varietou M a se surjektivní projekcí $\pi : E \to M$ z totálního prostoru, který apriori není hladká varieta. Potom je užitečné následující tvrzení:

Tvrzení 2.2.2. *Nechť $\pi : E \to M$ je zobrazení z množiny E do hladké variety M. Nechť F je hladká varieta. Mějme zadána bijektivní zobrazení $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ taková, že $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1$ a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí M.*

Pokud jsou všechna přechodová zobrazení $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ hladká, existuje unikátní topologie a hladká struktura na E, že $\pi : E \to M$ je hladké a $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ tvoří lokální trivializaci pro fibrovaný prostor $\pi : E \to M$ s typickým vláknem F.

Toto tvrzení se aplikuje velmi často, například u konstrukce tečného a kotečného vektorového bundlu. Ve skutečnosti platí ještě silnější tvrzení. Dokonce nepotřebujeme ani zobrazení ϕ_α ani prostor E. Následující věta ukáže, že jediným zajímavým objektem jsou přechodová zobrazení.

Věta 2.2.3. *Nechť M a F jsou hladké variety. Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí M a pro každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta$ existuje hladká funkce $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ splňující podmínky (2.24), taková, že pro všechny neprázdné průniky $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ platí kocyklová podmínka (2.25).*

Potom existuje fibrovaný prostor $\pi : E \to M$ s typickým vláknem F a lokální trivializací $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ takovou, že $g_{\alpha\beta}$ jsou její přechodová zobrazení. Takový fibrovaný prostor je unikátní až na izomorfismus.

Aplikace tohoto tvrzení už není tak častá při konstrukci užitečných fibrovaných prostorů, často se však hodí v existenčních důkazech. Často nastává situace, kdy F není obecná varieta, ale varieta s dodatečnou strukturou. Velmi užitečným příkladem je ten následující:

Definice 2.2.4. Nechť $\pi : E \to M$ je fibrovaný prostor, kde $F = V$ je vektorový prostor. Řekneme, že E je **vektorový fibrovaný prostor**, nebo též **vektorový bandl**, pokud přechodová zobrazení $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(V)$ mají hodnotu v konečně-rozměrné podgrupě $\mathrm{GL}(V) \subseteq \mathrm{Diff}(V)$, neboli pro každé $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ je $g_{\alpha\beta}(m)$ lineární isomorfismus prostoru V.

Každé vlákno E_m vektorového bandlu má unikátní strukturu vektorového prostoru, takovou že $\phi_\alpha(m,\cdot) : V \to E_m$ je lineární isomorfismus.

Často je lineární struktura na vláknech dopředu zadaná, viz. konstrukce TM. Potom stačí ověřit, že je trivializační zobrazení $\phi_\alpha(m,\cdot)$ lineární. Potom je automaticky lineární isomorfismus a přechodové funkce jsou lineární isomorfismy.

Dalším důležitým konceptem jsou lokální řezy fibrovaného prostoru. Kromě jejich přímočaré geometrické interpretace (např. lokální vektorová pole) často můžou posloužit ke konstrukce lokální trivializace (viz. následující sekce).

Definice 2.2.5. Nechť $\pi : E \to M$ je fibrovaný prostor. Řekneme, že hladké zobrazení $\sigma : U \to E$ je **lokální řez fibrace** π pokud $\pi \circ \sigma = 1_U$. Prostor lokálních řezů na okolí U se označuje jako $\Gamma_U(E)$. Pokud $U = M$, říkáme, že σ je **globální řez** a píšeme $\Gamma(E)$ pro jejich množinu.

2.3 Principální fibrace

Centrálním objektem této přednášky bude další speciální případ fibrovaného prostoru. Uvažujme nyní případ, kdy $F = G$, kde G je Lieova grupa. Jak omezit přechodová zobrazení nyní?

Stačí si uvědomit, že G samotná tvoří podgrupu $\mathrm{Diff}(G)$. Vskutku, každému $g \in G$ můžeme přiřadit unikátní levou translaci $L_g \in \mathrm{Diff}(G)$. Přiřazení $g \mapsto L_g$ je grupový monomorfismus, protože $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$, $L_e = 1_G$, a $L_g = 1_G$ implikuje $g = e$. Budeme se nyní zabývat právě fibrovanými prostory, jejichž přechodová zobrazení leží v této podgrupě.

Definice 2.3.1. Nechť $\pi : P \to M$ je fibrovaný prostor s typickým vláknem G, kde G je Lieova grupa. Nechť $R : P \times G \to P$ je *pravá akce* Lieovy grupy G na P. Předpokládáme následující vlastnosti všech zúčastněných:

1. Akce R je volná a působí podél vláken, tj. $\pi \circ R_g = \pi$ pro všechny $g \in G$.
2. Zúžení akce R na každé vlákno je tranzitivní, tj. pro každé $p, p' \in P_m$ existuje (unikátní) $g \in G$, takové že $p' = p \cdot g$.
3. Existuje lokální trivializace $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, jejíž zobrazení jsou ekvivariantní, tj. pro každé $m \in U_\alpha$ a $g, h \in G$ platí
$$\phi_\alpha(m, gh) = \phi_\alpha(m, g) \cdot h. \tag{2.26}$$
Takovou lokální trivializaci budeme nazývat **principální**.

Potom se fibrovaný prostor (P, M, π, R) nazývá **hlavní fibrovaný prostor** nebo též **principální G-bandl**, principální fibrovaný prostor atd. Anglicky nejčastěji **principal G-bundle**.

Poznámka 2.3.2. Všimněte si, že akce R nemůže být pro $M \neq \{m\}$ tranzitivní. Dokonce snadno určíme orbity, jsou jimi přesně vlákna fibrace P_m difeomorfní grupě G. Zároveň, až na příklad triviálního principálního bundlu, P_m nemá dobře definovanou strukturu Lieovy grupy - obecně nelze jednoznačně určit jednotku grupy.

Tvrzení 2.3.3. *Nechť (P, M, π, R) je hlavní fibrovaný prostor. Potom přechodová zobrazení principální trivializace mají hodnoty v podgrupě $G \subseteq \mathrm{Diff}(G)$.*

Důkaz. Nechť $m \in U_\alpha \cap U_\beta$. Pro prvek $h \in G$ můžeme psát

$$(g_{\alpha\beta}(m))(h) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m,h)) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m,e) \cdot h) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m,e))) \cdot h. \tag{2.27}$$

Označíme-li $\hat{g}_{\alpha\beta}(m) = \pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1}\phi_\beta(m, e))$, můžeme psát

$$(g_{\alpha\beta}(m))(h) = \hat{g}_{\alpha\beta}(m) \cdot h \equiv L_{\hat{g}_{\alpha\beta}(m)}(h). \tag{2.28}$$

Vidíme tedy, že přechodová zobrazení skutečně působí jako levá translace grupou G, a tedy mají hodnoty ve výše zmíněné podgrupě Diff (G) ■

Poznámka 2.3.4. Podobně jako v případě obecné fibrace platí opačné tvrzení. Pokud máme fibrovaný prostor P s typickým vláknem G, v němž přechodová zobrazení působí levou translací, můžeme totální P vybavit unikátní pravou akcí grupy G volnou a tranzitivní podél vláken, která z dané lokální trivializace udělá principální a tedy z P hlavní fibrovaný prostor.

Příklad 2.3.5. Nechť $P = M \times G$ je triviální fibrovaný prostor, $\pi : M \times G \to M$ projekce. Definujeme $R_g(m, h) = (m, h \cdot g)$. Potom identické zobrazení $\phi : M \times G \to M \times G$ je principální lokální (zde globální) trivializace a $\pi : M \times G \to M$ je hlavní fibrovaný prostor.

Hlavní fibrovaný prostor má následující užitečnou vlastnost, kde pokrytí lokálními řezy vždy definuje principální lokální trivializaci.

Tvrzení 2.3.6. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí M a $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je kolekce hladkých lokálních řezů $\sigma_\alpha \in \Gamma_{U_\alpha}(P)$. Potom $\phi'_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ definovaná jako $\phi'_\alpha(m, g) = \sigma_\alpha(m) \cdot g$ definují principální lokální trivializaci P.*

Důkaz. Protože $\pi \circ \sigma_\alpha = 1_{U_\alpha}$ a $\pi(p \cdot g) = p$, dostáváme $\pi(\phi'_\alpha(m, g)) = \pi(\sigma_\alpha(m)) = m = \pi_1(m)$. Zobrazení jsou ekvivariantní, zřejmě $\phi'_\alpha(m, gh) = \sigma_\alpha(m) \cdot (gh) = (\sigma_\alpha(m) \cdot g) \cdot h = \phi'_\alpha(m, g) \cdot h$. Pro dokončení důkazu musíme ukázat, že $\phi'_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ je difeomorfismus.

ϕ'_α můžeme psát jako složení hladkých zobrazení $\phi'_\alpha = R \circ (\sigma_\alpha \times 1_G)$, kde $R : P \times G \to P$ je pravá akce na P. Máme tedy ϕ'_α hladké. Nechť $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Protože bod $\sigma_\alpha(\pi(p))$ leží ve stejném vlákně, existuje unikátní $g_\alpha(p) \in G$, takový že

$$p = \sigma_\alpha(\pi(p)) \cdot g_\alpha(p). \tag{2.29}$$

Definujeme inverzní zobrazení jako $\phi'^{-1}_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p))$. Snadno se ověří, že opravdu $\phi'_\alpha \circ \phi'^{-1}_\alpha = 1$ and $\phi'^{-1}_\alpha \circ \phi'_\alpha = 1$. Víme tedy, že ϕ'_α je hladká bijekce. Abychom ukázali, že jde o difeomorfismus, stačí ukázat, že ϕ'_α je vnoření, tedy jeho tečné zobrazení je v každém vodě injektivní. Potřebné prostředky (fundamentální vektorová pole) budeme mít až v další sekci. ■

Důsledek 2.3.7. *Hlavní fibrovaný prostor je trivializovatelný, právě tehdy když existuje nějaký globální hladký řez.*

Příklad 2.3.8. Nechť M je libovolná varieta s pravou a *volnou* akcí R grupy G. Nechť M/G je množina všech orbit akce R nazývaná **prostor orbit**. Definujeme zobrazení $\pi : M \to M/G$ jako $\pi(m) = G \cdot m$, tj. každému bodu přiřadí jeho orbitu. Jelikož každá orbita je orbitou nějakého bodu, je π surjektivní. Pro každé $\mathcal{O} \in M/G$ je $\pi^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \subseteq M$ viděna jako podmnožina M.

M/G vždycky topologický prostor, kde $U \subseteq M/G$ je otevřená právě tehdy když $\pi^{-1}(U)$ je otevřená v M. Je to nejhrubší (nejméně otevřených množin) topologie v které je π spojité. Za ideálních okolností existuje (ne vždy!) hladká struktura, taková že $\pi : M \to M/G$ je surjektivní hladké ponoření (surjective submersion).

Za takových podmínek vždy existuje pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ variety M/G a kolekce hladkých řezů $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$, kde $\sigma_\alpha : U_\alpha \to M$ splňuje $\pi \circ \sigma_\alpha = 1_{U_\alpha}$. Modifikací důkazu předchozího tvrzení se dá ukázat, že přesně stejným způsobem se na $\pi : M \to M/G$ dá definovat struktura hlavního fibrovaného prostoru.

V dalším příkladu se podrobně podíváme na fyzikálně extrémně důležitý příklad hlavního fibrovaného prostoru. Je jím tzv. Hopfova fibrace $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, kde $G = U(1) \doteq \mathbb{S}^1$.

Příklad 2.3.9 (Hopfova fibrace II)**.** Uvažujme nyní grupu $\mathrm{SU}(2)$ a její působení na dvou různých prostorech. Z definice (je to podgrupa maticové grupy $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$) působí na vektorovém prostoru $\mathbb{C}^2$, tj. pro $\chi \in \mathbb{C}^2$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}(2)$ působí jako $\mathbf{A}.\chi \equiv L_{\mathbf{A}}(\chi)$.

Ujasněme si nejprve, jak přesně vypadají orbity této akce. V $\mathbb{C}^2$ máme normu definovanou jako $\|\chi\|^2 = \chi^\dagger\chi$. Podobně jako při důkazu $\mathrm{SU}(2) \doteq \mathbb{S}^3$ vidíme, že pro $r \geq 0$ můžeme psát

$$\mathbb{S}^3_r \doteq \{\chi \in \mathbb{C}^2 \mid \chi^\dagger\chi = r^2\} = \{\chi \in \mathbb{C}^2 \mid \|\chi\| = r\}. \tag{2.30}$$

Tvrdíme, že orbity $\mathrm{SU}(2)$ jsou přesně tyto třírozměrné sféry pro $r \geq 0$. Všimněte si, že máme $\mathbb{C}^2/\mathrm{SU}(2) = [0, +\infty)$, prostor jenž není nikdy hladkou varietou.

Protože akce $\mathrm{SU}(2)$ zachovává normu, tj. $\|\mathbf{A}\chi\| = \|\chi\|$ pro všechny $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}(2)$, každá z orbit musí být obsažena v nějaké z $\mathbb{S}^3_r$. Nechť $\chi \in \mathbb{S}^3_r$ je libovolné. Sestrojíme $\mathbf{A}$, že $\chi = \mathbf{A}.\chi_0$, kde $\chi_0 = (r, 0)^T$ je jeden z „pólů“ $\mathbb{S}^3_r$. Nechť $\chi = (\alpha, \lambda)^T$. Dosazením snadno zjistíme, že

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\lambda} \\ \lambda & \bar{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Protože $\|\chi\| = r$, snadno se ukáže, že opravdu $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}(2)$. Viz také (2.11). Jelikož každé dva body na $\mathbb{S}^3_r$ spojíme sekvencí dvou akcí $\mathrm{SU}(2)$, musí být celá $\mathbb{S}^3_r$ v jedné orbitě.

Definujeme nyní zobrazení $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$ vztahem

$$\pi(\chi)_i = \chi^\dagger\sigma_i\chi. \tag{2.32}$$

Nyní ověříme několik vlastností tohoto zobrazení.

Bod 1: π skoro zachovává normu: Pro libovolný $\chi \in \mathbb{C}^2$ je $\chi\chi^\dagger$ hermitovská komplexní matice 2×2. Lze ji unikátně zapsat pomocí normy $\|\chi\|$ a zobrazení π jako

$$\chi\chi^\dagger = \frac{1}{2}(\|\chi\|^2 \cdot \mathbf{1} + \pi(\chi)_i \cdot \sigma_i) \tag{2.33}$$

Snadno se ukáže, že $(\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tvoří bázi prostoru $H(2,\mathbb{C})$ hermitovských matic. Vzpomeňte $H_0(2,\mathbb{C})$ z příkladu 2.1.19, což je podprostor $H(2,\mathbb{C})$ tvořený lineárním obalem báze $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Koeficienty v této bázi se získají pomocí stop, tj.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{1} + \mathrm{Tr}(\sigma_i.\mathbf{H}) \cdot \sigma_i) \tag{2.34}$$

Pro $\mathbf{H} = \chi\chi^\dagger$ pomocí záměn „pod stopou“ snadno dostáváme výsledek. Užitím této formulky snadno zjistíme eukleidovskou normu obrazu $\pi(\chi)$ v závislosti na normě $\|\chi\|$. Máme

$$\begin{aligned}
\|\pi(\chi)\|^2 &= \pi(\chi)_i\pi(\chi)_i = \chi^\dagger\sigma_i\chi\chi^\dagger\sigma_i\chi = \mathrm{Tr}(\chi^\dagger\sigma_i\chi\chi^\dagger\sigma_i\chi) = \mathrm{Tr}(\chi\chi^\dagger\sigma_i\chi\chi^\dagger\sigma_i) \\
&= \frac{1}{4}(\|\chi\|^4 \,\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_i) + \pi(\chi)_j\pi(\chi)_k \,\mathrm{Tr}(\sigma_j\sigma_i\sigma_k\sigma_i)) \\
&= \frac{1}{4}(\|\chi\|^4 2\delta_{ii} + 2\pi(\chi)_j\pi(\chi)_k(\delta_{ij}\delta_{ki} - \delta_{jk}\delta_{ii} + \delta_{ji}\delta_{ik})) \\
&= \frac{1}{4}(6\|\chi\|^4 - 2\|\pi(\chi)\|^2).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Odtud $\|\pi(\chi)\|^2 = \|\chi\|^4$, a tedy π definuje zobrazení $\pi : \mathbb{S}^3_{\sqrt{r}} \to \mathbb{S}^2_r$. Zobrazení je hladké protože původní zobrazení je jen polynom v komponentách χ.

Bod 2: π je ekvivariantní zobrazení: Připomeňme, že máme grupový homomorfismus $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ a tedy i akci $\hat{\theta}_{\mathbf{A}}$ grupy SU(2). Tvrdíme, že

$$\pi(L_{\mathbf{A}}(\chi)) = \hat{\theta}_{\mathbf{A}}(\pi(\chi)). \tag{2.36}$$

To ale ve skutečnosti přímo plyne z definice akce $\hat{\theta}$. Vskutku, máme

$$\begin{aligned} \pi(L_{\mathbf{A}}(\chi))_i &= \chi^\dagger(\mathbf{A}^\dagger\sigma_i\mathbf{A})\chi = \mathrm{Tr}(\sigma_i\mathbf{A}\chi\chi^\dagger\mathbf{A}^\dagger) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_i\mathbf{A}(\|\chi\|^2\cdot\mathbf{1} + \pi(\chi)_k\sigma_k)\mathbf{A}^\dagger) \\ &= \pi(\chi)_k\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_i\mathbf{A}\sigma_k\mathbf{A}^\dagger) = R_{ik}\cdot\pi(\chi)_k. \end{aligned} \tag{2.37}$$

To je ale přesně vyjádření (2.36). Vidíme, že π je ekvivariantní.

Bod 3: $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ je surjektivní zobrazení: Nechť $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ je vektor normovaný na 1. Nechť $\zeta \in \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ je libovolný normovaný vektor, $\zeta^\dagger\zeta = 1$. Označme $\mathbf{n}' = \pi(\zeta)$ normovaný obraz v $\mathbb{C}^2$. Protože $\mathbb{S}^2$ je orbita grupy rotací, určitě existuje $\mathbf{B} \in \mathrm{SO}(3)$, že $\mathbf{n} = \mathbf{B}.\mathbf{n}'$. Ale protože nakrytí $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ je surjektivní, existuje $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}(2)$, takové že $\mathbf{B} = \hat{\theta}_{\mathbf{A}}$. Potom

$$\pi(L_{\mathbf{A}}(\zeta)) = \hat{\theta}_{\mathbf{A}}(\pi(\zeta)) = \mathbf{B}.\mathbf{n}' = \mathbf{n}. \tag{2.38}$$

A tedy π je surjektivní. Ve skutečnosti jde o surjektivní ponoření, protože každé ekvivariantní zobrazení má konstantní hodnost podél celé orbity, v tomto případě tedy podél celé $\mathbb{S}^3$. A hladké surjektivní zobrazení s konstantní hodností je vždycky ponoření (to není triviální tvrzení).

Bod 4: Podél vláken π volně a tranzitivně působí grupa U(1). Připomeňme, že grupu $\mathrm{U}(1) \subseteq \mathrm{GL}(\mathbb{C}, 1) = \mathbb{C}$ vybavujeme hladkou strukturou podvariety $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, přičemž

$$\mathrm{U}(1) = \{\exp(i\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{S}^1. \tag{2.39}$$

Tj. α je „polární“ souřadnice na $\mathbb{S}^1$. U(1) má pravou (a tedy i levou) akci na $\mathbb{C}^2$ definovanou jako násobení odpovídajícím komplexním číslem: $\chi \cdot e^{i\alpha} = e^{i\alpha}\chi$. Zřejmě $\|\chi\cdot e^{i\alpha}\| = \|\chi\|$ a akci tedy můžeme zúžit na $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$. Označme $R_{e^{i\alpha}}(\zeta) \equiv \zeta\cdot e^{i\alpha}$. Chceme ukázat, že $\pi \circ R_{e^{i\alpha}} = \pi$:

$$\pi(e^{i\alpha}\zeta)_i = (e^{i\alpha}\zeta)^\dagger\sigma_i(e^{i\alpha}\zeta) = e^{-i\alpha}(\zeta^\dagger\sigma_i\zeta)e^{i\alpha} = \pi(\zeta)_i. \tag{2.40}$$

Dál chceme ukázat, že akce působí volně. Nechť $e^{i\alpha}\zeta = \zeta$. Stačí rovnici vynásobit $\zeta^\dagger$ zleva a dostáváme $e^{i\alpha}\zeta^\dagger\zeta = \zeta^\dagger\zeta$. Odtud $e^{i\alpha} = 1 \equiv e_{\mathrm{U}(1)}$.

Konečně, musíme ukázat, že je akce tranzitivní. Nechť $\zeta \in \mathbb{S}^3$, takové, že $\pi(\zeta) = \mathbf{n}$. Definujme komplexní matici $\Sigma = \mathbf{n}\cdot\sigma$. Podle předpokladu $\zeta\zeta^\dagger = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{n}\cdot\sigma)$. Odtud tedy

$$\Sigma(\zeta) = (2\zeta\zeta^\dagger - \mathbf{1})\zeta = 2\zeta\zeta^\dagger\zeta - \zeta = \zeta. \tag{2.41}$$

Odtud vidíme, že každý bod vlákna $\pi^{-1}(\mathbf{n})$ je vlastním vektorem operátoru Σ s vlastním číslem 1. Opačné tvrzení je také pravdivé. Nechť $\Sigma(\zeta) = \zeta$. Máme $\pi(\zeta)_i = \zeta^\dagger\sigma_i\zeta$. Vynásobením n_i a sečtením přes i dostáváme $\pi(\zeta)_i\cdot n_i = 1$, tj. $\pi(\zeta)\cdot\mathbf{n} = 1$. Ale $\pi(\zeta)$ i $\mathbf{n}$ jsou směrové vektory, odkud plyne $\pi(\zeta) = \mathbf{n}$. Vlákna π mají tedy jednoduchou interpretaci:

$$\pi^{-1}(\mathbf{n}) = \{\zeta \in \mathbb{C}^2 \mid \zeta \text{ je normovaným vlastním vektorem } \mathbf{n}\cdot\sigma \text{ s vlastním číslem } 1\}. \tag{2.42}$$

Každý absolvent kvantové mechaniky ví, že $\mathbf{n} \cdot \sigma$ má vlastní čísla $\{-1, 1\}$ a příslušné vlastní prostory jsou jednorozměrné. Je-li tedy χ' libovolný jiný normovaný vlastní vektor, je $\chi' = e^{i\alpha}\chi$ pro nějaké $e^{i\alpha} \in \mathrm{U}(1)$. To ukazuje tranzitivitu.

Bod 5: Dostáváme netriviální hlavní fibraci se strukturní grupou $U(1)$: Ukázali jsme, že $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ je hladká surjektivní submerze. Definovali jsme hladkou volnou akci působící tranzitivně podél vláken. Abychom ukázali, že jde o hlavní fibraci, musí se definovat lokální trivializace. Protože π je submerze, vždycky existuje kolekce $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ hladkých řezů π, jejichž definiční obory pokrývají $\mathbb{S}^2$. Úplně stejně jako v důkazu tvrzení 2.3.6 se pomocí nich definuje principální lokální trivializace $\mathbb{S}^3$.

Výsledný hlavní fibrovaný prostor se nazývá **Hopfova fibrace**. Výsledek není triviální fibrovaný prostor, protože $\mathbb{S}^3 \ncong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ a topologický prostor $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ není jednoduše souvislý.

Další příklad hlavního fibrovaného prostoru je jedním z těch úplně nejdůležitějších. Ukazuje, že kolekce všech bází všech tečných prostorů tvoří fibrovaný prostor s přirozenou akcí grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Je důležité mu porozumět, protože *naprostá většina formálních definic v teorii hlavních fibrovaných prostorů pochází ze studia tohoto speciálního případu*!

Příklad 2.3.10 (Hlavní fibrace repérů (angl. Frame bundle))**.** Připomeňme příklad 2.1.8. Pro každý n-rozměrný vektorový prostor V jsme definovali varietu $\mathcal{E}(V)$ všech bází prostoru V.

Nechť M je libovolná n-rozměrná hladká varieta. Definujeme totální prostor $F(M)$ jako

$$F(M) = \bigsqcup_{m\in M} \mathcal{E}(T_m M), \tag{2.43}$$

tj. $F(M)$ je množina všech bází všech tečných prostorů k varietě M. Nechť $e \in \mathcal{E}(T_m M)$. Potom $\pi : F(M) \to M$ definujeme jako $\pi(e) = m$, tj. každé bázi přiřadíme bod variety M, kde se dotýká tečný prostor jehož je e bází. Jelikož $\mathcal{E}(T_m M) \neq \emptyset$, je π surjektivní.

Typickým vláknem $\pi : F(M) \to M$ bude Lieova grupa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Nechť $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je souřadnicový atlas variety M. Označme příslušné souřadnicové funkce $x^i_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$. Pro každý bod $m \in U_\alpha$ tedy dostáváme prvek $\partial^{(\alpha)}|_m \in \mathcal{E}(T_m M)$, kde

$$\partial^{(\alpha)}|_m = \left(\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}\bigg|_m , \ldots , \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\bigg|_m \right). \tag{2.44}$$

Nyní definujeme lokální trivializaci $\phi_\alpha : U_\alpha \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$. Připomeňme, že $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ působí přirozeně zprava na $\mathcal{E}(V)$ pro libovolný n-rozměrný prostor. Potom

$$\phi_\alpha(m, \mathbf{A}) := \partial^{(\alpha)}|_m \cdot \mathbf{A}, \tag{2.45}$$

pro každé $m \in U_\alpha$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. V duchu tvrzení 2.2.2 musíme ukázat, že jsme právě definovali bijekci, takovou že $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1$. Ale protože $\partial^{(\alpha)}|_m$ je báze v $T_m M$, je i výsledek působení $\mathbf{A}$ (z definice). A tedy $\pi(\phi_\alpha(m, \mathbf{A})) = m$. Zjevně je to bijekce, protože pro každé $e \in \mathcal{E}(T_m M)$ existuje právě jedno $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, že $e = \partial^{(\alpha)}|_m \cdot \mathbf{A}$. Abychom mohli využít služeb tvrzení 2.2.2, musíme ukázat, že přechodová zobrazení jsou hladká.

Nechť tedy $m \in U_\alpha \cap U_\beta$. Ale potom $\partial^{(\beta)}|_m = \partial^{(\alpha)}|_m \cdot \mathbf{J}(m)$, kde $\mathbf{J}$ je Jacobiho matice transformace přechodového zobrazení $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$. Potom přechodové zobrazení trivializace je

$$\begin{aligned} [g_{\alpha\beta}(m)](\mathbf{A}) &= \pi_2 \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m, \mathbf{A})) = \pi_2 \phi_\alpha^{-1}(\partial^{(\beta)}|_m \cdot \mathbf{A}) \\ &= \pi_2 \phi_\alpha^{-1}(\partial^{(\alpha)}|_m \cdot \mathbf{J}(m) \cdot \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{J}(m) \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Vidíme tedy, že přechodová zobrazení působí levou translací prvkem $\mathbf{J}(m)$, který (jako každá Jacobiho matice v atlasu) hladce závisí na m. Z tvrzení 2.2.2 tedy plyne, že existuje unikátní hladká struktura na $F(M)$, která z $\pi : F(M) \to M$ udělá fibrovaný prostor.

Musíme ještě definovat vhodnou akci $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ na $F(M)$. Existuje jediná logická možnost, a tedy $R_{\mathbf{A}}(e) = e \cdot \mathbf{A}$ pro každé $e \in F(M)$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. V každém vlákně tedy definuje pravou akci z příkladu 2.1.8, o které jsme již ukázali, že je tam volná a tranzitivní.

Nakonec najednou ukážeme, že akce je hladká a lokální trivializace $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ je ekvivariantní a tedy tzv. principální. Pro každé $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a $m \in U_\alpha$ máme

$$R_{\mathbf{A}}(\phi_\alpha(m,\mathbf{B})) = \phi_\alpha(m,\mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = ((\partial^\alpha|_m) \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = \phi_\alpha(m, \mathbf{B}.\mathbf{A}). \tag{2.47}$$

To ukazuje ekvivarianci. Zároveň je pravá strana hladká v $(m,\mathbf{B},\mathbf{A})$, a tedy $R : \pi^{-1}(U_\alpha) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ je hladké zobrazení pro každé $\alpha \in I$. $\pi : F(M) \to M$ se nazývá **hlavní fibrace repérů**, nebo známěji v angličtině **frame bundle**.

Cvičení 2.3.11. *Ujasněte si, že lokální řezy $\pi : F(M) \to M$ odpovídají (lokálně definovaným) polím repérů. Dle důsledku 2.3.7 je tedy $F(M)$ trivializovatelný právě tehdy když existuje* globálně definované pole repérů. *Takové varietě se říká **paralelizovatelná**. To nastane například pokud $M = G$ je Lieova grupa.*

2.4 Fundamentální vektorová pole, vertikální podprostor

Následující odstavce fungují pro libovolnou hladkou varietu P s libovolnou pravou akcí $R : P \times G \to P$ Lieovy grupy G. Připomeňme, že **Lieova algebra** $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ Lieovy grupy G je vektorový prostor který ztotožňujeme s tečným prostorem v $e \in G$, tj. $\mathfrak{g} = T_eG$.

$\mathfrak{g}$ je izomorfní podprostoru $\mathfrak{X}_L(G)$ nekonečně-rozměrné Lieovy algebry $\mathfrak{X}(G)$ tvořenému levo-invariantními vektorovými poli. Izomorfismus přiřadí každému $x \in \mathfrak{g}$ příslušné levo-invariantní vektorové pole x^L definované jako

$$x^L|_g = L_{g*}(x) \equiv [T_e(L_g)](x). \tag{2.48}$$

Platí $x^L|_e = x$. Jelikož x^L je vektorové pole jako každé jiné, existují i jeho **integrální křivky**. Jeho integrální křivka $\gamma : \mathbb{R} \to G$ startující v $t = 0$ z bodu e se označuje jako $\gamma(t) \equiv \exp(tx)$, tj.

$$\exp(0 \cdot x) = e, \quad \frac{d}{dt}\exp(tx) = x^L|_{\exp(tx)}. \tag{2.49}$$

Zejména platí, že x je tečné k $\exp(tx)$ v $t = 0$, tj. $x = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\exp(tx)$.

Intuitivně je následující myšlenka velmi jednoduchá. Zvolím si libovolný bod $m \in P$ a libovolný element $x \in \mathfrak{g}$. Ten je tečný ke křivce $\exp(tx)$. Pro každé t se podívám, jak prvek $\exp(tx)$ zapůsobí na bod m, tedy na bod $m \cdot \exp(tx)$. To mi ale definuje novou křivku $t \mapsto m \cdot \exp(tx)$, tentokrát „namalovanou“ ve varietě P. A já se podívám na její tečnu v bodě m, tj. pro $t = 0$. Tím definuji tečný vektor v T_mP:

$$\#x|_m := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} m \cdot \exp(tx). \tag{2.50}$$

Tento postup zopakuji pro každý bod $m \in M$ a dostanu tedy vektorové pole $\#x$. Je to hladké vektorové pole, protože zobrazení $\phi^{\#x} : \mathbb{R} \times M \to M$ definované jako $\phi^{\#x}(t,m) = m \cdot \exp(tx)$ je hladké v m a splňuje všechny vlastnosti toku vektorového pole. Je jasné, že $\phi^{\#x}$ je tokem $\#x$.

Definice 2.4.1. Pro každé $x \in \mathfrak{g}$, $\#x$ se nazývá **fundamentální vektorové pole** prvku x.

Přiřazení fundamentálního vektorového pole $x \mapsto \#x$ můžeme interpretovat jako zobrazení $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$. Často se nazývá **infinitesimální generátor akce** R. Nyní ukážeme, že toto zobrazení má několik zásadních vlastností.

Tvrzení 2.4.2. *Zobrazení $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je lineární. Pro každé m definuje lineární zobrazení $\#_m : \mathfrak{g} \to T_mP$. Vlastnosti tohoto zobrazení odráží lokální vlastnosti akce R:*

(i) Je-li $G_m = \{e\}$, je $\#_m$ monomorfismus.

(ii) Existuje-li otevřené okolí bodu m, kde je akce R tranzitivní, je $\#_m$ epimorfismus.

Důkaz. Připomeňme si orbitové zobrazení $R^{(m)} : G \to P$ definované jako $R^{(m)}(g) = R(m, g) = m \cdot g$. Potom můžeme psát

$$\#_m(x) = \#x|_m = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} m \cdot \exp(tx) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R^{(m)}(\exp(tx)) = R^{(m)}_*(x) \equiv (T_eR^{(m)})(x). \tag{2.51}$$

Ale $R^{(m)}_* : \mathfrak{g} \equiv T_eG \to T_mP$ je jako každý push-forward lineární zobrazení. Tedy $\#|_m$ je lineární.

Nyní ad (i): Za těchto předpokladů je zobrazení $R^{(m)}$ injektivní. Nechť $\#_m(x) = 0$. S využitím toho, že $R^{(m)}(gh) = R^{(m)}(g) \cdot h$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R^{(m)}(\exp(tx)) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} R^{(m)}(\exp((s+t)x)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} R^{(m)}(\exp(sx) \cdot \exp(tx)) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} R_{\exp(tx)}(m \cdot \exp(sx)) = R_{\exp(tx)*}(\#_m(x)) = 0. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Odtud vidím, že $R^{(m)}(\exp(tx)) = R^{(m)}(e)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Z injektivity $\exp(tx) = e$ pro všechny $t \in \mathbb{R}$. Odtud ale $x = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(tx) = 0$. A tedy $\#_m$ je injektivní.

Ad (ii): Nechť R je tranzitivní na okolí $V \ni m$. Potom $H = (R^{(m)})^{-1}(V)$ je otevřená množina splňující, že $R^{(m)}(H) = V$, a tedy $R^{(m)} : H \to V$ je tedy surjektivní hladké zobrazení. Protože $R^{(m)}$ je ekvivariantní, jeho tečné zobrazení $T_hR^{(m)}$ má stejnou hodnost pro každé $h \in H$. Ze surjektivity ale už (netriviálně) plyne, že $T_hR^{(m)}$ má maximální hodnost, tedy je surjektivní pro každé $h \in H$. To platí zejména pro $\#_m \equiv T_eR^{(m)}$. ∎

Důsledek 2.4.3. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s pravou akcí R. Potom je pro každé $p \in P$ zobrazení $\#_p : \mathfrak{g} \to T_pP$ monomorfní.*

Orbity akce R jsou vložené podvariety vláken $\pi^{-1}(m)$. Potom pro každé $p \in P$ a $m = \pi(p)$, $\#_p : \mathfrak{g} \to T_p(\pi^{-1}(m))$ je lineární izomorfismus, tj. tečné prostory k vláknům jsou kanonicky izomorfní $\mathfrak{g}$.

Důkaz. První tvrzení je zřejmé, protože akce R je volná a zbytek plyne z (i). Protože vlákna jsou vložené podvariety a orbity akce R, můžeme akci zúžit na ně. Tam je akce volná a navíc i tranzitivní. Fundamentální vektorová pole jsou tedy tečná k vláknům a jelikož je podél nich akce tranzitivní, z tvrzení (ii) vyplývá, že je $\#|_p : \mathfrak{g} \to T_p(\pi^{-1}(m)) \subseteq T_pP$ je surjektivní. ∎

Jelikož jak $\mathfrak{g}$ tak $\mathfrak{X}(P)$ mají přirozenou strukturu Lieovy algebry, můžeme se ptát, jak moc $\#$ respektuje tuto přidanou strukturu. Nejprve si ale musíme připomenou následující pojem.

Definice 2.4.4. Nechť M a N jsou libovolné hladké variety, $\varphi : M \to N$. Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $Y \in \mathfrak{X}(N)$ jsou hladká vektorová pole. Řekneme, že X a Y jsou **φ-vztažená**[1], pokud

$$\varphi_*(X|_m) = Y|_{\varphi(m)}. \tag{2.53}$$

Píšeme $X \sim_\varphi Y$.

Analýzou odpovídajících lokálních toků lze snadno odvodit následující tvrzení:

Lemma 2.4.5. *Nechť $\varphi : M \to N$ jako v předchozí definici. Nechť $X \sim_\varphi Y$ a $X' \sim_\varphi Y'$. Potom*

$$[X, X'] \sim_\varphi [Y, Y']. \tag{2.54}$$

Explicitně řečeno, pro každé $m \in M$ platí $\varphi_*([X, X']|_m) = [Y, Y']|_{\varphi(m)}$.

S využitím tohoto pozorování je jednoduché dokázat následující důležité tvrzení:

Tvrzení 2.4.6 (Infinitesimální generátor je homomorfismus)**.** *Nechť $R : P \times G \to P$ je pravá akce Lieovy grupy G na varietě P. Potom zobrazení $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je homomorfismus Lieových algeber, tj. pro každé $x, y \in \mathfrak{g}$ platí rovnost*

$$[\#x, \#y] = \#[x, y]_\mathfrak{g}. \tag{2.55}$$

Důkaz. Důkaz je přímou aplikací lemmatu 2.4.5. Nechť $m \in P$ je fixní bod, a nechť $R^{(m)} : G \to M$ je orbitové zobrazení příslušné akci R. Nechť $x \in \mathfrak{g}$ a $x^L \in \mathfrak{X}(G)$. Potom $x^L \sim_{R^{(m)}} \#x$:

$$\begin{aligned} R^{(m)}_*(x^L|_g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R^{(m)}(g\exp(tx)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} m \cdot (g\exp(tx)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (m \cdot g)\cdot\exp(tx) \\ = \#x|_{m\cdot g} = \#x|_{R^{(m)}(g)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Pro libovolné $x, y \in \mathfrak{g}$, $m \in P$ a $g \in G$ tedy dostáváme relaci

$$R^{(m)}_*([x^L, y^L]|_g) = [\#x, \#y]|_{m\cdot g}. \tag{2.57}$$

Dosazením $g = e$ poté uvidíme přesně rovnost (2.55). ∎

Z definice fundamentálních vektorových polí lze očekávat zajímavé chování vůči translacím příslušné akce. Připomeňme si definici **adjungované reprezentace**. Pro každé $g \in G$ máme příslušnou konjugaci $I_g : G \to G$. Platí $I_g(e) = e$. Jelikož $\mathfrak{g} = T_eG$, příslušné tečné zobrazení I_{g*} definuje lineární izomorfismus Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Definujeme $Ad_g(x) := I_{g*}(x)$. Platí

$$Ad_g(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} I_g(\exp(tx)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g\exp(tx)g^{-1}. \tag{2.58}$$

Zároveň ale platí (jako pro každý element $\mathfrak{g}$) rovnice $Ad_g(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tAd_g(x))$. Z jednoznačnosti maximálních integrálních křivek vektorových polí potom plyne následující lemma:

Lemma 2.4.7. *Pro všechny $g \in G$, $x \in \mathfrak{g}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí rovnost*

$$\exp(tAd_g(x)) = g\exp(tx)g^{-1}. \tag{2.59}$$

[1] Někdy též φ-příbuzná.

S využitím tohoto pozorování je již snadné dokázat následující (klíčové) tvrzení:

Tvrzení 2.4.8. *Nechť $R : P \times G \to P$ je pravá akce Lieovy grup G na P a $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je příslušný infinitesimální generátor. Potom pro každé $g \in G$ a $x \in \mathfrak{g}$ platí*

$$R_{g*}(\#x) = \#(Ad_{g^{-1}}(x)). \tag{2.60}$$

Důkaz. Nejprve si zapišme (2.60) v každém bodě $m \in P$. Máme ukázat, že

$$R_{g*}(\#x|_m) = \#(Ad_{g^{-1}}(x))|_{m\cdot g}. \tag{2.61}$$

Začněme přímočarým výpočtem z levé strany.

$$\begin{aligned} R_{g*}(\#x|_m) = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_g(m\cdot\exp(tx)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(m\cdot\exp(tx))\cdot g \\ = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(m\cdot g)\cdot(g^{-1}\exp(tx)g) \\ = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(m\cdot g)\cdot(Ad_{g^{-1}}(x)) = \#(Ad_{g^{-1}}(x))|_{m\cdot g}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

A je to dokázáno, a je to hotovo. ∎

Cvičení 2.4.9. *Nalezněte modifikaci tvrzení 2.4.6 a 2.4.8 pro* levé akce Lieových grup.

Příklad 2.4.10 (Fundamentální vektorová pole na hlavní fibraci repérů)**.** Nechť $P = F(M)$ a $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Zavedeme si nejprve lokální souřadnice na totálním prostoru $F(M)$.

Připomeňme, že lokální trivializaci jsme zavedli s pomocí souřadnic $(U,(x^1,\dots,x^n))$, přičemž trivializační zobrazení $\phi : U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U)$ jsme zavedli jako $\phi(m,\mathbf{A}) = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$, kde $\partial|_m = (\partial_1|_m,\dots,\partial_n|_m) \in \mathcal{E}(T_mM)$ je báze souřadnicových tečných vektorů. Každý bod (bázi nějakého tečného prostoru) $e \in \pi^{-1}(U)$ tedy můžeme jednoznačně popsat pomocí bodu m a matice $\mathbf{A}$, že $e = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$.

Standardní báze $\{E^b_a\}^n_{a,b=1}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n,n}$ matic $n \times n$ se zavede vztahem

$$(E^a_b)^i_j = \delta^a_j \delta^i_b, \tag{2.63}$$

tj. E^a_b je matice co má nuly všude kromě jedničky v průsečíku b-tého řádku a a-tého sloupečku. Potom matici $\mathbf{A}$ můžeme napsat jako $\mathbf{A} = \mathbf{A}^b_a E^a_b$. Vskutku, máme $\mathbf{A}^i_j = \mathbf{A}^b_a (E^a_b)^i_j$. Pro prvek $e = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$ definujeme souřadnicové funkce $x^i : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ a $y^a_b : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ jako

$$x^i(e) := x^i(m), \quad y^a_b(e) := \mathbf{A}^a_b. \tag{2.64}$$

Souřadnicové funkce $x^i : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ a $x^i : U \to \mathbb{R}$ se standardně označují stejným symbolem, přestože jde o funkce na *jiných varietách*. Často budeme psát $y(e) \equiv y^a_b(e) E^b_e$. Snadno se ověří, že $(x^1,\dots,x^n,y^1_1,\dots,y^n_n)$ tvoří lokální souřadnice na $\pi^{-1}(U)$.

Pojďme si spočítat fundamentální vektorová pole pravé akce $R : F(M) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to F(M)$. Připomeňme, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \doteq \mathbb{R}^{n,n}$. Každý element $x \in \mathfrak{g}$ lze tedy zapsat jako $x = x^a_b E^b_a$. Jelikož $\#$ je lineární, stačí spočítat $\#E^a_b$. Nechť $e \in F(M)$ je libovolný bod. Potom

$$\#E^a_b|_e = V^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e + W^c_d \left.\frac{\partial}{\partial y^d_c}\right|_e, \tag{2.65}$$

kde V^i a W^c_d se vypočítají (z definice) jako

$$V^i = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x^i(e \cdot \exp(tE^a_b)), \;\; W^c_d = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} y^c_d(e \cdot \exp(tE^a_b)). \tag{2.66}$$

Jelikož akce působí podél vláken, nemění bod ve kterém se báze nachází. A tedy $V^i = 0$. Pro výpočet druhé komponenty, výraz v závorkách můžeme přepsat jako

$$e \cdot \exp(tE^a_b) = \partial|_m \cdot y(e) \cdot \exp(tE^a_v) = \partial|_m \cdot (\{y(e) \cdot \exp(tE^a_b)\}^k_l E^l_k). \tag{2.67}$$

Z definice souřadnicových funkcí tedy dostáváme výraz

$$y^c_d(e \cdot \exp(tE^a_b)) = \{y(e) \cdot \exp(tE^a_b)\}^c_d \tag{2.68}$$

Derivací v $t = 0$ a s využitím toho, že $\exp(tE^a_b)$ je opravdická maticová exponenciála, dostáváme

$$W^c_d = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{y(e) \cdot \exp(tE^a_b)\}^c_d = \{y(e) \cdot E^a_b\}^c_d = y^c_k(e)(E^a_b)^k_d = \delta^a_d y^c_b(e). \tag{2.69}$$

Nyní jen zbývá dosadit tyto koeficienty a dostaneme

$$\#E^a_b|_e = (\delta^a_d y^c_b(e)) \cdot \frac{\partial}{\partial y^c_d}\Big|_e = y^c_b(e) \cdot \frac{\partial}{\partial y^a_c}\Big|_e . \tag{2.70}$$

Pro zpřehlednění znační budeme používat označení $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ a $\partial^a_b = \frac{\partial}{\partial y^b_a}$. Pečlivě si všímejte polohy indexů v druhé definici. Potom lze psát $\#E^a_b$ (bez indikace konkrétního bodu) jako

$$\#E^a_b = y^c_b \cdot \partial^a_c, \text{ a tedy pro } x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \text{ obecně jako } \#x = x^b_a \#E^a_b = x^b_a \; y^c_b \cdot \partial^a_c. \tag{2.71}$$

Cvičení 2.4.11. *Ověřte explicitním výpočtem, že pro fundamentální pole $\#x$ z předchozího příkladu platí tvrzení 2.4.6 a 2.4.8.*

Pro obecnou akci Lieovy grupy poskytují fundamentální vektorová pole důležité informace o samotné akci. Pro topologicky dostatečně hezké Lieovy grupy G (souvislé a jednoduše souvislé) dokonce kódují celou akci, z pouhé znalosti zobrazení $\#$ lze rekonstruovat celou akci R. Pro naše účely, tj. pro studium hlavních fibrovaných prostorů však plní další užitečnou funkci. V každém bodě totiž generují následující význačný podprostor tečného prostoru totálního prostoru P.

Definice 2.4.12. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou G. Pro každé $p \in P$ definujeme **vertikální tečný podprostor**, jehož elementy nazýváme **vertikální vektory**, jako jádro tečného zobrazení k projekci, tj.

$$\mathrm{Ver}_p(P) = \{X \in T_pP \mid \pi_*(X) = 0\} \equiv \ker(T_p\pi). \tag{2.72}$$

Jelikož π je vždy hladká submerze, máme $\dim(\mathrm{Ver}_p(P)) = \dim P - \dim M$.

Jelikož jednotlivá vlákna $P_m \equiv \pi^{-1}(m)$ jsou vložené podvariety P definované jako vzory jednotlivých bodů báze M (tvz. „level sets“), dá se snadno nahlédnout, že pro každé $p \in P_m$ platí $T_p(P_m) = \ker(T_p\pi) = \mathrm{Ver}_p(P)$. Geometricky je tedy $\mathrm{Ver}_p(P)$ tvořen tečnými vektory, které jsou v daném bodě p *tečné k vláknu fibrace.* V kombinaci s důsledkem 2.4.3 dostáváme následující důležité tvrzení.

Tvrzení 2.4.13. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s akcí R. Nechť $\#$ je infinitesimální generátor R. Potom pro každé $p \in P$, zobrazení $\#_p : \mathfrak{g} \to \mathrm{Ver}_p(P)$ je lineární izomorfismus.*

Definice 2.4.14. Nechť $X \in \mathfrak{X}(P)$ je hladké vektorové pole. Řekneme, že X je **vertikální**, je-li $X|_p \in \mathrm{Ver}_p(P)$ pro všechny $p \in P$.

Upozornění: není pravda, že obecně $X = \#x$ pro nějaké $x \in \mathfrak{g}$. Existují ale unikátní hladké funkce $X^\mu \in C^\infty(P)$, že $X = X^\mu \cdot \#t_\mu$, kde $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ je libovolná báze $\mathfrak{g}$.

Vertikální podprostor má další význačnou vlastnost. Tečné zobrazení k pravé akci zobrazuje vertikální vektory na vertikální, všechny vertikální podprostory podél jednoho vlákna jsou kanonicky izomorfní. Toto je tvrzením následujícího lemmatu:

Lemma 2.4.15. *Pro libovolné $p \in P$ a $g \in G$ platí $R_{g*}(\mathrm{Ver}_p(P)) = \mathrm{Ver}_{p\cdot g}(P)$.*

Důkaz. Tvrzení snadno plyne z vlastnosti $\pi \circ R_g = \pi$. Potom pro $X \in \mathrm{Ver}_p(P)$ platí

$$\pi_*(R_{g*}(X)) = (\pi \circ R_g)_*(X) = \pi_*(X) = 0. \tag{2.73}$$

Odtud plyne inkluze $R_{g*}(\mathrm{Ver}_p(P)) \subseteq \mathrm{Ver}_{p\cdot g}(P)$. Opačná inkluze se ukáže podobně snadno. Pro $Y \in \mathrm{Ver}_{p\cdot g}(P)$ můžeme psát $Y = R_{g*}(R_{g^{-1}*}(Y))$, kde $R_{g^{-1}*}(Y)) \in \mathrm{Ver}_p(P)$ podle již dokázané inkluze. ■

Kapitola 3

Forma konexe

3.1 Formy s hodnotami ve vektorovém prostoru

Při práci s hlavními fibrovanými prostory často narazíme na diferenciální formy, jejichž hodnoty na vektorová pole nejsou hladké funkce do reálných čísel, ale hladké funkce s hodnotami v konečně-rozměrném vektorovém prostoru. Některé ze standardních operací na obyčejných diferenciálních formách lze snadno rozšířit na tuto větší třídu, některé ne.

Definice 3.1.1. Nechť M je hladká varieta. Je-li V libovolný konečně-rozměrný vektorový prostor, řekneme, že ω je **diferenciální p-forma s hodnotami ve** V, je-li

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{p \text{ krát}} \to C^\infty(M, V) \tag{3.1}$$

totálně antisymetrické zobrazení, které je $C^\infty(M)$-lineární v každém vstupu. $C^\infty(M, V)$ označuje modul hladkých funkcí z M do V. Označme prostor takových forem jako $\Omega^p(M, V)$.

Poznámka 3.1.2. Pro $V = \mathbb{R}$ dostaneme prostor obyčejných diferenciálních forem na M.

Podobně jako v případě obyčejných forem můžeme formu „vyčíslit“ v každém bodě $m \in M$. V tomto případě dostáváme p-lineární totálně antisymetrické zobrazení: $\omega|_m : (T_m M)^p \to V$. Ve skutečnosti má prostor $\Omega^p(M, V)$ velmi jednoduchou strukturu. Nechť $\{E_\mu\}_{\mu=1}^{\dim V}$ je libovolná báze vektorového prostoru V. Potom můžeme psát

$$\omega(X_1, \ldots, X_p) = \omega^\mu(X_1, \ldots, X_p) E_\mu. \tag{3.2}$$

Snadno se ověří, že $\omega^\mu \in \Omega^p(M, \mathbb{R}) \equiv \Omega^p(M)$ jsou obyčejné tzv. **komponentní p-formy**. Každou formu $\omega \in \Omega^p(M, V)$ tedy můžeme psát (pro danou bázi jednoznačně) jako $\omega = \omega^\mu E_\mu$.

Tento zápis můžeme používat k zobecnění známých operací na diferenciálních formách:

Definice 3.1.3. Vnější derivace, vnitřní součin a Lieova derivace se definují jako:

$$d\omega = (d\omega^\mu) E_\mu, \quad i_V \omega = (i_V \omega^\mu) E_\mu, \quad \mathcal{L}_V \omega = (\mathcal{L}_V \omega^\mu) E_\mu \tag{3.3}$$

Nechť $A \in \mathrm{End}(V)$ Potom můžeme definovat působení A na $\Omega^p(M, V)$ jako

$$A(\omega) = \omega^\mu A(E_\mu). \tag{3.4}$$

Cvičení 3.1.4. *Ujasněte si, že výše zmíněné definice nezávisí na výběru báze $\{E_\mu\}$ a definují tedy kanonické operace na prostoru forem s hodnotami ve V.*

Pro obecný prostor V neexistuje jednoduchý způsob, jak definovat analog vnějšího součinu. Obecně totiž neumíme z dvojice vektorů ve V vyrobit jeden, a to „bilineárním způsobem“. Pochopitelně existuje situace, kdy to umíme.

Definice 3.1.5. Nechť je V je zároveň algebra, tj. existuje bilineární zobrazení $\cdot : V \times V \to V$. Potom na $\Omega^p(M, V)$ můžeme definovat **vnější součin** předpisem

$$\omega \mathbin{\dot\wedge} \tau = \omega^\mu \wedge \tau^\nu (E_\mu \cdot E_\nu) \tag{3.5}$$

Cvičení 3.1.6. *Ověřte, že definice je nezávislá od výběru báze. Ujasněte si, že pro obecnou algebru není $\dot\wedge$ ani asociativní ani gradovaně antisymetrický.*

Příklad 3.1.7. Ukažme si dva typické příklady kde lze říct něco víc o součinu $\dot\wedge$.

(i) Součin $\cdot$ je asociativní. Potom i $\dot\wedge$ je asociativní. Není-li pochyb o algebře použité ve V, vynecháváme tečku.

Není však gradovaně antisymetrický. To platí pouze pro případ, kdy je $\cdot$ komutativní součin. To je důvod proč vše funguje pro $V = \mathbb{R}$, kde máme komutativní asociativní součin.

(ii) $V = \mathfrak{g}$ je Lieova algebra se závorkou $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}$. V tomto případě se používá značení

$$[\omega \wedge \tau]_\mathfrak{g} \equiv \omega^\mu \wedge \tau^\nu [E_\mu, E_\nu]_\mathfrak{g} \tag{3.6}$$

Součin $[\cdot \wedge \cdot]_\mathfrak{g}$ není asociativní, ale můžeme říct něco o výsledku prohození obou vstupujících forem. Pro $\omega \in \Omega^p(M, \mathfrak{g})$ a $\tau \in \Omega^q(M, \mathfrak{g})$ dostáváme

$$\begin{aligned}[\omega \wedge \tau]_\mathfrak{g} &= \omega^\mu \wedge \tau^\nu [E_\mu, E_\nu]_\mathfrak{g} = (-1)^{pq} \tau^\nu \wedge \omega^\mu [E_\mu, E_\nu]_\mathfrak{g} = (-1)^{pq+1} \tau^\nu \wedge \omega^\mu [E_\nu, E_\mu]_\mathfrak{g} \\ &= (-1)^{pq+1} [\tau \wedge \omega]_\mathfrak{g}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Vidíme, že platí jistá forma gradované antisymetrie, která se ale liší o celkové znaménko! Na rozdíl od běžných forem například pro $\omega \in \Omega^{2k+1}(M, \mathfrak{g})$ obecně neplatí $[\omega \wedge \omega]_\mathfrak{g} = 0$.

Cvičení 3.1.8. *Nalezněte pravidlo pro působení vnější derivace d na vnější součin $\omega \mathbin{\dot\wedge} \tau$.*

3.2 Formy afinní konexe

Nyní si ukážeme, že Christofellovy symboly druhého druhu pro afinní konexe na varietě M lze užitečně interpretovat jako komponenty komponentních forem jistých forem.

Definice 3.2.1. Nechť M je hladká varieta. **Afinní konexí** na M rozumíme $\mathbb{R}$-bilineární zobrazení $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ které pro všechny $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ a $f \in C^\infty(M)$ splňuje

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \quad \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (X.f) Y, \tag{3.8}$$

kde $\nabla_X \equiv \nabla(X, \cdot)$ se nazývá **operátor kovariantní derivace ve směru** X.

Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je libovolné pole repérů definované lokálně na okolí $U \subseteq M$. Připomeňme si, že $e \in \Gamma_U(F(M))$ lze interpretovat jako lokální řez hlavní fibrace repérů. Potom **Christoffelovy symboly druhého druhu** vzhledem k repérovému poli $(e_1, \dots, e_n)$ jsou hladké funkce na U definované vztahem

$$\nabla_{e_a}(e_b) = \Gamma^c_{ba} e_c \tag{3.9}$$

Nejprve je třeba si uvědomit, že Γ^c_{ba} netvoří komponenty tenzoru. Vskutku, nechť e' je jiné repérové pole definované na U'. Potom platí $e' = e \cdot \mathbf{A}$ pro $\mathbf{A} : U \cap U' \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Po dosazení a využití axiomů (3.8) snadno dostaneme vztah

$$\Gamma'^c_{ba} = (\mathbf{A}^{-1})^c_k \mathbf{A}^i_b \mathbf{A}^j_a \Gamma^k_{ij} + (\mathbf{A}^{-1})^c_k \mathbf{A}^i_a (e_i.\mathbf{A}^k_b). \tag{3.10}$$

Vidíme, že Γ^c_{ba} jsou tenzorové v a a c. To nás vede k definici **lokálních 1-forem konexe**:

$$\hat{\omega}^c_b(X) := \langle e^c, \nabla_X e_b \rangle, \tag{3.11}$$

pro všechny $X \in \mathfrak{X}(M)$. Protože ∇_X je $C^\infty(M)$-lineární v X, jsou $\hat{\omega}^c_b \in \Omega^1(U)$. Z definice platí

$$\hat{\omega}^c_b = \Gamma^c_{ba} e^a \tag{3.12}$$

Upozornění: součástí definice $\hat{\omega}^c_b$ je vždy i konkrétní lokální repérové pole $(e_1, \dots, e_n)$. Pokud $\hat{\omega}'^c_b$ jsou lokální 1-formy konexe příslušné repérovému poli $(e'_1, \dots, e'_n)$, dostáváme vztah

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'^c_b &= (\mathbf{A}^{-1})^c_k \, \hat{\omega}^k_i \, \mathbf{A}^i_b + (\mathbf{A}^{-1})^c_k (e_i.\mathbf{A}^k_b) e^i \\ &= (\mathbf{A}^{-1})^c_k \, \hat{\omega}^k_i \, \mathbf{A}^i_b + (\mathbf{A}^{-1})^c_k \, d\mathbf{A}^k_b. \end{aligned} \tag{3.13}$$

platný na průniku $U \cap U'$. Vidíme, že relace připomínají součiny matic. Proč z toho tedy skutečné součiny matic neudělat? Nechť $\{E^b_a\}^n_{a,b=1}$ je standardní báze $\mathbb{R}^{n,n} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Definujeme (jednu) **lokální 1-formu konexe** $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ vztahem

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}^c_b E^c_b. \tag{3.14}$$

Jinými slovy, $\hat{\omega}^c_b$ tvoří komponentní 1-formy $\hat{\omega}$. Samotnou transformační funkci $\mathbf{A} : U \cap U' \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ lze interpretovat jako 0-formu s hodnotami v $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^c_b E^b_c$, a tedy $\mathbf{A} \in \Omega^0(U \cap U', \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$. Potom lze transformační vztah (3.13) přepsat jednoduše jako

$$\hat{\omega}' = \mathbf{A}^{-1} \hat{\omega} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} d\mathbf{A}. \tag{3.15}$$

Zatím vypadá přepis globálně definované kovariantní derivace do lokálně definovaných objektů $\hat{\omega}$ jako čistý formalismus, byť umíme přepsat transformační vlastnosti Christoffelových symbolů pomocí elegantní rovnice. To se však změní ze zavedení **lokálních forem křivosti a torze**:

$$\hat{\Omega}^c_d(X, Y) = \langle e^c, R(X, Y) e_d \rangle, \;\; \hat{T}^c(X, Y) = \langle e^c, T(X, Y) \rangle. \tag{3.16}$$

Z kterých opět uděláme formy s hodnotami ve vektorových prostorech. Nechť $\{E_a\}^n_{a=1}$ je standardní báze v $\mathbb{R}^n$. Potom $\hat{\Omega} \in \Omega^2(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ a $\hat{T} \in \Omega^2(U, \mathbb{R}^n)$ definujeme vztahem:

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^c_d E^d_c, \;\; \hat{T} = \hat{T}^c E_c. \tag{3.17}$$

Jelikož R a T jsou z definice tenzory, snadno se odvodí transformační pravidla

$$\hat{\Omega}' = \mathbf{A}^{-1} \hat{\Omega} \mathbf{A}, \;\; \hat{T}' = \mathbf{A}^{-1} \hat{T}, \tag{3.18}$$

kde na pravé straně matice $\mathbf{A}^{-1}$ působí na sloupečky v $\mathbb{R}^n$, kde má hodnoty forma $\hat{T}$. Vztahy mezi konexí ∇ a jejími tenzory křivosti R a torze T se dají velmi elegantně zapsat pomocí příslušných lokálních forem.

Tvrzení 3.2.2 (Cartanovy strukturní rovnice)**.** *Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je pole repérů na U, a nechť $\hat{\omega}$ jsou odpovídající lokální formy konexe na U. Potom platí rovnice*

$$\hat{\Omega}^a_b = d\hat{\omega}^a_b + \hat{\omega}^a_c \wedge \hat{\omega}^c_b \tag{3.19}$$

$$\hat{T}^a = de^a + \hat{\omega}^a_b \wedge e^b, \tag{3.20}$$

kde $\{e^a\}_{a=1}^n \subseteq \Omega^1(U)$ je odpovídající duální repérové pole. Můžeme definovat $e^{\#} \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^n)$ vztahem $e^{\#} = e^a E_a$ a obě rovnice přepsat v řeči forem s hodnotami ve vektorovém prostoru:

$$\hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}, \tag{3.21}$$

$$\hat{T} = de^{\#} + \hat{\omega} \wedge e^{\#}. \tag{3.22}$$

Důkaz. Dokážeme si jen druhou z rovnic, první rovnici lze ukázat úplně analogicky s pomocí definice operátoru křivosti R. Abychom dokázali rovnici číslo dvě, použijeme standardní formulku pro vnější derivaci a vyjdeme z pravé strany:

$$\begin{aligned} de^a(X,Y) &= X.e^a(Y) - Y.e^a(X) - e^a([X,Y]) \\ &= \langle \nabla_X e^a, Y\rangle - \langle \nabla_Y e^a, X\rangle \\ &\quad + e^a(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]), \end{aligned} \tag{3.23}$$

kde jsme použili definici kovariantní derivace 1-formy: $\langle \nabla_X \alpha, Y\rangle = X.\langle \alpha, Y\rangle - \alpha(\nabla_X Y)$. Nyní si stačí uvědomit, že kovariantní derivace e^a lze vyjádřit pomocí lokálních forem konexe jako

$$\nabla_X e^a = -\hat{\omega}^a_b(X) e^b. \tag{3.24}$$

To lze snadno uvidět třeba z vyjádření kovariantní derivace 1-formy pomocí Christoffelových symbolů. Po dosazení tedy dostáváme

$$de^a(X,Y) = -\hat{\omega}^a_b(X)e^b(Y) + \hat{\omega}^a_b(Y)e^b(X) + \hat{T}^a(X,Y). \tag{3.25}$$

Toto je ale přesně kýžená Cartanova strukturní rovnice. ■

Proč jsou tyto rovnice užitečné? Okamžitě vidím, že musí existovat nějaké důsledky těchto rovnic, protože $d^2 = 0$. Jejich odvození je triviální, přesto mají zásadní důsledky pro obecnou teorii relativity.

Důsledek 3.2.3 (Bianchiho identity)**.** *Pro libovolnou konexi ∇ platí **Bianchiho identity**:*

$$d\hat{\Omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \wedge \hat{\omega} = 0 \tag{3.26}$$

$$\hat{\Omega} \wedge e^{\#} - \hat{\omega} \wedge \hat{T} = d\hat{T}. \tag{3.27}$$

Důkaz. Ukážeme si jen první z rovnic, druhá je analogická. Z první z Cartanových strukturních rovnic dostáváme zapůsobením d a využitím $d^2 = 0$ rovnici

$$\begin{aligned} d\hat{\Omega} &= d(\hat{\omega} \wedge \hat{\omega}) = d\hat{\omega} \wedge \hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge d\hat{\omega} = (\hat{\Omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}) \wedge \hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge (\hat{\Omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}) \\ &= \hat{\Omega} \wedge \hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\Omega}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

To je ale přesně první z rovnic nahoře. ■

Na první pohled nepřipomínají nic známého, ale název napovídá, že odpovídají známým identitám pro Riemannovy tenzory křivostí. První z nich platí pro libovolnou konexi:

$$R_{ab[cd;e]} = 0. \tag{3.29}$$

Druhá se zjednoduší pro konexe s nulovou torzí a dává $R_{a[bcd]} = 0$.

3.3 Forma konexe na hlavním fibrovaném prostoru

V této sekci si definujeme fundamentální objekt teorie hlavních fibrovaných prostorů, tzv. formu konexe. Jelikož její definice může na první pohled vypadat neprůhledně, budeme si její vlastnosti v první řadě demonstrovat na příkladu $P = F(M)$.

Nechť $(f_1, \dots, f_n) \in \Gamma_U(F(M))$ je pole repérů na okolí U. Nechť $\pi : F(M) \to M$ je hlavní fibrace repérů. Na $\pi^{-1}(U) \subseteq F(M)$ můžeme zavést funkce $y^a_b : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ podobně jsme zaváděli lokální souřadnice (označené stejně), tj. každý bod $e \in \pi^{-1}(U)$ odpovídající bázi $(e_1, \dots, e_n)$ v tečném prostoru T_mM pro $m = \pi(e)$ lze nakombinovat jako

$$e_a = y^b_a(e) \cdot (f_b)|_m. \tag{3.30}$$

Snadno se ověří, že $y^a_b : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ jsou hladké funkce, můžeme je používat jako lokální souřadnice na $F(M)$ společně se souřadnicemi na okolí v U v bázové varietě $(x^1, \dots, x^n)$.

Nechť ∇ je afinní konexe na M a $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ je lokální forma konexe příslušná poli repérů $(f_1, \dots, f_n)$. Definujeme si nyní lokální 1-formu ω nahoře, tj. na $\pi^{-1}(U) \subseteq F(M)$ jako

$$\omega^a_b|_e = (y^{-1})^a_c(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}^c_d)|_e \cdot y^d_b(e) + (y^{-1})^a_c(e) \cdot dy^c_b|_e, \tag{3.31}$$

kde y^a_b jsou funkce definované pomocí (3.30). Klíčové je nyní následující pozorování.

Tvrzení 3.3.1. *Nechť $(f'_1, \dots, f'_n)$ je libovolné jiné pole repérů na okolí U', a nechť $\hat{\omega}'$ je příslušná lokální forma konexe. Je-li $\omega' \in \pi^{-1}(U')$ definovaná jako (3.31). Potom na $\pi^{-1}(U \cap U')$ platí*

$$\omega' = \omega. \tag{3.32}$$

Zejména nezávisí na konkrétním výběru pole repérů při konstrukci ω. Jelikož definičními obory lokálních řezů můžeme pokrýt M, dostáváme $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$, tzv. ***globální formu afinní konexe*** *.*

Důkaz. Na $U \cap U'$ dostáváme $\mathbf{A} : U \cap U' \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, že $f'|_m = f|_m \cdot \mathbf{A}(m)$ pro všechny $m \in U \cap U'$. Potom dostáváme vztah

$$e = f|_m \cdot y(e) = f'|_m \cdot y'(e) = f|_m \cdot \mathbf{A}(m) \cdot y'(e). \tag{3.33}$$

Odtud tedy $y(e) = \mathbf{A}(\pi(e)) \cdot y'(e)$ pro všechny $e \in \pi^{-1}(U \cap U')$. Nyní už můžeme dosadit:

$$\begin{aligned}
\omega|_e &\equiv y^{-1}(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}|_{\pi(e)}) \cdot y(e) + y^{-1}(e) \cdot dy|_e \\
&= y'^{-1}(e) \cdot \pi^*((\mathbf{A}^{-1}\hat{\omega}\mathbf{A})|_{\pi(e)}) \cdot y'(e) \\
&\quad + y'^{-1}(e) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\pi(e)) \cdot d(\mathbf{A}(\pi(e)) \cdot y'(e)) \\
&= y'^{-1}(e) \cdot \pi^*(\{\mathbf{A}^{-1}\hat{\omega}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A}\}|_{\pi(e)}) \cdot y'(e) \\
&\quad + y'^{-1}(e) \cdot dy'|_e \\
&= y'^{-1}(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}'|_{\pi(e)}) \cdot y'(e) + y'^{-1}(e) \cdot dy'|_e \equiv \omega'|_e.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Toto dokazuje naše tvrzení. Je jasné, že můžeme M pokrýt definičními obory lokálních řezů - uvažujme třeba souřadnicová repérová pole. ∎

Není překvapivé, že globálnímu objektu (afinní konexe ∇) nakonec odpovídá globální objekt (místo M na $F(M)$). Můžeme se ptát, jestli jsme neztratili výrobou globálního objektu ω nějaké informace obsažené v $\hat{\omega}$, tj. zdali umíme vyrobit nazpět konexi ∇ z ω. Částečnou odpověď dává následující lemma:

Lemma 3.3.2. *Je-li $f = (f_1, \dots, f_n)$ libovolné lokální pole repérů na okolí $U \subseteq M$, můžeme f interpretovat jako hladký lokální řez $\sigma \in \Gamma_U(F(M))$, tj. $\sigma : U \to F(E)$ s vlastností $\pi \circ \sigma = 1_U$. Zde $\sigma(m) = (f_1|_m, \dots, f_n|_m) \in F_m(M)$. Nechť $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ je globální forma afinní konexe ∇. Potom $\hat{\omega}$ definované vztahem*

$$\hat{\omega} = \sigma^*(\omega) \tag{3.35}$$

definuje právě lokální formu konexe $\hat{\omega}$ příslušnou repérovému poli $(f_1, \dots, f_n)$.

Důkaz. Jelikož definice ω byla nezávislá od výběru repérového pole, můžeme si vybrat právě to naše odpovídající σ, tj. $\omega|_e = y^{-1}(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}) \cdot y(e) + y^{-1}(e) \cdot dy|_e$, kde $\hat{\omega}$ je lokální forma konexe odpovídající $(f_1, \dots, f_n)$ a $y : \pi^{-1}(U) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ jsou definované (3.30). K výpočtu budeme potřebovat znát zejména hodnotu $y(\sigma(m))$ pro $m \in U$. Ale $y(\sigma(m))$ řeší rovnici

$$f|_m \equiv \sigma(m) = f|_m \cdot y(\sigma(m)). \tag{3.36}$$

Odtud $y(\sigma(m)) = \mathbf{1}$. Zejména tedy $\sigma^*(dy|_{\sigma(m)}) = d(y \circ \sigma)|_m = 0$. Potom dostáváme

$$\sigma^*(\omega|_{\sigma(m)}) = y^{-1}(\sigma(m)) \cdot \sigma^*(\pi^*(\hat{\omega}|_m)) \cdot y(\sigma(m)) = \hat{\omega}|_m. \tag{3.37}$$

Což bylo dokázati pro každý bod $m \in U$. ∎

Vidíme tedy, že z formy ω *velice snadno* dostaneme lokální formy konexe v libovolném poli repérů, máme na to přímou formulku. Lokální formy konexe ≡ Christoffelovy symboly v daném poli repérů. Ne každá forma $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ ovšem odpovídá formě afinní konexe ∇ na M. Nyní si ukážeme dvě její charakteristické vlastnosti, které o tom rozhodují.

Tvrzení 3.3.3 (Charakteristické vlastnosti formy konexe)**.** *Nechť $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ je (globální) forma afinní konexe sestrojená pomocí (3.31). Potom platí následující:*

(i) Nechť $\#x \in \mathfrak{X}(F(M))$ je fundamentální vektorové pole příslušné $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ Potom

$$\omega(\#x) = x, \text{ neboli } \omega^a_b(\#x) = x^a_b, \tag{3.38}$$

kde $x = x^a_b E^b_a$ je rozklad do standardní báze.

(ii) Nechť $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, a symbol $R_{\mathbf{A}}(e) = e \cdot \mathbf{A}$ nechť označuje pravou akci. Potom

$$R^*_{\mathbf{A}}(\omega) = \mathbf{A}^{-1}\omega\mathbf{A} \equiv Ad_{\mathbf{A}^{-1}}(\omega). \tag{3.39}$$

Důkaz. Ad (i): Ukázali jsme, že generátor $\#x$ má pro $F(M)$ explicitní tvar

$$\#x|_e = x^a_b \#E^b_a = \#x|_e = x^a_b y^c_a(e) \cdot \partial^b_c|_e. \tag{3.40}$$

Navíc už víme, že generátory generují vertikální podprostor $\mathrm{Ver}_e(F(M))$, tj. $\pi_*(\#x|_e) = 0$. Odtud dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} \omega^a_b(\#x) &= y^a_c \langle \pi^*(\hat{\omega}^c_d), \#x \rangle y^d_b + (y^{-1})^a_c \langle dy^c_b, x^k_l y^m_k \partial^l_m \rangle \\ &= 0 + (y^{-1})^a_c x^k_l y^m_k \delta^c_m \delta^l_b = (y^{-1})^a_c y^c_k x^k_b = x^a_b. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Což je přesně komponentní vyjádření tvrzení (i).

Ad (ii): Tady si stačí uvědomit, že funkce $y : U \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ použité v definici ω jsou ekvivariantní, tj. $y(R_{\mathbf{A}}(e)) = y(e)\cdot\mathbf{A}$ pro každé $\mathbf{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a $e\in\pi^{-1}(U)$. Pozor - zde $\mathbf{A}$ nejsou funkce, ale fixní invertibilní matice! Potom

$$\begin{aligned} R^*_{\mathbf{A}}(\omega|_{e\cdot\mathbf{A}}) &= y(e\cdot\mathbf{A})^{-1}\cdot R^*_{\mathbf{A}}(\pi^*(\hat\omega|_{\pi(e\cdot\mathbf{A})}))\cdot y(e\cdot\mathbf{A}) + y(e\cdot\mathbf{A})^{-1}\cdot R^*_{\mathbf{A}}(dy|_{e\cdot\mathbf{A}}) \\ &= \mathbf{A}^{-1}\cdot\{y(e)^{-1}\pi^*(\hat\omega|_{\pi(e)})\cdot y(e)\cdot\mathbf{A} + y(e)^{-1}\cdot d(y\circ R_{\mathbf{A}})|_e\}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

kde jsme použili $\pi\circ R_{\mathbf{A}} = \pi$. Lze si snadno rozmyslet, že $d(y\circ R_{\mathbf{A}})|_e = dy|_e\cdot\mathbf{A}$. Po dosazení

$$\begin{aligned} R^*_{\mathbf{A}}(\omega|_{e\cdot\mathbf{A}}) &= \mathbf{A}^{-1}\cdot\{y(e)^{-1}\cdot\pi^*(\hat\omega|_{\pi(e)})\cdot y(e) + y^{-1}\cdot dy|_e\}\cdot\mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^{-1}\omega|_e\mathbf{A} = Ad_{\mathbf{A}^{-1}}(\omega|_e). \end{aligned} \tag{3.43}$$

A máme to dokázané! Hurá. ■

Nyní si bez důkazu vyslovíme tvrzení, které dokážeme později v mnohem obecnější podobě.

Tvrzení 3.3.4. *Nechť $\omega\in\Omega^1(F(M),\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ je libovolná 1-forma splňující (3.38) a (3.39).*

Potom ω definuje unikátní afinní konexi na M, kde příslušné lokální formy konexe (a tedy Christoffelovy symboly v bázi libovolných polích repérů) získáváme formulí (3.35).

Nyní se můžeme bez obav vrátit k obecnému hlavnímu fibrovanému prostoru $\pi : P\to M$ se strukturní grupou G a její příslušnou Lieovou algebrou $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Vidíme, že vlastnosti (3.38, 3.39) mají stále perfektní smysl. To nás přivádí k následující definici (a terminologii):

Definice 3.3.5. Nechť $\pi : P\to M$ je hlavní fibrovaný G-prostor a $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Potom 1-formu $A\in\Omega^1(P,\mathfrak{g})$ nazýváme **formou konexe na hlavním fibrovaném prostoru**, pokud splňuje následující podmínky:

(i) $A(\#x) = x$ pro každé $x\in\mathfrak{g}$, kde $\# : \mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(P)$ je infinitesimální generátor akce G na P.

(ii) Je to tzv. Ad-ekvivariantní forma, tj. pro každé $g\in G$ musí platit

$$R^*_g(A) = Ad_{g^{-1}}(A). \tag{3.44}$$

Že nejde o prázdný pojem lze snadno ukázat pomocí geometrické interpretace v následující kapitole. Zatím se spokojíme s tím, že lze ukázat, že na každém hlavním fibrovaném prostoru existuje alespoň jedna forma konexe. Pro budoucí účely si ukažme jeden snadný důsledek definice.

Lemma 3.3.6. *Nechť $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ je libovolná báze $\mathfrak{g}$. Nechť $A\in\Omega^1(P,\mathfrak{g})$ je forma konexe. Nechť $A^\mu\in\Omega^1(P)$ jsou komponentní 1-formy A, tj. $A = A^\mu t_\mu$. Potom $(A^1_p,\dots,A^{\dim\mathfrak{g}}_p)$ tvoří lineárně nezávislý soubor forem v T^*_pP pro každé $p\in P$.*

Důkaz. Nechť $\{\lambda_\mu\}_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ jsou konstanty, že $\lambda_\mu A^\mu_p = 0$. Z definice konexe dostáváme vztah $A^\mu(\#x) = t^\mu(x)$. Máme tedy

$$0 = (\lambda_\mu A^\mu_p)(\#_p(t_\nu)) = \lambda_\mu t^\mu(t_\nu) = \lambda_\nu. \tag{3.45}$$

To dokazuje lineární nezávislost souboru. ■

Záhy uvidíme, že tento technický detail je klíčový pro geometrickou interpretace formy konexe.

Kapitola 4

Horizontální distribuce a zdvih

4.1 Hladké distribuce a jejich integrabilita

Nechť M je hladká varieta. V každém bodě $m \in M$ můžeme vybrat nějaký k-rozměrný podprostor $D_m \subseteq T_m M$. Potom D se nazývá **k-rozměrná distribuce** v M. Pochopitelně nás zajímají takové distribuce, kde závislost D_m na bodu m je v nějakém smyslu hladká.

Definice 4.1.1. Nechť D je k-rozměrná distribuce v M. Řekneme, že D je **hladká**, pokud pro každý bod $m \in M$ existuje okolí $U \ni m$ a k-tice vektorových polí $(V_1, \dots, V_k)$ definovaných na okolí U, takových, že $D_n = \mathbb{R}\{V_1|_n, \dots, V_k|_n\}$ pro všechny $n \in U$. Říkáme, že $(V_1, \dots, V_k)$ lokálně generuje D.

Příklad 4.1.2. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Potom $D_p = \mathrm{Ver}_p(P)$ je k-rozměrná distribuce v P, kde $k = \dim \mathfrak{g}$. Stačí si zvolit bázi $\{t_\mu\}_{\mu=1}^k$. Potom $(V_1, \dots, V_k) = (\#t_1, \dots, \#t_k)$ lokálně generuje D. $\mathrm{Ver}(P)$ se nazývá **vertikální distribuce v** P.

Jedním z nejčastějších způsobů zadání podprostoru vektorového prostoru je jako množina řešení soustavy homogenních lineárních rovnic. Nejinak je tomu v případě hladkých distribucí.

Tvrzení 4.1.3. *Nechť $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ je soubor q 1-forem na varietě M lineárně nezávislých v $m \in M$, tj. $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ a rovnice $\lambda^i \alpha_i|_m = 0$ implikuje $\lambda_1 = \cdots = \lambda_q = 0$. Definujeme*

$$D_m = \bigcap_{i=1}^{q} \ker(\alpha_i|_m) \subseteq T_m M. \tag{4.1}$$

Potom D je hladká $(n-q)$-rozměrná distribuce na M.

Důkaz. Protože $(\alpha_1|_m, \dots, \alpha_q|_m)$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě, lokálně lze na nějakém okolí U najít lokální korepérové pole $(e^1, \dots, e^n)$, že $e^i|_m = \alpha_i|_m$ pro $1 \le i \le q$ a všechny $m \in U$. Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je příslušné duální pole repérů. Potom zřejmě $D_m = \mathbb{R}\{e_{q+1}|_m, \dots, e_n|_m\}$ pro všechny $m \in U$. Vidíme, že soubor $(e_{q+1}, \dots, e_n)$ lokálně generuje D a tedy D je hladká distribuce. ∎

Poznámka 4.1.4. Často tvoří $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ komponentní 1-formy pro $\alpha \in \Omega^1(M, V)$, kde V je q-rozměrný prostor s bází $\{E^\mu\}_{\mu=1}^q$ a $\alpha = \alpha_\mu E^\mu$. Potom můžeme psát $D_m = \ker(\alpha|_m)$, tj.

$$D_m = \{X \in T_m M \mid \alpha|_m(X) = 0\}. \tag{4.2}$$

Připomeňme si, že je-li $N \subseteq M$ libovolná vnořená k-rozměrná podvarieta M, identifikujeme pro každé $n \in N$ tečný prostor T_nN s k-rozměrným podprostorem tečného prostoru T_nM. Můžeme se ptát, jestli pro zadanou k-rozměrnou hladkou distribuci D náhodou nevznikne podprostor $D_m \subseteq T_mM$ právě tímto způsobem.

Definice 4.1.5. Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce. Řekneme, že vnořená podvarieta $N \subseteq M$ je **integrální podvarieta distribuce** D, pokud pro všechny $n \in N$ platí $T_nN = D_n$. Řekneme, že distribuce D je integrabilní, pokud každý bod $m \in M$ je obsažen v nějaké integrální podvarietě D.

Příklad 4.1.6. Uvažujme vertikální distribuci $\mathrm{Ver}(P)$. Vlákna $P_m = \pi^{-1}(m)$ tvoří integrální podvariety, protože jsme ukázali, že pro $p \in P_m$ platí $\mathrm{Ver}_p(P) = T_p(P_m)$. Jelikož každý bod $p \in P$ je v nějakém vlákně, vertikální distribuce je integrabilní.

Ověřovat integrabilitu z definice by bylo velmi nepohodlné. Naštěstí se ukazuje, že existuje snadné ověření přímým výpočtem.

Definice 4.1.7. Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce. Řekneme, že vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(U)$ pro $U \subseteq M$ je **lokální řez distribuce** D, pokud pro všechny $m \in U$ platí $X|_m \in D_m$. Řekneme, že D je **involutivní distribuce**, pokud pro každé dva její lokální řezy $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ je i komutátor $[X, Y]$ lokální řez D. Tj. $[X, Y]|_m \in D_m$ pro každé $m \in U$.

Ověřit involutivitu distribuce bývá většinou snadné díky následujícímu tvrzení.

Tvrzení 4.1.8. *Nechť D je k-rozměrná hladká distribuce. Potom D je involutivní právě tehdy když pro každý bod existuje soubor $(V_1, \ldots, V_k)$ lokálně generující D na okolí U tohoto bodu, splňující podmínku $[V_i, V_j]|_m \in D_m$ pro každý bod $m \in U$ a dvojici indexů $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.*

Cvičení 4.1.9. *Rozmyslete si důkaz předchozího tvrzení. Návod: Leibnizovo pravidlo.*

Jakákoliv integrabilní distribuce je příkladem involutivní distribuce.

Tvrzení 4.1.10. *Každá hladká integrabilní k-rozměrná distribuce je involutivní.*

Důkaz. Nechť $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ jsou libovolné dva lokální řezy integrabilní distribuce D. Nechť $m \in U$ je libovolný bod. Potom existuje integrální podvarieta $N \subseteq M$, že $m \in N$ a $D_n = T_nN$. Zejména tedy $X|_n, Y|_n \in T_nN$ pro všechny $n \in N \cap U$. Nechť $i : N \to M$ je příslušné vnoření. S troškou diferenciální geometrie se dá ukázat, že existují hladká vektorová pole $X', Y' \in \mathfrak{X}(N \cap i^{-1}(U))$, taková, že $X' \sim_i X$ a $Y' \sim_i Y$ jsou i-vztažená. Potom dle Lemma 2.4.5 platí relace $[X', Y'] \sim_i [X, Y]$, neboli $[X, Y]|_{i(n)} = i_*([X', Y']|_n)$. V původní „podmnožinové“ notaci ale identifikujeme n s jeho obrazem $i(n) \in M$ a tečný podprostor T_nN s jeho obrazem $i_*(T_nN) \subseteq T_{i(n)}M$. Předchozí rovnost tedy říká $[X, Y]|_n \in T_nN = D_n$ pro všechny $n \in N \cap U$. Speciálně pro $n = m$ a D je tedy involutivní. ∎

Můžeme se tedy ptát, jestli náhodou existují hladké distribuce, které jsou involutivní, ale nikoliv integrabilní. Odpovědí je jednoznačné ne! Důkaz je zcela nad rámec této přednášky :)

Věta 4.1.11 (Frobenius)**.** *Každá hladká involutivní k-rozměrná distribuce je integrabilní.*

Je zajímavé, že důkaz dává konstruktivní návod na konstrukci integrálních podvariet.

Příklad 4.1.12. Lze snadno ukázat, že $\mathrm{Ver}(P)$ je involutivní distribuce. Ukázali jsme, že za její lokální generátory můžeme vzít soubor $(\#t_1, \dots \#t_k)$. Protože platí

$$[\#t_\mu, \#t_\nu] = \#\{[t_\mu, t_\nu]_\mathfrak{g}\} = c^\kappa_{\mu\nu} \#t_\kappa, \tag{4.3}$$

je podle tvrzení 4.1.8 distribuce $\mathrm{Ver}(P)$ involutivní.

Předpokládejme, že máme D zadanou pomocí q-tice lineárně nezávislých forem $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ jako v tvrzení 4.1.3. Konstruovat lokální generátory a ověřovat involutivitu je příliš komplikované. Bylo by tedy mnohem snazší ověřovat přímo vlastnosti forem $\alpha_i \in \Omega^1(M)$. A ono to jde.

Tvrzení 4.1.13. *Nechť D je zadaná jako v tvrzení 4.1.3.*

Potom D je involutivní právě tehdy když $d\alpha_i(X, Y) = 0$ pro každé $1 \leq i \leq q$ a pro každou dvojici lokálních řezů $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ distribuce D.

Důkaz. Nechť $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ jsou libovolná vektorová pole. Potom

$$d\alpha_i(X, Y) = X.\alpha_i(Y) - Y.\alpha_i(X) - \alpha_i([X, Y]). \tag{4.4}$$

Pro dva lokální řezy dostáváme $\alpha_i(X) = \alpha_i(Y) = 0$ a tedy rovnost $d\alpha_i(X, Y) = -\alpha_i([X, Y])$ na okolí U. Z definice snadno vidíme, že involutivita D je ekvivalentní nulovosti pravé, a tedy i levé strany. A máme dokázáno. ■

4.2 Horizontální distribuce

Na konci předchozí kapitoly jsme v zdánlivě nedůležitém lemmatu 3.3.6 ukázali, že pro formu konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ dostáváme q-tici lineárně nezávislých forem $(A^1, \dots, A^q)$, kde $q = \dim \mathfrak{g}$ a $A^\mu \in \Omega^1(P)$ jsou komponentní formy A v bázi $\{t_\mu\}_{\mu=1}^q$ algebry $\mathfrak{g}$, tj. $A = A^\mu t_\mu$. Vzhledem k tvrzení 4.1.3 nás tedy napadne následující definice:

Definice 4.2.1. Nechť $p \in P$ je libovolný bod hlavního fibrovaného prostoru $\pi : P \to M$. Potom

$$\mathrm{Hor}_p(P) = \{X \in T_pP \mid A|_p(X) = 0\} \subseteq T_pP \tag{4.5}$$

nazýváme **horizontální tečný podprostor v bodě** p.

Tvrzení 4.2.2 (Charakteristické vlastnosti horizontální distribuce)**.** *Nechť $\mathrm{Hor}_p(P)$ je horizontální tečný podprostor příslušný dané formě konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Potom*

*(i) Přiřazení $D_p = \mathrm{Hor}_p(P)$ definuje hladkou $(n - \dim \mathfrak{g})$-rozměrnou distribuci v P, kterou budeme nazývat **horizontální distribucí příslušnou konexi** A.*

(ii) Horizontální podprostor je komplementární k vertikálnímu podprostoru, tj.

$$T_pP = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus \mathrm{Hor}_p(P) \tag{4.6}$$

pro každý bod $p \in P$. Odtud je zřejmý původ názvosloví. Díky tomuto rozkladu máme rovněž jednoznačně určené projektory $\mathrm{ver} : T_pP \to \mathrm{Ver}_p(P)$ a $\mathrm{hor} : T_pP \to \mathrm{Hor}_p(P)$.

(iii) Horizontální podprostor se chová přirozeně vzhledem k pravé akci grupy G, přesněji

$$R_{g*}(\mathrm{Hor}_p(P)) = \mathrm{Hor}_{p \cdot g}(P) \tag{4.7}$$

*pro každé $p \in P$ a $g \in G$. Řekneme, že horizontální distribuce je **G-invariantní.***

Důkaz. Ad (i): Pro libovolnou bázi $\{t_\mu\}_{\mu=1}^q$ můžeme definici $\mathrm{Hor}_p(P)$ přepsat jako $\mathrm{Hor}_p(P) = \cap_{\mu=1}^q \ker(A^\mu)$. Zbytek plyne z tvrzení 4.1.3.

Ad (ii): Už víme, že $\mathrm{Ver}_p(P)$ je q-rozměrný podprostor isomorfní algebře $\mathfrak{g}$, zatímco $\mathrm{Hor}_p(P)$ je $(n-q)$-rozměrný podprostor. Stačí tedy ukázat, že $\mathrm{Ver}_p(P) \cap \mathrm{Hor}_p(P) = \{0\}$. Nechť $X \in T_pP$ je z tohoto průniku. Ukázali jsme, že každý vertikální vektor lze v bodě p psát jako $X = \#_p(x)$ pro unikátní $x \in \mathfrak{g}$. Ale protože X je i horizontální, dostáváme $0 = A|_p(X) = A|_p(\#x) = x$.

Ad (iii): Nechť $X \in \mathrm{Hor}_p(P)$. Pro každé $g \in G$ dostáváme

$$A|_{p\cdot g}(R_{g*}(X)) = (R_g^*(A|_{p\cdot g}))(X) = (Ad_{g^{-1}}(A|_p)(X) = Ad_{g^{-1}}(A|_p(X)) = 0. \tag{4.8}$$

Odtud plyne inkluze $R_{g*}(\mathrm{Hor}_p(P)) \subseteq \mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P)$. Protože oba mají prostory mají stejnou dimenzi a R_{g*} je lineární izomorfismus, jsme hotoví. ∎

Vidíme, že pro důkaz charakteristických vlastností horizontální distribuce jsme využili právě obě charakteristické vlastnosti A z definice 3.3.5. To nás přivádí na myšlenku, že ve skutečnosti každá distribuce splňující (4.6, 4.7) by mohla pocházet z nějaké formy konexe A. Následují tvrzení ukazuje, že oba pohledy jsou plně ekvivalentní.

Tvrzení 4.2.3 (Konexe jsou horizontální distribuce)**.** *Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce v P splňující podmínky*

$$T_pP = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus D_p, \quad R_{g*}(D_p) = D_{p\cdot g}. \tag{4.9}$$

Potom existuje právě jedna forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, že $D_p = \mathrm{Hor}_p(P)$.

Důkaz. Definujeme lineární zobrazení $A|_p : T_pP \to \mathfrak{g}$. a ukážeme, že definuje hladkou 1-formu se správnými vlastnostmi. Jelikož $\mathrm{Ver}_p(P) = \{\#x|_p \mid x \in \mathfrak{g}\}$ a D_p má být horizontální podprostor, máme jedinou možnost jak $A|_p$ definovat, tj.

$$A|_p(\#x|_p) = x, \quad A|_p(D_p) = 0. \tag{4.10}$$

To definuje $A|_p : T_pP \to \mathfrak{g}$ jednoznačně. Protože je D hladká distribuce, máme pro každý bod $p \in P$ a jeho okolí $U \subseteq P$ a příslušné lokální generátory $(V_1, \ldots, V_k)$, kde $k = n - \dim \mathfrak{g}$. Je-li $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ libovolná báze, mám lokální generátory vertikální distribuce $(\#t_1, \ldots, \#t_q)$. Dohromady $(\#t_1, \ldots, \#t_q, V_1, \ldots, V_k)$ tvoří pole repérů na U. Je-li $A = A^\mu t_\mu$, dostáváme

$$A^\mu(\#t_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad A^\mu(V_i) = 0, \tag{4.11}$$

což dokazuje, že A^μ jsou hladké 1-formy na U. Jelikož každý bod je v takovém U, jsou $A^\mu \in \Omega^1(P)$ hladké 1-formy na celém P. Zbývá ukázat, že A splňuje (3.44). Pro $X = \#x|_p$ dostáváme

$$\begin{aligned}(R_g^*A)|_p(\#x|_p) &= A|_{p\cdot g}(R_{g*}(\#x|_p)) = A|_{p\cdot g}(\#Ad_{g^{-1}}(x)|_{p\cdot g}) \\ &= Ad_{g^{-1}}(x) = Ad_{g^{-1}}(A|_p(\#x|_p)) = \{Ad_{g^{-1}}A|_p\}(\#x|_p).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Vyčíslená na vertikální vektory tedy rovnost (3.44) platí. Je-li $X \in D_p$, máme dle předpokladu $R_{g*}(X) \in D_{p\cdot g}$. A tedy $(R_g^*A)|_p(X) = A|_{p\cdot g}(R_{g*}(X)) = 0 = Ad_{g^{-1}}(A|_p(X))$. Rovnost tedy platí i vyčíslená na vektory z D_p. Jelikož $T_pP = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus D_p$, jsme hotovi. ∎

Poznámka 4.2.4. Odteď tedy budeme volbou konexe rozumět libovolný z obou ekvivalentních pohledů. Konexe se často definuje pomocí volby horizontálního podprostoru. Je to totiž obecnější definice, která má smysl v mnohem širší třídě fibrovaných prostorů, které se říká **Ehresmannova konexe**.

Příklad 4.2.5. Interpretace pomocí horizontálních distribucí nám snadno umožní najít jeden velmi obecný příklad konexe. Nechť $\pi : P \to M$ je libovolná hlavní fibrace. Nechť h je Riemannovská metrika na P, která splňuje $R_g^*(h) = h$ pro všechny $g \in G$. Potom

$$\mathrm{Hor}_p(P) = \mathrm{Ver}_p(P)^{\perp_h} \tag{4.13}$$

je konexe na P. Jelikož takové h vždycky existuje, existuje vždycky i konexe na P.

4.3 Horizontální zdvih, paralelní přenos

Spočítáme-li dimenze, zjistíme, že dimenze horizontální distribuce je stejná jako dimenze M. To značí, že by mohl existovat kanonický izomorfismus $\mathrm{Hor}_p(P)$ a tečného prostoru T_mM v odpovídajícím bodě $m = \pi(p)$. A je tomu tak.

Tvrzení 4.3.1. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Potom pro každý tečný vektor $X \in T_mM$ a daný bod $p \in P_m$ ve vlákně nad m existuje právě jeden horizontální tečný vektor $X_p^h \in \mathrm{Hor}_p(P)$ takový, že $\pi_*(X_p^h) = X$. Potom X_p^h se nazývá **horizontální zdvih vektoru** X **do bodu** $p \in P$.*

Zobrazení $X \mapsto X_p^h$ je lineární izomorfismus prostorů T_mM a $\mathrm{Hor}_p(P)$.

Důkaz. Nechť $X \in T_mM$ je libovolný vektor. Vezmu si libovolné souřadnice $(x^1, \dots, x^n)$ na okolí U bodu m. Potom můžu psát $X = X^i \partial_i|_m$.

Zavedeme si nyní vhodné souřadnice na P. Můžeme předpokládat (případným zmenšením okolí U), že mám trivializační zobrazení $\phi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$. Nechť $p = \phi(m, g_0)$ pro $g_0 \in G$. Potom v G mám souřadnice $(y^1, \dots, y^k)$ na nějakém okolí $V \ni g_0$. Potom si na okolí $\mathcal{U} = \phi(U \times V)$ bodu p ve varietě P můžu zavést lokální souřadnice $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k)$:

$$x^i(p) := x^i(\pi(p)), \quad y^\mu(p) := y^\mu(\pi_2 \phi^{-1}(p)), \tag{4.14}$$

kde nalevo jsou souřadnicové funkce na P, zatímco vpravo ty na M, respektive na G. Jsou to zjevně hladké souřadnice, které nyní můžeme použít k nalezení X_p^h. Budeme psát ∂_i a ∂_μ pro příslušná souřadnicová vektorová pole na $\mathcal{U}$. Nejprve si ujasněme následující pravidla:

$$\pi_*(\partial_i|_p) = \partial_i|_m, \quad \pi_*(\partial_\mu|_p) = 0_m. \tag{4.15}$$

Z definice π_* dostávám

$$\pi_*(\partial_i|_p) = \left.\frac{\partial(x^j \circ \pi)}{\partial x^i}\right|_p \partial_j|_{\pi(p)} = \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_p \partial_j|_{\pi(p)} = \partial_i|_{\pi(p)} = \partial_i|_m, \tag{4.16}$$

$$\pi_*(\partial_\mu|_p) = \left.\frac{\partial(x^j \circ \pi)}{\partial y^\mu}\right|_p \partial_j|_{\pi(p)} = \left.\frac{\partial x^j}{\partial y^\mu}\right|_p \partial_j|_{\pi(p)} = 0_{\pi(p)} = 0_m. \tag{4.17}$$

To mimo jiné dokazuje, že $\{\partial_\mu|_p\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ tvoří bázi $\mathrm{Ver}_p(P)$. To ale znamená, že pro každý tečný vektor ve tvaru $Y^\mu \partial_\mu|_p$ existuje jednoznačný element $y \in \mathfrak{g}$, že $Y^\mu \partial_\mu|_p = \#y|_p$. Proto můžu psát hledaný vektor X_p^h ve tvaru

$$X_p^h = W^i \partial_i|_p + Y^\mu \partial_\mu|_p = W^i \partial_i|_p + \#y|_p. \tag{4.18}$$

Nejprve vyzkoumáme podmínku $\pi_*(X^h_p) = X$. Z rovnic (4.15) dostávám $\pi_*(X^h_p) = W^i\partial_i|_m$ a tedy nutně $W^i = X^i$. Abychom určili $y \in \mathfrak{g}$, použijeme podmínku horizontality, tedy $A|_p(X^h_p) = 0$:

$$0 = A|_p(X^h_p) = X^i A|_p(\partial_i|_p) + A|_p(\#y|_p) = X^i A|_p(\partial_i|_p) + y. \tag{4.19}$$

Máme $A = A^\mu t_\mu$ pro zvolenou bázi $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}}$ algebry $\mathfrak{g}$. Potom dostávám $y = -X^i A^\mu_i(p)t_\mu$, kde $A^\mu_i(p) = A^\mu|_p(\partial_i|_p) = \{A^\mu(\partial_i)(p)\}$. Po dosazení zpět tedy nacházíme rovnici

$$X^h_p = X^i\partial_i|_p - X^i A^\mu_i(p)\ \#t_\mu|_p = X^i(\partial_i|_p - A^\mu_i(p)\#t_\mu|_p). \tag{4.20}$$

Tímto jsme ukázali, že horizontální zdvih existuje a je jednoznačný (požadavky jeho vlastnosti nám určily všechny komponenty). Zjevně taky závisí lineárně na X a definuje tedy lineární zobrazení. Jelikož má levou inverzi, $\pi_*(X^h_p) = X$, je to monomorfismus. Z dimenzionálních důvodů je to izomorfismus. V každém bodě $p \in \mathcal{U}$ jsme dostali bázi $\mathrm{Hor}_p(P)$ ve tvaru

$$\partial^h_i|_p := \partial_i|_p - A^\mu_i(p)\#t_\mu|_p. \tag{4.21}$$

A důkaz je hotový. ■

Jelikož horizontální podprostory v různých bodech jednoho vlákna π jsou propojeny akcí grupy jako v (4.7), lze očekávat nějakou speciální vlastnost od horizontálního zdvihu vektoru.

Lemma 4.3.2. *Pro libovolné body $p \in P$ a $g \in G$ a libovolný $X \in T_mM$, kde $m = \pi(p)$ platí*

$$X^h_{p\cdot g} = R_{g*}(X^h_p). \tag{4.22}$$

Důkaz. Vektor $R_{g*}(X^h_p)$ je podle (4.7) horizontální a díky vlastnosti $\pi\circ R_g = \pi$ se promítá zpátky na X, tj. $\pi_*(R_{g*}(X^h_p)) = \pi_*(X^h_p) = X$. Splňuje tedy obě zákonné povinnosti horizontálního zdvihu X do bodu $p \cdot g$ a z jeho jednoznačnosti tedy plyne dokazovaná rovnost. ■

Jelikož umíme jednoznačně zdvihat vektor z každého bodu M, dostaneme přirozeně nápad zdvihat celá vektorová pole na M. Následující věta je jednoduchým důsledkem tvrzení 4.3.1.

Tvrzení 4.3.3. *Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$ je hladké vektorové pole. Potom existuje právě jedno hladké vektorové pole $X^h \in \mathfrak{X}(P)$ které je horizontální a π-vztažené s X, tj. $\pi_*(X^h|_p) = X|_{\pi(p)}$. Vektorové pole X^h nazýváme **horizontálním zdvihem vektorového pole** X.*

Důkaz. Jednoznačnost a existence je jasná, protože musíme definovat $X^h|_p = (X|_{\pi(p)})^h_p$. Zbývá ověřit jeho hladkost, ale nahoře jsme ukázali, že na $\pi^{-1}(U) \subseteq P$ lze psát X^h jako

$$X^h = (X^i \circ \pi)\cdot\{\partial_i - A^\mu_i\#t_\mu\}, \tag{4.23}$$

kde $X = X^i\partial_i$ na U. To je zjevně hladké vektorové pole. ■

Důsledek 4.3.4. *Horizontální zdvih je G-invariantní vektorové pole a platí $[X^h, Y^h] \sim_\pi [X, Y]$.*

Jednou z hlavních aplikací horizontálního zdvihu je možnost definovat jednoznačný zdvih křivek v bázové varietě do bázového prostoru. Ukážeme si, že v případě hlavní fibrace repérů odhalíme jednu z nejdůležitějších aplikací afinních konexí.

Věta 4.3.5 (Paralelní přenos)**.** *Nechť $\gamma : I \to M$ je hladká křivka a $\gamma(0) = m$. Nechť $p \in P_m$ je libovolný bod.*

*Potom existuje právě jedna hladká křivka $\gamma^h : I \to P$, taková že $\pi \circ \gamma^h = \gamma$, $\gamma^h(0) = p$, a pro každé $t \in I$ platí $\dot\gamma^h \in \mathrm{Hor}_{\gamma^h(t)}(P)$. γ^h se nazývá **horizontální zdvih křivky** γ a samotný proces konstrukce horizontálního zdvihu se nazývá **paralelní přenos podél křivky** γ.*

Důkaz. Zderivováním vztahu $\pi \circ \gamma^h = \gamma$ podle t dostáváme $\pi_*(\dot\gamma^h) = \dot\gamma$. Je tedy jasné, že $\dot\gamma^h$ musí být horizontálním zdvihem $\dot\gamma$ do bodu $\gamma^h(t)$, tj. dostáváme

$$\dot\gamma^h = (\dot\gamma)^h_{\gamma^h(t)}. \tag{4.24}$$

Po dosazení do (4.20) tedy řešíme rovnici

$$\dot\gamma^h(t) = \frac{d}{dt}x^i(\gamma(t))\{\partial_i|_{\gamma^h(t)} - A^\mu_i(\gamma^h(t))\#t_\mu|_{\gamma^h(t)}\}. \tag{4.25}$$

Po složení se souřadnicovými funkcemi se jedná o soustavu autonomních (napravo nevystupuje derivace $\gamma^h(t)$) obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé zobrazení $\gamma^h(t)$. Máme zadanou počáteční podmínku $\gamma^h(0) = p$. Řešení tedy vždy existuje, je hladké a jednoznačné. ■

Cvičení 4.3.6. *Rozmyslete si, že paralelní přenos nezávisí na reparametrizaci křivky γ ve smyslu: Řekneme, že γ' je reparametrizací γ, pokud $\gamma' = \gamma \circ \sigma$ pro $\sigma : I \to I$ takové, že $\sigma'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in I$. Ukažte, že potom $\gamma'^h = \gamma^h \circ \sigma$. Zejména tedy můžeme hovořit o paralelním přenosu „trajektorií“, tj. nezávisí na konkrétní parametrizaci.*

Příklad 4.3.7. Ukážeme si paralelní přenos v případě $P = F(M)$. Nejde ani tak o příklad, jako původ názvosloví. Nechť $(x^1, \dots, x^n, y^1_1, \dots, y^n_n)$ jsou souřadnice ne $\pi^{-1}(U)$, kde pro $e \in \pi^{-1}(m)$ definujeme $e = \partial|_m \cdot y(e)$. Označme si $x^i(t) \equiv x^i(\gamma(t))$ a $y^a_b(t) = y^a_b(\gamma^h(t))$.

Uvědomme si, že výsledná křivka γ^h definuje v každém bodě křivky $\gamma(t)$ bázi $(e_1(t), \dots, e_n(t))$:

$$\gamma^h(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t)) \in \mathcal{E}(T_{\gamma(t)}M), \tag{4.26}$$

kde $e_a(t) = y^b_a(t) \cdot \partial_b|_{\gamma(t)}$. Nechť $A = \omega$ je forma konexe příslušná afinní konexi ∇. Pro dosazení do (4.25) tedy potřebujeme znát funkce A^μ_i, což v značení na $F(M)$ odpovídá $\omega^a_b(\partial_i)$. Přímým dosazením do (3.31) dostáváme rovnici

$$\omega^a_b(\partial_i) = (y^{-1})^a_k\{(\hat\omega^k_l, \partial_i) \circ \pi\}y^l_b = (y^{-1})^a_k\{\Gamma^k_{li} \circ \pi\}y^l_b. \tag{4.27}$$

Výraz na pravé straně (4.25) lze tedy přepsat jako

$$\begin{aligned} -A^\mu_i\#t_\mu = & -\omega^a_b(\partial_i)\#E^b_a = -\omega^a_b(\partial_i)y^c_a\partial^b_c = -(y^{-1})^a_k\{\Gamma^k_{li} \circ \pi\}y^l_b y^c_a\partial^b_c \\ = & -\{\Gamma^a_{li} \circ \pi\}y^l_b \cdot \partial^b_a \end{aligned} \tag{4.28}$$

Nyní si stačí uvědomit, že levou stranu (4.25) lze přepsat jako

$$\begin{aligned} \dot\gamma^h(t) &= \frac{d}{dt}x^i(\gamma^h(t)) \cdot \partial_i|_{\gamma^h(t)} + \frac{d}{dt}y^a_b(\gamma^h(t)) \cdot \partial^b_a|_{\gamma^h(t)} \\ &= \dot x^i(t) \cdot \partial_i|_{\gamma^h(t)} + \dot y^a_b(t) \cdot \partial^b_a|_{\gamma^h(t)}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

kde jsme využili toho, že $x^i(\gamma^h(t)) = x^i(\gamma(t)) \equiv x^i(t)$. Po dosazení do pravé strany dostáváme

$$\dot x^i(t) \cdot \{\partial_i|_{\gamma^h(t)} - \Gamma^a_{li}(t)y^l_b(t) \cdot \partial^b_a|_{\gamma^h(t)}\}, \tag{4.30}$$

kde píšeme $\Gamma^a_{li}(t) \equiv \Gamma^a_{li}(\gamma(t))$. Porovnáním koeficientů u bazických tečných vektorů dostaneme soustavu n^2 diferenciálních rovnic

$$\dot{y}^a_b(t) + \dot{x}^i(t)\Gamma^a_{li}(t)y^l_b(t) = 0. \tag{4.31}$$

Nezapomínejme na počáteční podmínku $y^a_b(0) := e^a_b$. Co jsme právě zjistili? Začneme s křivkou γ a v bodě $m = \gamma(0)$ si zvolíme počáteční podmínku, bázi $(e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}(T_mM)$, kde $e_b = e^a_b\, \partial_i|_m$. Výsledná křivka $\gamma^h(t)$ odpovídá „roznesení“ $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ této báze podél křivky $\gamma(t)$, kde $e_b(t) = y^a_b(t)\partial_a|_{\gamma(t)}$ splňují rovnici (4.31), což je ale **rovnice paralelního přenosu** pro každý z vektorů, tj. paralelně roznášíme $(e_1, \dots, e_n)$ podél $\gamma(t)$. Uzavíráme s tím, že pro $P = F(M)$ paralelní přenos *je paralelní přenos.*

4.4 Veličiny typu ρ a jejich paralelní přenos

Zatím jsme zjistili, že pro hlavní fibraci repérů je horizontální zdvih křivek z bazické variety ekvivalentní paralelnímu roznášení celé báze (tetrády, vielbeinu) podél dané křivky. Zajímá nás, jakým způsobem zformulovat paralelní přenos konkrétních tenzorů, například forem nebo vektorů. K tomu slouží následující velmi obecná definice:

Definice 4.4.1. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Nechť (V, ρ) je konečně-rozměrná reprezentace Lieovy grupy G na prostoru V. Řekneme, že $\alpha \in \Omega^p(P, V)$ je **p-forma typu ρ** když

$$R^*_g(\alpha) = \rho(g^{-1})\alpha \tag{4.32}$$

Jejich prostor označujeme jako $\Omega^p_\rho(P, V)$. Speciálně 0-formy typu ρ nazýváme **veličiny typu ρ.**

Poznámka 4.4.2. $\Omega^p_\rho(P, V) \subseteq \Omega^p(P, V)$ je vektorový podprostor. Netvoří však $C^\infty(P)$-podmodul. Tvoří ale $C^\infty(M)$-modul, kde násobení $f \in C^\infty(M)$ je definované jako

$$f \cdot \alpha := (f \circ \pi)\alpha. \tag{4.33}$$

Musí se ověřit, že $f \cdot \alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$. Pro každé $p \in P$ a $g \in G$ dostáváme

$$R^*_g((f \cdot \alpha)|_{p\cdot g}) = R^*_g(f(\pi(p \cdot g)))\alpha|_{p\cdot g}) = f(\pi(p))\rho(g^{-1})\alpha|_p = \rho(g^{-1})((f \cdot \alpha)|_p). \tag{4.34}$$

Příklad 4.4.3. Forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je 1-forma typu ρ, kde $(V, \rho) = (\mathfrak{g}, Ad)$. Říkáme, že A je 1-forma typu Ad.

Definice 4.4.4. Nechť $\Phi \in \Omega^0(P, V)$ je veličina typu ρ, kde (V, ρ) je libovolná konečně-rozměrná reprezentace G na V. Nechť $\gamma : I \to M$ je libovolná hladká křivka. Řekneme, že Φ je **autoparalelní veličina podél** γ, pokud $\Phi \circ \gamma^h : I \to V$ je konstantní, tj.

$$0 = \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma^h(t)) = \dot{\gamma}^h(t) \cdot \Phi. \tag{4.35}$$

Zatím není jasné, proč by právě tahle definice měla být tou správnou cestou. Více se vyjasní v následujícím příkladě.

Příklad 4.4.5. Nechť $P = F(M)$ a uvažujme kanonickou reprezentaci $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$, tj. $\rho(\mathbf{A})x = \mathbf{A}.x$, pro všechny $x \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Ukážeme, že existuje kanonický izomorfismus následujících $C^\infty(M)$-modulů:

$$\Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{X}(M), \tag{4.36}$$

tj. veličiny typu ρ jsou v tomto případě vlastně hladká vektorová pole na bázové varietě M.

Nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n)$. Pro každé $e \in F(M)$ je tedy $\Phi(e) \in \mathbb{R}^n$, a pro každé $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ platí $\Phi(e \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}.\Phi(e)$. Nejprve intuice. Každé $e \in F(M)$ je báze v tečném prostoru $T_{\pi(e)}M$. Potom X_Φ bude vektorové pole takové, že komponenty tečného vektoru $X_\Phi|_{\pi(e)}$ v bázi $e = (e_1, \dots, e_n)$ budou tvořeny právě n-ticí reálných čísel $\Phi(e) \in \mathbb{R}^n$. Chování vzhledem k pravé akci $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zajistí, že definice dobře funguje při volbě jiné báze e'.

Nechť $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ je souřadnicové pole repérů příslušné lokálním souřadnicím $(x^1, \dots, x^n)$ na okolí $U \subseteq M$. Mám tedy $\partial|_m \in \mathcal{E}(T_m M) = F_m(M)$ pro všechny $m \in U$. Definujeme vektorové pole X^U_Φ na U vztahem

$$X^U_\Phi|_m = \Phi(\partial|_m)^i \cdot \partial_i|_m. \tag{4.37}$$

protože přiřazení $m \mapsto \partial|_m$ je hladké zobrazení (je to hladký lokální řez $F(M)$) a Φ je hladké zobrazení do $\mathbb{R}^n$, jsou $\Phi(\partial|_m)^i$ hladké funkce na U. A tedy $X^U_\Phi \in \mathfrak{X}(U)$.

Nechť $(y^1, \dots, y^n)$ jsou lokální souřadnice na U', a nechť ∂' je příslušné souřadnicové pole repérů na U'. Pro $m \in U \cap U'$ platí transformační vztah $\partial'|_m = \partial|_m \cdot \mathbf{J}(m)$, kde $\mathbf{J} : U \cap U' \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ je Jacobiho matice souřadnicového přechodu. Potom ale pro $m \in U \cap U'$ dostávám

$$\begin{aligned} X^{U'}_\Phi|_m &= \Phi(\partial'|_m)^i \cdot \partial'_i|_m = \Phi(\partial|_m \cdot \mathbf{J}(m))^i \cdot \{\mathbf{J}^k_i(m)\partial_k|_m\} \\ &= \{\mathbf{J}^{-1}(m).\Phi(\partial|_m)\}^i \cdot \{\mathbf{J}^k_i(m)\partial_k|_m\} \\ &= (\mathbf{J}^{-1}(m))^i_q \ \Phi(\partial|_m)^q \ \mathbf{J}^k_i(m) \ \partial_k|_m \\ &= \Phi(\partial|_m)^q \cdot \partial_q|_m = X^U_\Phi|_m. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Tím jsme ukázali, že vztahem $X_\Phi|_U = X^U_\Phi$ definujeme hladké vektorové pole X_Φ na M. Snadno se ukáže, že přiřazení $\Phi \mapsto X_\Phi$ je $C^\infty(M)$-lineární zobrazení vzhledem k násobení z poznámky 4.4.2, a tedy morfismus $C^\infty(M)$-modulů $\Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n)$ a $\mathfrak{X}(M)$.

Zbývá sestrojit inverzní zobrazení. Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$. Pro libovolný bod $e \in F(M)$ máme $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}(T_{\pi(e)}M)$. Máme $X|_{\pi(e)} = \lambda^i \cdot e_i$. Definujeme $\Phi_X(e) = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)^T \in \mathbb{R}^n$. Z obvyklých transformačních vlastností vektorových polí snadno plyne, že $\Phi_X(e \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}.\Phi_X(e)$. Je třeba ověřit hladkost $\Phi_X : F(M) \to \mathbb{R}^n$. Stačí ověřit hladkost po složení s každým trivializačním zobrazením $F(M)$, které jsme ale volili ve tvaru $\phi(m, \mathbf{A}) = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$. Potom

$$\Phi_X(\phi(m, \mathbf{A})) = \mathbf{A}^{-1}.\Phi_X(\partial|_m) = \mathbf{A}^{-1}.(X^1(m), \dots, X^n(m))^T, \tag{4.39}$$

kde $X|_m = X^i(m) \cdot \partial_i|_m$. Pravá strana zjevně hladce závisí na m i $\mathbf{A}$. Je zjevné, že zobrazení $X \mapsto \Phi_X$ je oboustranná inverze k zobrazení $\Phi \mapsto X_\Phi$.

Tvrzení 4.4.6. *Předpokládejte značení z předchozího příkladu. Potom $\Phi \in \Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n)$ je autoparalelní podél křivky $\gamma(t)$ podle definice 4.4.4 právě tehdy když příslušné vektorové pole X_Φ je autoparalelní podél $\gamma(t)$ v obvyklém slova smyslu.*

Důkaz. Podle příkladu 4.3.7 definuje horizontální zdvih γ^h křivky γ paralelně roznesenou bázi $\gamma^h(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t)) \in \mathcal{E}(T_{\gamma(t)}M)$ v každém bodě křivky γ. Potom pro každé $t \in I$ odpovídá $\Phi(\gamma^h(t))$ přesně komponentám vektorového pole X_Φ v bázi $(e_1(t), \dots, e_n(t))$. Ale vektorové pole je autoparalelní podél křivky právě tehdy když má v libovolně paralelně roznesené bázi (tetrádě, vielbeinu) konstantní komponenty, tj. $\Phi \circ \gamma^h$ je konstantní funkce t. ∎

Cvičení 4.4.7. *Ukažte, jak lze způsobem podobným příkladu 4.4.5 popisovat 1-formy na M. Zkuste si rozmyslet, jak uchopit libovolná tenzorová pole na M.*

Kapitola 5

Vnější kovariantní derivace, forma křivosti

5.1 Horizontální část forem

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor vybavený formou konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Dostáváme tedy rozklad $T_pP = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus \mathrm{Hor}_p(P)$ pro každý bod $p \in P$. Máme tedy dobře definovaný projektor $\mathrm{hor}_p : T_pP \to \mathrm{Hor}_p(P)$. Vzhledem k tomu, že $\mathrm{Hor}(P)$ je hladká distribuce, dá se ukázat, že vše funguje na úrovni vektorových polí, tj. pro každé $X \in \mathfrak{X}(P)$ a $p \in P$ definujeme

$$(\mathrm{hor}\, X)|_p := \mathrm{hor}_p(X|_p), \tag{5.1}$$

a výsledek $\mathrm{hor}\, X \in \mathfrak{X}(P)$ je hladké horizontální vektorové pole na P. Dostáváme tedy $C^\infty(P)$-lineární projektor $\mathrm{hor} : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$ a $\mathrm{hor}\, X$ nazýváme **horizontální částí vektorového pole** X. Dokažme si nyní drobné technické lemma

Lemma 5.1.1. *Pro horizontální část vektorového pole platí vztah*

$$R_{g*}((\mathrm{hor}\, X)|_p) = (\mathrm{hor}\, R_{g*}(X))|_{p\cdot g}, \tag{5.2}$$

pro všechny $p \in P$ a $g \in G$.

Důkaz. Z vlastnosti (4.7) okamžitě plyne, že $\mathrm{hor}_{p\cdot g} \circ R_{g*} = R_{g*} \circ \mathrm{hor}_p$. Zbytek je definice. ■

Definice 5.1.2. Nechť $\alpha \in \Omega^p(M, V)$ je p-forma s hodnotami ve V pro libovolný konečněrozměrný reálný vektorový prostor V. **Horizontální část** $\mathrm{hor}\,\alpha$ **formy** α definujeme vztahem

$$\{\mathrm{hor}\,\alpha\}(X_1, \ldots, X_p) := \alpha(\mathrm{hor}\, X_1, \ldots, \mathrm{hor}\, X_p). \tag{5.3}$$

Řekneme, že α je **horizontální p-forma**, pokud $\mathrm{hor}\,\alpha = \alpha$.

Tvrzení 5.1.3. *Platí následující vlastnosti operátory* hor*:*

(i) $\mathrm{hor} : \Omega^p(P, V) \to \Omega^p_{hor}(P, V)$ *je projektor, kde* $\Omega^p_{\mathrm{hor}}(P, V)$ *je prostor horizontálních p-forem.*

(ii) hor *je ekvivariantní vzhledem k pravé akci grupy* G *na* $\Omega^p(P,V)$*, tj.*

$$R_g^*(\mathrm{hor}\,\alpha) = \mathrm{hor}(R_g^*\alpha), \tag{5.4}$$

pro všechny $\alpha \in \Omega^p(P,V)$ *a* $g \in G$*.*

(iii) Operátor hor *zachovává p-formy typu* ρ*, tj.* $\mathrm{hor}(\Omega^p_\rho(P,V)) \subseteq \Omega^p_\rho(P,V)$*.*

(iv) Vzhledem k vnějšímu součinu (má-li pro konkrétní V *smysl) se* hor *chová přirozeně, tj.*

$$\mathrm{hor}(\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta) = \mathrm{hor}(\alpha) \mathbin{\dot\wedge} \mathrm{hor}(\beta), \tag{5.5}$$

pro všechny $\alpha, \beta \in \Omega^p(M,V)$*, kde* $\dot\wedge$ *je definovaný s pomocí nějakého (daného) bilineárního násobení na* V*.*

(v) Forma α *je horizontální, právě tehdy když* $i_W(\alpha) = 0$ *pro všechna vertikální vektorové pole* $W \in \mathfrak{X}(P)$*. Ekvivalentně* $i_{\#x}(\alpha) = 0$ *pro všechny* $x \in \mathfrak{g}$*.*

Důkaz. (i) je zřejmé, (ii) plyne z lemmatu 5.1.1, a přímá aplikace tohoto tvrzení na formu typu ρ dává (iii). Vlastnost (iv) je okamžitým důsledkem definice tenzorového součinu a jeho antisymetrizace, tj. vnějšího součinu. Ad (v): Že jde o podmínku nutnou je zřejmé. Předpokládejme, že α splňuje $i_W(\alpha) = 0$ pro všechna vertikální vektorová pole. Potom pro libovolné $X \in \mathfrak{X}(P)$:

$$i_X(\mathrm{hor}(\alpha)) = \mathrm{hor}(i_{\mathrm{hor}\,X}\alpha) = \mathrm{hor}(i_X\alpha). \tag{5.6}$$

Protože $i_W(i_X\alpha) = i_X(i_W\alpha) = 0$ pro všechna vertikální vektorová pole W, můžeme opakováním stejného argumentu dokázat, že platí tvrzení

$$\{\mathrm{hor}(\alpha)\}(X_1,\dots,X_p) \equiv i_{X_p}\cdots i_{X_1}\,\mathrm{hor}(\alpha) = \mathrm{hor}(i_{X_p}\dots i_{X_1}\alpha) = \alpha(X_1,\dots,X_p), \tag{5.7}$$

kde jsme využili, že na z definice $\mathrm{hor}(\beta) = \beta$ pro všechny $\beta \in \Omega^0(P,V)$. Odtud $\mathrm{hor}(\alpha) = \alpha$ a dokázali jsme, že α je horizontální p-forma. Že je zmíněná podmínka ekvivalentní jednodušší podmínce $i_{\#x}(\alpha) = 0$ plyne z $C^\infty(P)$-linearity původní podmínky a vlastnosti, že každé vertikální vektorové pole W lze psát jako $W = f^\alpha \cdot \#t_\alpha$, kde $f^\alpha \in C^\infty(P)$ jsou unikátní hladké funkce. ■

5.2 Vnější kovariantní derivace

V předchozí sekci jsme záměrně pomlčeli o chování vnějšího diferenciálu d vzhledem k horizontální projekci forem. Důvod je zřejmý - vnější derivace horizontální formy není obecně horizontální. Pokud chceme tuto vlastnost, musíme začít používat jiný diferenciální operátor:

Definice 5.2.1. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor vybavený konexí $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$. Operátor D **vnější kovariantní derivace** definujeme jako

$$D = \mathrm{hor} \circ d. \tag{5.8}$$

Tvrzení 5.2.2 (Vlastnosti vnější kovariantní derivace)**.** *Platí následující:*

(i) $D : \Omega^p(P,V) \to \Omega^{p+1}_{hor}(P,V)$ *je* $\mathbb{R}$*-lineární operátor.*

(ii) D *je ekvivariantní vzhledem k pravé akci grupy* G *na* $\Omega^p(P,V)$*, tj.*

$$R_g^* \circ D = D \circ R_g^* \tag{5.9}$$

(iii) D zachovává formy typu ρ, tj. $D(\Omega^p_\rho(P,V)) \subseteq \Omega^{p+1}_\rho(P,V)$.

(iv) Na vnějším součinu (má-li pro konkrétní V smysl) se D chová jako

$$D(\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta) = D(\alpha) \mathbin{\dot\wedge} \operatorname{hor}(\beta) + \hat\eta(\operatorname{hor}\alpha) \mathbin{\dot\wedge} D(\beta). \tag{5.10}$$

pro všechny $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(P,V)$, kde $\dot\wedge$ je vnější součin definovaný pomocí libovolné (dané) dodatečné algebraické struktury na V.

Důkaz. Všechna tvrzení jsou přímočarou aplikací tvrzení 5.1.3 společně s obvyklou vlastností vnější derivace d ve tvaru: $R_g^* \circ d = d \circ R_g^*$. ■

Ukazuje se, že vnější kovariantní derivace může být výhodná pro popis autoparalelních veličin dle definice 4.4.4. Výsledek shrnuje následující tvrzení:

Tvrzení 5.2.3. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$ je veličina typu ρ, kde (V,ρ) je reprezentace G na V.*

Nechť $U \subseteq M$ je otevřená množina v M a $D\Phi = 0$ na $\mathcal{U} = \pi^{-1}(U)$. Potom Φ je autoparalelní veličina podél libovolné křivky $\gamma : I \to U$.

Důkaz. Nechť $\gamma : I \to U$ je libovolná křivka. Potom

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma^h)(t) = \dot\gamma^h(t).\Phi = \langle (d\Phi)|_{\gamma^h(t)}, \dot\gamma^h(t)\rangle = \langle (d\Phi)|_{\gamma^h(t)}, \operatorname{hor}(\dot\gamma^h(t))\rangle \\ = \langle (D\Phi)|_{\gamma^h(t)}, \dot\gamma^h(t)\rangle = 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

To dokazuje, že Φ je autoparalelní podél $\gamma(t)$. ■

5.3 Forma křivosti

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor a $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$ je konexe na P. Ukázali jsme, že vertikální distribuce $\operatorname{Ver}(P)$ tvoří standardní příklad integrabilní distribuce. Je tedy přirozené prozkoumat rovněž integrabilitu horizontální distribuce odpovídající konexi A. Podle tvrzení 4.1.13 musíme prozkoumat $dA(X,Y)$ na dva lokální řezy horizontální distribuce. Definujeme

$$\Omega(X,Y) := dA(\operatorname{hor}X, \operatorname{hor}Y) \equiv DA(X,Y). \tag{5.12}$$

Potom $\Omega = DA \in \Omega^2(P,\mathfrak{g})$ se nazývá **forma křivosti konexe** A. Dostáváme následující:

Tvrzení 5.3.1 (Integrabilita horizontální distribuce)**.** *Horizontální distribuce* $\operatorname{Hor}(P)$ *je integrabilní, právě tehdy když má nulovou formu křivosti, tj. $\Omega = 0$. Také říkáme, že konexe A je* ***plochá****.*

Tvrzení 5.3.2 (Vlastnosti formy křivosti)**.** *Nechť $\Omega = DA$ je forma křivosti konexe A. Potom*

(i) Ω je 2-forma s hodnotami v $\mathfrak{g}$ typu Ad, tj. $\forall g \in G$ platí

$$R_g^*\Omega = Ad_{g^{-1}}\Omega. \tag{5.13}$$

(ii) Ω je horizontální forma, tj. $\operatorname{hor}\Omega = \Omega$.

Výpočet Ω vypadá na první pohled nepříjemně - pro danou formu konexe musíme nejprve vypočítat horizontální projektor hor : $\mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$. Naštěstí se ukazuje, že existuje jednoduchá explicitní formulka pro výpočet Ω. Nejprve si vyslovíme dvě technická lemmata.

Lemma 5.3.3. *Nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P,V)$ je p-forma typu ρ, kde (V,ρ) je konečně-rozměrná reprezentace Lieovy grupy G na prostoru V. Nechť $\rho' : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ je přidružená reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, tj. $\rho'(x)(v) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \rho(\exp(tx))(v)$ pro všechny $x \in \mathfrak{g}$ a $v \in V$. Potom platí*

$$\mathcal{L}_{\#x}\alpha = -\rho'(x)\alpha, \tag{5.14}$$

pro všechny $x \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že tok vektorového pole $\#x$ má tvar $\phi_t(p) = R_{\exp(tx)}(p)$. Potom

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\#x}\alpha)|_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^*(\alpha|_{\phi_t(p)}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R^*_{\exp(tx)}(\alpha|_{p\cdot\exp(tx)}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(-tx))\alpha|_p = -\rho'(x)\alpha|_p,\end{aligned} \tag{5.15}$$

kde $x \in \mathfrak{g}$ a $p \in P$ byly libovolné. A máme dokázáno. ■

Příklad 5.3.4. Pro formu konexe máme $A \in \Omega^1_{Ad}(P,\mathfrak{g})$. Přidružená reprezentace k Ad je ad, tj. $[x,y]_\mathfrak{g} \equiv ad_x(y) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} Ad_{\exp(tx)}(y)$. Forma konexe tedy splňuje rovnici $\mathcal{L}_{\#x}A = -[x,A]_\mathfrak{g}$.

Lemma 5.3.5. *Nechť $\alpha, \beta \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$ Potom pro každá dvě vektorová pole $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$ platí*

$$[\alpha \wedge \beta]_\mathfrak{g}(X,Y) = [\alpha(X), \beta(Y)]_\mathfrak{g} + [\beta(X), \alpha(Y)]_\mathfrak{g}. \tag{5.16}$$

Speciálně $[\alpha \wedge \alpha]_\mathfrak{g}(X,Y) = 2[\alpha(X), \alpha(Y)]_\mathfrak{g}$.

Důkaz. Nechť $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ je libovolná báze $\mathfrak{g}$ a $\alpha = \alpha^\mu t_\mu$, $\beta = \beta^\nu t_\nu$. Potom máme

$$\begin{aligned}[\alpha \wedge \beta]_g(X,Y) &= (\alpha^\mu \wedge \beta^\nu)(X,Y)[t_\mu, t_\nu]_\mathfrak{g} = \{\alpha^\mu(X)\beta^\nu(Y) - \beta^\nu(X)\alpha^\mu(Y)\}[t_\mu, t_\nu]_\mathfrak{g} \\ &= [\alpha(X), \beta(Y)]_\mathfrak{g} + [\beta(X), \alpha(Y)]_\mathfrak{g}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Tvrzení pro dvě stejné 1-formy je zřejmé. ■

Nyní již můžeme vyslovit tvrzení zásadní pro výpočet Ω.

Tvrzení 5.3.6 (Výpočet formy křivosti)**.** *Nechť $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$ a $\Omega = DA$ je příslušná forma křivosti. Potom platí formulka*

$$\Omega = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_\mathfrak{g}. \tag{5.18}$$

*Této rovnici se někdy též říká **Cartanova strukturní rovnice**. Přímočarým důsledkem tohoto tvrzení je **Bianchiho identita** ve tvaru*

$$D\Omega = DDA = 0. \tag{5.19}$$

Důkaz. Jde o rovnost dvou 2-forem s hodnotami v $\mathfrak{g}$. Rovnost stačí ověřit na dvojici vektorových polí (X,Y), kde máme postupně

(i) (X,Y) jsou obě horizontální. Levá strana dává $\Omega(X,Y) = dA(\mathrm{hor}\, X, \mathrm{hor}\, Y) = dA(X,Y)$. Pravá strana je $dA(X,Y) + [A(X), A(Y)]_{\mathfrak{g}} = dA(X,Y)$, protože $A(X) = A(Y) = 0$.

(ii) (X,Y) jsou obě vertikální. Protože jde o rovnost $C^\infty(P)$-bilineárních objektů, stačí ji ověřit pouze pro $X = \#x$ a $Y = \#y$, kde $x, y \in \mathfrak{g}$. Jelikož $\mathrm{hor}(\Omega) = \Omega$, je podle tvrzení 5.1.3, bod (v), levá strana nulová. Pravá strana dává

$$\begin{aligned}(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}})(\#x, \#y) &= dA(\#x, \#y) + [A(\#x), A(\#y)]_{\mathfrak{g}} \\ &= \#x.A(\#y) - \#y.A(\#x) - A([\#x, \#y]_{\mathfrak{g}}) + [x,y]_{\mathfrak{g}} \\ &= \#x.y - \#y.x - [x,y]_{\mathfrak{g}} + [x,y]_{\mathfrak{g}} = 0.\end{aligned} \tag{5.20}$$

A tedy i pravá strana je nulová.

(iii) (X,Y), kde $X = \#x$ a Y je horizontální. Levá strana je nulová ze stejného důvodu jako v bodu (ii). Pravá strana dává

$$\begin{aligned}(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}})(\#x, Y) &= dA(\#x, Y) + [A(\#x), A(Y)]_{\mathfrak{g}} \\ &= \#x.A(Y) - Y.A(\#x) - A([\#x, Y]) \\ &= (\mathcal{L}_{\#x}A)(Y) - Y.x = -[x, A(Y)]_{\mathfrak{g}} = 0,\end{aligned} \tag{5.21}$$

kde jsme použili výsledek příkladu 5.3.4. A tedy i pravá strana je nulová.

Zbývá ukázat Bianchiho identitu. Přímo z definice dostáváme

$$D\Omega = D(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}}) = \frac{1}{2}D[A \wedge A]_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2}[DA \wedge \mathrm{hor}(A)] - [\mathrm{hor}(A) \wedge DA]_{\mathfrak{g}} = 0, \tag{5.22}$$

kde jsme použili bod (iv) tvrzení 5.2.2 a vlastnost $\mathrm{hor}(A) = 0$. ■

Poznámka 5.3.7. Pozor! Obecně *neplatí* tvrzení, že $D^2 = 0$.

Příklad 5.3.8 (Maurerova-Cartanova 1-forma)**.** Nechť G je libovolná Lieova algebra. Ukážeme si nyní příklad užitečné 1-formy s hodnotami v $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. **Levá Maurerova-Cartanova 1-forma** $\theta_L \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ je definovaná vztahem

$$\theta_L(x^L) := x, \tag{5.23}$$

pro všechny $x \in \mathfrak{g}$. Zjevně tím definujeme hladkou 1-formu na G. Maurer-Cartanova forma má následující vlastnosti:

(i) θ_L splňuje **Maurer-Cartanovu rovnici**

$$d\theta_L + \frac{1}{2}[\theta_L \wedge \theta_L]_{\mathfrak{g}} = 0. \tag{5.24}$$

(ii) θ_L je levo-invariantní a Ad-ekvivariantní vůči pravé translaci, tj.

$$L_g^*(\theta_L) = \theta_L, \;\; R_g^*(\theta_L) = Ad_{g^{-1}}\theta_L \tag{5.25}$$

Abychom dokázali (i), vezměme $x, y \in \mathfrak{g}$. Potom:

$$\begin{aligned} d\theta_L(x^L, y^L) &= x^L.\theta_L(y^L) - y^L.\theta_L(x^L) - \theta_L([x^L, y^L]) \\ &= -[x, y]_{\mathfrak{g}} = -[\theta_L(x^L), \theta_L(y^L)]_{\mathfrak{g}}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ad (ii): Levo-invariance je zřejmá, protože forma je levo-invariantní, je-li její vyčíslení na levo-invariantní vektorová pole konstantní. Vůči pravé akci dostáváme

$$\begin{aligned} (R_g^*\theta_L)|_h(x^L|_h) &= \theta_L|_{hg}(R_{g*}(x^L|_h)) = \theta_L|_{hg}(R_{g*}L_{h*}x) = \theta_L|_{hg}(L_{h*}R_{g*}x) \\ &= \theta_L|_{hg}(L_{hg*}(L_{g^{-1}*}R_{g*}x)) = \theta_L|_{hg}(\{Ad_{g^{-1}}(x)\}^L_{gh}) \\ &= Ad_{g^{-1}}(x) = (Ad_{g^{-1}}\theta_L|_h)(x^L|_h). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Poznámka: Pochopitelně existuje i pravá Maurer-Cartanova forma θ_R, která je pravo-invariantní a Ad-ekvivariantní vůči levé translaci a splňuje Maurer-Cartanovu rovnici s opačným znaménkem.

Příklad 5.3.9 (**Triviální hlavní fibrace**)**.** Spočítáme si nyní nejobecnější formu konexe a křivosti na triviálním hlavním fibrovaném prostoru $P = M \times G$. Nejdřív je třeba si ujasnit, že pro každé $p = (m, g)$ máme $T_{(m,g)}P = T_mM \oplus T_gG$. Tečné vektory v (m, g) tedy budeme psát jako uspořádané dvojice vzhledem k tomuto rozkladu.

Jak vypadají v tomto případě fundamentální vektorová pole? Nechť $x \in \mathfrak{g}$. Potom:

$$\#x|_{(m,g)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(m, g \cdot \exp(tx)) = (0_m, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \cdot \exp(tx)) = (0_m, x^L|_g), \tag{5.28}$$

kde $x^L \in \mathfrak{X}(G)$ je levo-invariantní vektorové pole na G příslušné elementu $x \in \mathfrak{g}$.

Nechť $(X, y^L|_g) \in T_mM \oplus T_gG$ je nejobecnější tečný vektor z $T_{(m,g)}P$, tj. $X \in T_mM$ a $y \in \mathfrak{g}$. Působení pravé akce R_{h*} na $(X, y^L|_g)$ je následující:

$$R_{h*}(X, y^L|_g) = (X, R_{h*}(y^L|_g)) = (X, \{Ad_{h^{-1}}(y)\}^L|_{gh}) \tag{5.29}$$

Hledáme teď nejobecnější formu konexe $A \in \Omega^1(M \times G, \mathfrak{g})$. Jelikož $T^*_{(m,g)}P = T^*_mM \oplus T^*_gG$, můžeme psát $A|_{(m,g)}$ ve tvaru $A|_{(m,g)} = (A'|_{(m,g)}, A''|_{(m,g)})$, kde $A'|_{(m,g)} : T_mM \to \mathfrak{g}$ a $A''|_{(m,g)} : T_gG \to \mathfrak{g}$ jsou lineární zobrazení. Pozor, vidíme, že A' může záviset na g a A'' na m.

Z první vlastnosti formy konexe $A(\#x) = x$ a výše vypočítaného tvaru $\#x$ dostáváme

$$x = A|_{(m,g)}(\#x|_{(m,g)}) = A'|_{(m,g)}(0_m) + A''|_{(m,g)}(x^L|_g) = A''|_{(m,g)}(x^L|_g). \tag{5.30}$$

To nám ale říká, že $A''|_{(m,g)} = \theta_L|_g$ a tedy zrovna A'' na bodu m nezávisí. Chceme prozkoumat druhou vlastnost formy konexe, tj. $R_h^*(A|_{(m,gh)}) = Ad_{h^{-1}}A|_{(m,g)}$. Potom

$$(R_h^*(A|_{(m,gh)}))(X, y^L|_g) = A|_{(m,gh)}(X, \{Ad_{h^{-1}}(y)\}^L|_{gh}) = A'|_{(m,gh)}(X) + Ad_{h^{-1}}(y). \tag{5.31}$$

Pravá strana dává požadované rovnice dává

$$\{Ad_{h^{-1}}A|_{(m,g)}\}(X, y^L|_g) = Ad_{h^{-1}}A'|_{(m,g)}(X) + Ad_{h^{-1}}(y). \tag{5.32}$$

Dostáváme tedy rovnost $A'|_{(m,gh)} = Ad_{h^{-1}}A'|_{(m,g)}$. Označme $A'|_m := A'|_{(m,e)}$. To nám definuje hladkou 1-formu $A' \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$. Potom zjevně $A'|_{(m,g)} = Ad_{g^{-1}}A'|_m$. Výsledná formulka pro formu konexe je tedy:

$$A|_{(m,g)} = Ad_{g^{-1}}\pi_1^*(A')|_{(m,g)} + \pi_2^*(\theta_L)|_{(m,g)}. \tag{5.33}$$

Prostor všech možných konexí na $P = M \times G$ je tedy prostor forem $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$. Jak vypadá horizontální zdvih odpovídající konexi A? Pro $X \in \mathfrak{X}(M)$ můžeme psát

$$X^h|_{(m,g)} = (X'|_{(m,g)}, X''|_{(m,g)}), \;\; X'|_{(m,g)} \in T_mM, \;\; X''|_{(m,g)} \in T_gG. \tag{5.34}$$

Jelikož $X''|_{(m,g)} \in T_gG$, můžeme jej psát jako $y(m,g)^L|_g$, kde $y(m,g) \in \mathfrak{g}$. Podmínka projekce $\pi_*(X^h|_{(m,g)}) = X|_m$ dává $X'|_{(m,g)} = X|_m$. Podmínka $A|_{(m,g)}(X^h|_{(m,g)}) = 0$ dává

$$Ad_{g^{-1}} A'|_m(X|_m) + y(m,g) = 0. \tag{5.35}$$

A tedy $y(m,g) = -Ad_{g^{-1}}\langle A', X\rangle(m)$. Zjišťujeme, že horizontální zdvih má tvar

$$X^h|_{(m,g)} = (X|_m, -\{Ad_{g^{-1}}\langle A', X\rangle(m)\}^L|_g) = (X|_m, -\{\langle A', X\rangle(m)\}^R|_g). \tag{5.36}$$

Nyní bychom chtěli vypočítat formu křivosti Ω. Zde je velmi snadné vypočítat výsledek z definice. Potřebujeme totiž znát komutátor dvou horizontálních zdvihů. Přímým výpočtem

$$[X^h, Y^h]|_{(m,g)} = \big([X,Y]|_m, -(\{X.A'(Y) - Y.A'(X) + [A'(X), A'(Y)]_{\mathfrak{g}}\}(m))^R|_g\big). \tag{5.37}$$

Potom $\Omega(X^h, Y^h) = dA(X^h, Y^h) = -\langle A, [X^h, Y^h]\rangle$ má tvar

$$\begin{aligned} \{\Omega(X^h, Y^h)\}(m,g) &= Ad_{g^{-1}}\{X.A'(Y) - Y.A'(X) - A'([X,Y]) + [A'(X), A'(Y)]_{\mathfrak{g}}\}(m) \\ &= Ad_{g^{-1}}\{(dA' + \frac{1}{2}[A' \wedge A']_{\mathfrak{g}})(X,Y)\}(m). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Vidím, že konexe A odpovídající formě $A' \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ je plochá, pokud $dA' + \frac{1}{2}[A' \wedge A']_{\mathfrak{g}} = 0$. To snadno splníme položením $A' = 0$, kde potom $A = \pi_2^*(\theta_L)$ se nazývá **kanonická plochá konexe** na $P = M \times G$.

Lemma 5.3.10 (Maurer-Cartan na $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$)**.** *Nechť $\varphi : M \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ je libovolné hladké zobrazení a θ_L je levá Maurer-Cartanova forma $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Potom $\varphi^*(\theta_L) = \varphi^{-1}d\varphi$, kde φ lze interpretovat jako element $\varphi \in \Omega^0(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ a tedy $d\varphi \in \Omega^1(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$.*

Z tohoto důvodu se běžně používá označení $\theta_L \equiv g^{-1}dg$. Je zjevné, že ve stejném tvaru platí pro libovolné maticové grupy (tedy podgrupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$).

Důkaz. Nechť $X \in T_mM$. Potom $\varphi^*(\theta_L)|_m(X) = \theta_L|_{\varphi(m)}(\varphi_*(X)) = L_{\varphi(m)^{-1}*}\varphi_*(X)$. Ale Lieova grupa $GL(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ je otevřená podmnožina vektorového prostoru a tedy $\varphi_*(X) \in T_{\varphi(m)}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ je matice $n \times n$, a $L_{\varphi(m)^{-1}*}$ je obyčejné násobení maticí zleva.

Navíc se z definic snadno ukáže, že při ztotožnění $C^\infty(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \equiv \Omega^0(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ dostáváme (explicitním výpočtem) $\varphi_*(X) = d\varphi|_m(X)$ pro všechny $X \in T_mM$. Tedy

$$\varphi^*(\theta_L)|_m(X) = \varphi(m)^{-1} \cdot d\varphi|_m(X), \tag{5.39}$$

což dokazuje tvrzení lemmatu. ∎

Příklad 5.3.11 (Forma křivosti na $F(M)$)**.** Výsledků z předchozího příkladu můžeme využít k analýze případu hlavní fibrace repérů. Pro libovolné lokální pole repérů $f = (f_1, \ldots, f_n)$ na U. Na $\pi^{-1}(U)$ jsme si zavedli funkce $y : \pi^{-1}(U) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ vztahem $e = f|_{\pi(e)} \cdot y(e)$ a psali jsme

$$\omega = y(e)^{-1} \cdot \pi^*(\hat{\omega}) \cdot y(e) + y^{-1}(e) \cdot dy|_e, \tag{5.40}$$

kde $\hat{\omega} \in \Omega^1(M,U)$ je lokální forma konexe na U příslušná poli repérů f. Na celou konstrukci ω můžeme pohlížet následovně. Sestrojíme zobrazení $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ vztahem

$$\psi(e) = (\pi(e), y(e)). \tag{5.41}$$

Jedná se o hladký ekvivariantní difeomorfismus $\pi^{-1}(U)$ a triviální hlavní fibrace $U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. To je snadný důsledek toho, že $\psi = \phi^{-1}$ pro ekvivariantní trivializační zobrazení $\phi : U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U)$ odpovídající hladkému řezu $\sigma(m) = f|_m$ ve shodě s tvrzením 2.3.6. Protože $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$, můžeme na ve shodě s předchozím příkladem sestrojit na triviální fibraci $U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ formu konexe A podle vztahu (5.33), tj.

$$A|_{(m,\mathbf{A})} = Ad_{\mathbf{A}^{-1}} \pi_1^*(\hat{\omega})|_{(m,\mathbf{A})} + \pi_2^*(\theta_L)|_{(m,\mathbf{A})}, \tag{5.42}$$

pro všechny $(m,\mathbf{A}) \in U \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Snadno se ukáže, že ω sestrojená nahoře je potom prostě pullback A zobrazením ψ, tj. $\omega = \psi^*(A)$. To plyne z vlastností $\pi_1 \circ \psi = \pi$, $\pi_2 \circ \psi = y$ a zejména z lemmatu 5.3.10. Protože ψ je ekvivariantní difeomorfismus, snadno se nahlédne, že horizontální zdvihy vzhledem k obou konexím jsou ψ-vztažené, tj. $\psi_*(X^h|_e) = X_A^h|_{\psi(e)}$, kde X^h je zdvih vzhledem ke konexi ω a X_A^h vzhledem k A. Z definice formy konexe je zřejmé, že platí vztah $\Omega = \psi^*(\Omega_A)$. Dostáváme tedy rovnici

$$\{\Omega(X^h, Y^h)\}(e) = \Omega_A(X_A^h, Y_A^h) = Ad_{y(e)^{-1}}\{(d\hat{\omega} + \frac{1}{2}[\hat{\omega} \wedge \hat{\omega}]_{\mathfrak{g}})(X,Y)\}(m). \tag{5.43}$$

Nyní si stačí vzpomenout na tvrzení 3.2.2 a Cartanovy strukturní rovnice, odkud dostáváme vztah $d\hat{\omega} + \frac{1}{2}[\hat{\omega} \wedge \hat{\omega}]_{\mathfrak{g}} = \hat{\Omega}$, kde $\hat{\Omega}$ je lokální forma křivosti (vyrobená z Riemannova tenzoru). Máme tedy rovnici, která nám říká (s použitím definice Ad v maticové grupě):

$$\{\Omega(X^h, Y^h)\}(e) = y(e)^{-1} \cdot \hat{\Omega}(X,Y)(m) \cdot y(e) = \{\big(y^{-1} \cdot \pi^*(\hat{\Omega}) \cdot y\big)(X^h, Y^h)\}(e). \tag{5.44}$$

Hodnoty formy konexe stačí ověřit na horizontální zdvihy vektorových polí a platí tedy rovnost:

$$\Omega = y^{-1} \cdot \pi^*(\hat{\Omega}) \cdot y \tag{5.45}$$

Víme, že levá strana je z definice dobře definovaná a tedy nezávislá od výběru repérového pole f, které používáme na pravé straně. Stejně jako pro formu konexe můžeme původní formy lokální formy konexe (a tedy Riemannův tenzor) získat pomocí pullbacku řezem odpovídajícím repérovému poli f: $\hat{\Omega} = \sigma^*(\Omega)$, kde $\sigma(m) = f|_m$ pro všechny $m \in U$. Zjišťujeme tedy, že pro $F(M)$ je forma křivosti vskutku formou křivosti!

5.4 Kovariantní derivace forem typu ρ

V předchozí sekci jsme ukázali, že kovariantní derivaci 1-formy A lze psát snadno pomocí rovnice (5.18), kde explicitně nevystupuje horizontální distribuce odpovídající konexi A. Můžeme tedy doufat v podobné zjednodušení pro větší třídu diferenciálních forem na P. Ukazuje se, že dobrým kandidátem jsou staré dobré p-formy typu ρ z podsekce 4.4. Ukazuje se však, že musíme přidat jeden předpoklad (jehož ověření už znalost horizontální distribuce vyžaduje).

Tvrzení 5.4.1. *Nechť $\alpha \in \Omega_\rho^p(P,V)$ je* horizontální *p-forma typu ρ, kde (V,ρ) je daná konečněrozměrná reprezentace Lieovy grupy G na prostoru V. Potom*

$$D\alpha = d\alpha + \rho'(A) \mathbin{\dot\wedge} \alpha, \tag{5.46}$$

speciálně pro všechny *veličiny Φ typu ρ platí $D\Phi = d\phi + \rho'(A)\Phi$. Zde ρ' je přidružená reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na V a $\rho'(A) \mathbin{\dot\wedge} \alpha = A^\mu \wedge \alpha^i \cdot \rho'(t_\mu)E_i$, kde $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ a $\{E_i\}_{i=1}^{\dim V}$ jsou libovolné báze $\mathfrak{g}$, respektive V. Pro $p = 0$ nepíšeme zbytečně symbol $\mathbin{\dot\wedge}$.*

Důkaz. Důkaz je podobný ověření (5.18). Dosazujeme vektorová pole $(X_1, \dots, X_{p+1})$. Jsou-li všechna horizontální, máme $\rho'(A) \dot\wedge \alpha = 0$, protože v každém sčítanci ve vnějším součinu poleze horizontální vektorové pole do A a dá nulu. Potom $D\alpha(X_1, \dots, X_{p+1}) = d\alpha(X_1, \dots, X_{p+1})$ z definice D.

Jsou-li mezi vektorovými poli alespoň dvě vertikální, dají obě strany nulu. Levá strana z definice, napravo máme $d\alpha$ a $\rho'(A) \dot\wedge \alpha$. V obou z nich musí (po dosazení do obvyklých formulek pro d a vnější součin) alespoň jedno z vertikálních vektorových polí vlézt do α. Protože je α horizontální, dává podle tvrzení 5.1.3 bod (v) nulu.

Zbývá tedy dokázat tvrzení pro právě jedno vertikální vektorové pole. Můžeme předpokládat, že $X_1 = \#x$. Levá strana je opět rovna nule a vpravo dostáváme

$$\begin{aligned}(d\alpha)(\#x, X_2, \dots, X_{p+1}) &= (i_{\#x} d\alpha)(X_2, \dots, X_{p+1}) = (\mathcal{L}_{\#x}\alpha - d i_{\#x}\alpha)(X_2 \dots, X_{p+1}) \\ &= (\mathcal{L}_{\#x}\alpha)(X_2, \dots, X_{p+1}),\end{aligned} \tag{5.47}$$

kde jsme využili horizontality $i_{\#x}\alpha = 0$. Pro druhý člen na pravé straně máme

$$(\rho'(A) \wedge \alpha)(\#x, X_2, \dots, X_{p+1}) = \rho'(A(\#x))\alpha(X_2, \dots, X_{p+1}) = \rho'(x)\alpha(X_2, \dots, X_{p+1}), \tag{5.48}$$

kde do totální antisymetrizace ve vnějším součinu přispěje pouze jeden člen opět z důvodu horizontality α. Pravá strana je tedy nulová pokud $\mathcal{L}_{\#x}\alpha + \rho'(x)\alpha = 0$. Ale to je dle lemmatu 5.3.3 důsledek toho, že α je typu ρ.

Každá veličina typu ρ je 0-forma typu ρ a tedy automaticky horizontální. Právě dokázané lze tedy na 0-formy aplikovat vždy. ■

Důsledek 5.4.2 (Vyjádření Bianchiho identity)**.** *Forma křivosti Ω konexe A splňuje rovnici*

$$d\Omega + [A \wedge \Omega]_{\mathfrak{g}} = 0. \tag{5.49}$$

Důkaz. Forma křivosti je horizontální 2-forma typu Ad. Zde $\rho' = ad$ a tedy máme $\rho'(A) \dot\wedge \Omega = [A \wedge \Omega]_{\mathfrak{g}}$. Potom zbývá aplikovat předchozí tvrzení a použít Bianchiho identitu (5.19). ■

Příklad 5.4.3 (Vnější kovariantní derivace vektorových polí)**.** Ukázali jsme si, že vektorová pole lze interpretovat jako veličinu typu ρ, kde $V = \mathbb{R}^n$ a $\rho(\mathbf{A})x = \mathbf{A}.x$. Ukažme si, jak explicitně vypadá vnější kovariantní derivace Φ_X, kde $X \in \mathfrak{X}(M)$ je odpovídající vektorové pole.

Budeme pracovat lokálně na $\pi^{-1}(U)$, kde $(U, (x^1, \dots, x^n))$ jsou lokální souřadnice na M. Nechť $X = X^i\partial_i$. Ukázali jsme, že potom $\Phi_X(\partial|_m) = (X^1(m), \dots, X^n(m))^T$. Ukážeme si, že platí následující rovnost:

$$\langle D(\Phi_Y), X^h\rangle = \Phi_{\nabla_X Y}, \tag{5.50}$$

kde ∇ je afinní konexe kterou máme na $F(M)$ kódovanou pomocí formy konexe ω. Minule jsme ukázali, že horizontální zdvih $X = X^i\partial_i$ má lokálně explicitní tvar

$$X^h|_e = X^i(\pi(e))\{\partial_i|_e - \Gamma^a_{li}(\pi(e))y^l_b(e)\partial^b_a|_e\}, \tag{5.51}$$

kde $e = \partial|_{\pi(e)} \cdot y(e)$. Veličina Φ_Y je definována pomocí komponent $Y = Y^i\partial_i$ vztahem

$$\Phi_Y(\partial|_m) = (Y^1(m), \dots, Y^n(m))^T. \tag{5.52}$$

Pro obecný bod $e \in \pi^{-1}(U)$ tedy dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned}\Phi_Y(e) &= \Phi_Y(\partial|_{\pi(e)} \cdot y(e)) = \rho(y(e)^{-1})\Phi_Y(\partial|_{\pi(e)}) = y(e)^{-1}.(Y^1(\pi(e)), \dots, Y^n(\pi(e)))^T \\ &= (y^{-1})^i_j(e) \cdot Y^j(\pi(e))\, E_i.\end{aligned} \tag{5.53}$$

Odtud dostáváme následující vztah pro pro vnější kovariantní derivaci:

$$\langle D(\Phi_Y)^i, X^h\rangle(e) = \{X^h.\Phi_Y^i\}(e) = \{X^h.(y^{-1})^i_j\}(e)\cdot Y^j(\pi(e)) + (y^{-1})^i_j(e)\cdot\{X^h.(Y^j\circ\pi)\}(e). \tag{5.54}$$

Druhý člen je snadný, protože pro každé $f\in C^\infty(M)$ máme $X^h.(f\circ\pi) = (X.f)\circ\pi$, což plyne z vlastnosti $X^h\sim_\pi X$. V prvním se využije obvyklá rovnice:

$$X^h.(y^{-1})^i_j = -(y^{-1})^i_k\ (X^h.y^k_l)\ (y^{-1})^l_j. \tag{5.55}$$

Toto platí pro libovolnou funkci s hodnotami v maticích a libovolné vektorové pole. Potom se využije, že $X^h.y^k_l = \langle dy^k_l, X^h\rangle$ jsou přesně komponenty X^h příslušné ∂^k_l a tedy

$$(X^h.y^k_l)(e) = -X^q(\pi(e))\ \Gamma^k_{mq}(\pi(e))\ y^m_l(e). \tag{5.56}$$

Dosazením zpět dostáváme vyjádření

$$\{X^h.(y^{-1})^i_j\}(e) = X^q(\pi(e))\ (y^{-1})^i_k(e)\ \Gamma^k_{jq}(\pi(e)). \tag{5.57}$$

Konečně můžeme dosadit do výrazu pro kovariantní derivaci a obdržíme

$$\langle D(\Phi_Y)^i, X^h\rangle(e) = X^q(\pi(e))\{(y^{-1})^i_j(e)(Y^j_{,q})(\pi(e)) + (y^{-1})^i_k(e)\Gamma^k_{jq}(\pi(e))Y^j(\pi(e))\}. \tag{5.58}$$

Hledáme $V\in\mathfrak{X}(M)$ splňující rovnici $\langle D(\Phi_Y), X^h\rangle(e) = \Phi_V(e)$. Komponenty $V^i(m)$ dostaneme vyčíslením pravé strany na $e=\partial|_m$ a následným odečtem i-tého prvku výsledného vektoru v $\mathbb{R}^n$. Dosazením do levé strany potom

$$\begin{aligned} V^i(m) &= \langle D(\Phi_Y)^i, X^h\rangle(\partial|_m) = X^q(m)\{\delta^i_j Y^j_{,q}(m) + \delta^i_k\Gamma^k_{jq}(m)Y^j(m)\}\\ &= \{X^q(Y^i_{,q} + \Gamma^i_{jq}Y^j)\}(m) \equiv (\nabla_X Y)^i(m). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Dokázali jsme tedy rovnost (5.50). Isomorfismus $\mathfrak{X}(M)\cong\Omega^0_\rho(F(M),\mathbb{R}^n)$ nám tedy umožňuje přímým výpočtem pomocí D vyjádřit kovariantní derivaci ∇_X s kterou jsme začali v první řadě.

Jelikož pro horizontální formu typu ρ je její kovariantní derivace zřejmě opět horizontální forma typu ρ, můžeme se ptát co se stane, když znovu aplikujeme D a použijeme stejný vzorec.

Tvrzení 5.4.4 (Ricciho identita)**.** *Pro libovolnou horizontální p-formu α typu ρ, kde (V,ρ) je konečně-rozměrná reprezentace G na V, platí identita*

$$D^2\alpha = \rho'(\Omega)\ \dot\wedge\ \alpha. \tag{5.60}$$

kde $\Omega\in\Omega^2(P,\mathfrak{g})$ je forma křivosti. Speciálně pro všechny $\Phi\in\Omega^0_\rho(P,V)$ platí $D^2\Phi = \rho'(\Omega)\Phi$.

Důkaz. Dvojitou aplikací (5.46) dostáváme výraz

$$\begin{aligned} D^2\alpha &= D(d\alpha + \rho'(A)\ \dot\wedge\ \alpha) = d(d\alpha + \rho'(A)\ \dot\wedge\ \alpha) + \rho'(A)\wedge d\alpha + \rho'(A)\ \dot\wedge\ \alpha)\\ &= \rho'(dA)\ \dot\wedge\ \alpha + \rho'(A)\ \dot\wedge\ (\rho'(A)\ \dot\wedge\ \alpha). \end{aligned} \tag{5.61}$$

Přímo z definice se dá s užitím definice reprezentace Lieovy algebry ukázat, že

$$\rho'(A)\ \dot\wedge\ (\rho'(A)\ \dot\wedge\ \alpha) = \frac{1}{2}\rho'([A\wedge A]_\mathfrak{g})\ \dot\wedge\ \alpha. \tag{5.62}$$

Po dosazení zpět tedy dostáváme $D^2\alpha = \rho'(dA + \frac{1}{2}[A\wedge A]_\mathfrak{g})\ \dot\wedge\ \alpha = \rho'(\Omega)\ \dot\wedge\ \alpha$. ■

Příklad 5.4.5 (Ricciho identita pro $F(M)$)**.** Uvažujme opět $P = F(M)$ s konexí ω odpovídající ∇ a $(V, \rho) = (\mathbb{R}^n, \rho)$, kde $\rho(\mathbf{A})x = \mathbf{A}.x$, tak že $\Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{X}(M)$. Použitím (5.50) a předchozího tvrzení dostáváme pro $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ rovnost

$$\Phi_{\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z} = \Omega(X^h, Y^h).\Phi_Z \tag{5.63}$$

Komponenty odpovídajících vektorových polí v bodě m dostaneme vyčíslením obou funkcí v bodě $e = \partial|_m$ a odečtem i-té komponenty. S využitím (5.44) potom dostáváme

$$\{\nabla^i_X(\nabla_Y Z) - \nabla^i_Y(\nabla_X Z) - \nabla^i_{[X,Y]}Z\}(m) = \{\hat{\Omega}^i_j(X, Y)\}(m)Z^j(m) = \langle dx^i, R(X, Y)Z\rangle. \tag{5.64}$$

Dostáváme tedy přesně to, čemu se říká Ricciho identita (pro nás definice Riemannova tenzoru).

5.5 Integrabilita paralelního přenosu, holonomie

Na paralelní přenos, t.j. horizontální zdvih křivek se můžeme dívat následovně. Zvolíme si libovolné vlákno P_m pro $m \in M$ a bod $p \in P$. Chceme definovat přenos bodu p do jiného vlákna $P_{m'}$ pro $m' \in M$. Zvolím si (po částech hladkou) křivku $\gamma : I \to M$ s vlastností $\gamma(0) = m$ a $\gamma(1) = m'$.

Podle věty 4.3.5 existuje unikátní křivka $\gamma^h : I \to M$ s vlastností $\gamma^h(0) = p$ a $\pi \circ \gamma^h = \gamma$. Z konstrukce je $\gamma^h(1) \in P_{m'}$ a my tedy můžeme definovat paralelní přenos jako $\tau^\gamma_{m,m'}(p) = \gamma^h(1)$. Pro danou křivku γ takhle můžu zobrazit každý bod $p \in P_m$ dostávám tedy (hladké) zobrazení obou vláken $\tau^\gamma_{m,m'} : P_m \to P_{m'}$. Snadno se ukáže, že je to dokonce difeomorfismus, protože horizontálními zdvihy křivky $\gamma'(t) := \gamma(1-t)$ s použitím jednoznačnosti můžu definovat inverzní zobrazení, t.j. $\tau^{\gamma'}_{m',m} = (\tau^\gamma_{m,m'})^{-1}$.

Nyní se můžeme oprávněně ptát, jestli definice $\tau^\gamma_{m,m'}$ závisí od výběru křivky γ spojující body m a m'. Odpověď poskytneme v této sekci. Nejprve si musíme trošičku vylepšit vlastnosti integrabilních distribucí.

Definice 5.5.1. Nechť M je hladká varieta. Potom $\mathcal{F}$ se nazývá **k-rozměrná foliace** M, pokud $\mathcal{F}$ je soubor vzájemně disjunktních neprázdných souvislých vnořených k-rozměrných podvariet M, takových, že $M = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$.

Každý bod $m \in M$ navíc musí mít souřadnicové okolí $(U, \varphi) = (U, (x^1, \dots, x^n))$ takové, že $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ je n-rozměrná krychle a pro každé $F \in \mathcal{F}$ je $F \cap U$ buď prázdná množina, nebo spočetné sjednocení k-rozměrných „plátků“ ve tvaru $S = \{q \in U \mid x^{k+1}(q) = c^1(q), \dots x^n = c^n(q)\}$. Podvarietám $F \in \mathcal{F}$ se říká **listy foliace**.

Frobeniova věta nám dávala integrabilitu distribuce, t.j. každý bod leží v nějaké integrální podvarietě. Následující věta nám dává mnohem silnější tvrzení.

Věta 5.5.2 (Globální Frobeniova věta)**.** *Nechť D je integrabilní k-rozměrná distribuce. Potom*

$$\mathcal{F}_D = \{N \subseteq M \mid N \text{ je maximální souvislá integrální podvarieta distribuce } D\}. \tag{5.65}$$

je k-rozměrná foliace variety M.

Maximalita znamená, že $N \in \mathcal{F}_D$ není obsažená v žádné další souvislé integrální podvarietě. Vzhledem k vlastnostem $\mathcal{F}_D$ je každý bod $m \in M$ obsažený *právě v jedné* souvislé maximální integrální podvarietě, kterou můžeme označovat jako N_m. Platí tedy například pravidlo, že pokud $m' \in N_m$, máme $N_m = N_{m'}$. Horizontální distribuce má ještě jednu význačnou vlastnost. Je totiž G-invariantní. V následujícím se nám bude hodit následující pomocné lemma:

Lemma 5.5.3. *Nechť D je libovolná k-rozměrná integrabilní hladká distribuce v P, která je G-invariantní ve smyslu $R_{g*}(D_p) = D_{p\cdot g}$ pro všechny $p \in P$ a $g \in G$.*

Potom příslušná foliace $\mathcal{F}_D$ splňuje vlastnost $N_{p\cdot g} = R_g(N_p)$, tj. listy foliace příslušné p a $p \cdot g$ jsou vzájemně difeomorfní a vztaženy akcí grupy G.

Nyní si musíme ujasnit, že otázka nezávislosti paralelního přenosu z daného vlákna P_m do nějakého dalšího vlákna P'_m na křivce γ se dá ekvivalentně přeformulovat jako nezávislost paralelního přenosu z P_m do P_m pomocí uzavřené smyčky $\gamma : I \to M$, tj. $\gamma(0) = \gamma(1) = m$.

Lemma 5.5.4. *Paralelní přenos $\tau^{\gamma}_{m,m'}$ pro daný bod $m \in M$ a libovolný bod $m' \in M$ nezávisí na volbě křivky $\gamma : I \to M$ s $\gamma(0) = m$ a $\gamma(1) = m'$, právě tehdy když pro každou uzavřenou smyčku $\gamma' : I \to M$, takovou že $\gamma'(0) = \gamma'(1) = m$ máme $\tau^{\gamma'}_{m,m} = 1_{P_m}$.*

Důkaz. Jeden směr je triviální. Předpokládejme, že paralelní přenos do libovolného bodu m' nezávisí na volbě γ, a nechť γ' je smyčka s počátkem v M. Ale konstantní křivka $\gamma_c(t) = m$ pro všechny $t \in I$ má pro každé p horizontální zdvih v podobě konstantní křivky v p. Podle předpokladu tedy

$$\tau^{\gamma'}_{m,m}(p) = \tau^{\gamma_c}_{m,m}(p) = p. \tag{5.66}$$

Opačně, nechť γ_1 a γ_2 jsou dvě křivky spojující m a m', nechť $p \in P_m$ a $p_1 = \gamma_1^h(1)$, $p_2 = \gamma_2^h(1)$. Musíme ukázat, že $p_1 = p_2$. Křivka $\gamma' = \gamma_2^{-1} \star \gamma_1$ definovaná vztahem

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t)\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2(1-t))\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{5.67}$$

je uzavřená smyčka v počátkem v m. Protože p_2 a p_1 jsou ve stejném vlákně, máme $p_2 = p_1 \cdot g$ pro unikátní $g \in G$. Musíme nyní sestrojit horizontální zdvih γ' startující z p. Protože γ_2^h končí v jiném bodě než γ_1^h, nemůžeme složit γ_1^h s $(\gamma_2^h)^{-1}$. Můžeme ale uvažovat křivku $\hat{\gamma}_2^h(t) = \gamma_2^h(t) \cdot g$, která už splňuje $\hat{\gamma}_2^h(1) = \gamma_1^h(1)$. Navíc je horizontální, protože $\mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P) = R_{g*}(\mathrm{Hor}_p(P))$. Snadno se nahlédne, že $\gamma'^h := (\hat{\gamma}_2^h)^{-1} \star \gamma_1^h$ je horizontální zdvih γ' startující z bodu p. Potom

$$\tau^{\gamma'}_{m,m}(p) = \gamma'^h(1) = \hat{\gamma}_2^h(0) = \gamma_2^h(0) \cdot g = p \cdot g. \tag{5.68}$$

Podle předpokladu je ale $\gamma^{\gamma'}_{m,m} = 1_{P_m}$, odkud plyne $p = p \cdot g$. Jelikož je akce volná, dostáváme $g = e$ a konečně $p_2 = p_1$. ∎

Nyní si musíme pořádně rozmyslet, jak funguje horizontální zdvih křivek ve vztahu k *integrabilní* horizontální distribuci. Nechť $m \in M$ je fixní bod. Předpokládejme, že $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ definuje integrabilní distribuci, tj. $\Omega = 0$. Ukážeme si, že pro body dostatečně blízko $m \in M$ je paralelní přenos **integrabilní**, tj. nezávisí na volbě křivky, která daný bod m' spojuje s M.

Tvrzení 5.5.5. *Nechť $m \in M$. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Potom existuje okolí U bodu m, že pro libovolné dvě křivky $\gamma, \gamma' : I \to U$ splňující $\gamma(0) = \gamma'(0) = q$ a $\gamma(1) = \gamma'(1) = q'$ platí $\tau^{\gamma}_{q,q'} = \tau^{\gamma'}_{q,q'}$.*

Důkaz. Zvolíme si $p \in \pi^{-1}(m)$ libovolný. Jelikož Hor je integrabilní distribuce, existuje maximální souvislá integrální podvarieta N_p příslušná bodu p. Nechť $\pi' \equiv \pi|_{N_p} : N_p \to M$ je restrikce π na podvarietu N_p. Z horizontality $T_q(N_p) \equiv \mathrm{Hor}_q(P)$ plyne, že π' je lokální difeomorfismus. Existuje tedy okolí $V \subseteq N_p$ bodu p a $U \subseteq M$ bodu $m = \pi(p)$, že $\pi'|_V : V \to U$ je difeomorfismus. Je-li $\gamma : I \to U$, definujeme $\gamma^h(t) = (\pi'|_V)^{-1}(\gamma(t))$. Máme tedy $\gamma^h : I \to V \subseteq N_p$.

Po složení s vnořením $N_p \hookrightarrow P$ dostáváme hladkou křivku která je v každém bodě horizontální a projektuje se zpět na γ. Nechť $\gamma^h(0) = r$. Je-li γ' libovolná jiná křivka se stejnými koncovými body, máme $\gamma'^h(0) = (\pi'|_V)^{-1}(\gamma'(0)) = (\pi'|_V)^{-1}(\gamma(0)) = \gamma^h(0) = r$, a stejně se ukáže, že mají stejný koncový bod. To dokazuje $\tau^{\gamma}_{q,q'}(r) = \tau^{\gamma'}_{q,q'}(r)$. Ale zbytek plyne z G-ekvivariance paralelního přenosu. Je-li $r' \in P_q$, potom existuje unikátní $g \in G$, že $r' = r \cdot g$. Platí

$$\tau^{\gamma}_{q,q'}(r') = \tau^{\gamma}_{q,q'}(r) \cdot g = \tau^{\gamma'}_{q,q'}(r) \cdot g = \tau^{\gamma'}_{q,q'}(r'). \tag{5.69}$$

A máme dokázáno! ■

Vidíme, že pro křivky v dostatečně malém okolí bodu m zaručí integrabilita Hor nezávislost paralelního přenosu na křivkách v tomto okolí. Můžeme se tedy oprávněně ptát, jak je to pro obecnou křivku spojující libovolné dva body q a q'. Obecná odpověď je záporná, jak si ukážeme na příkladu. Pro správné tvrzení si musíme definovat následující pojem.

Definice 5.5.6. Nechť M je hladká varieta a nechť $\gamma, \gamma' : I \to M$ jsou dvě hladké křivky, takové že $\gamma(0) = \gamma'(0)$ a $\gamma(1) = \gamma'(1)$, tj. jejich začátky a konce jsou stejné.

Řekneme, že γ a γ' jsou **homotopické**, existuje-li hladké zobrazení $h : I \times I \to I$, takové že

(i) $h(t,0) = \gamma(t)$, $h(t,1) = \gamma'(t)$. Jinými slovy $h|_{I\times\{0\}} = \gamma$ a $h|_{I\times\{1\}} = \gamma'$.

(ii) $h(0,s) = \gamma(0) = \gamma'(0)$ a $h(1,s) = \gamma(1) = \gamma'(1)$. Jinak řečeno, dostáváme třídu hladkých křivek $h_s(t) := h(t,s)$, které všechny začínají a končí ve stejném bodě a $h_0 = \gamma$ a $h_1 = \gamma'$.

Budeme psát $\gamma \sim_h \gamma'$. Speciálně pokud γ je smyčka (tedy $\gamma(0) = \gamma(1)$), řekneme, že γ je **homotopická nule**, pokud $\gamma \sim_h 0$, kde $0(t) \equiv \gamma(0) \equiv \gamma(1)$ je konstantní křivka.

Poznámka 5.5.7. Všimněte si, že předpokládáme hladkost homotopie h. Většinou se homotopie definují pouze jako spojitá zobrazení. Zejména jsou zajímavé prostory, kde je každá (spojitá) smyčka (spojitě) homotopická nule, kterým se říká **jednoduše souvislé**. Kupodivu se dá ukázat, že tato vlastnost je plně ekvivalentní tvrzení, že každá hladká smyčka je hladce homotopická nule.

Nyní již můžeme vyslovit následující tvrzení, které dává správnou odpověď na předchozí otázku.

Tvrzení 5.5.8. *Nechť $m \in M$ je libovolný bod, a $\pi : P \to M$ nechť je hlavní fibrovaný prostor vybavený plochou konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Nechť γ a γ' jsou libovolné hladké křivky takové, že $\gamma(0) = \gamma'(0) = m$ a $\gamma(1) = \gamma(1') = m'$. Navíc předpokládejme, že $\gamma \sim_h \gamma'$. Potom $\tau^{\gamma}_{m,m'} = \tau^{\gamma'}_{m,m'}$.*

Důkaz. Důkaz tvrzení si pouze načrtneme. Vezmeme homotopii $h : I \times I \to M$ dvou zadaných křivek γ a γ'. Nechť $h_s = h(\cdot, s)$ a $h'_t = h(t, \cdot)$ jsou dvě příslušné třídy hladkých křivek.

S využitím kompaktnosti 'mýdlové bubliny' $h(I \times I) \subseteq M$ a tvrzení 5.5.5 vyrobíme rozdělení $[0,1] \subseteq I$ a v podobě $0 = t_1 < \cdots < t_q = 1$ a $0 = s_1 < \cdots < s_r = 1$, tak, že paralelní přenos po dvou (po částech hladkých) křivkách $h_{s_i}|_{[t_j,t_{j+1}]}$ a $h'_{t_{j+1}}|_{[s_i,s_{i+1}]}$ (tj. po dolní a pravé hraně obdélníku $h([t_j, t_{j+1}] \times [s_i, s_{i+1}])$) je stejný jako po dvou křivkách $h'_{t_j}|_{[s_i,s_{i+1}]}$ a $h_{s_{i+1}}|_{[t_j,t_{j+1}]}$ (tj. po levé a horní straně téhož obdélníku). S použitím tohoto umíme ukázat, že paralelní přenos podél křivky $\gamma = h_0 = h_{s_1}$ je stejný jako podél h_{s_2}, který je stejný jako podél h_{s_3} atd.. ■

Příklad 5.5.9 (Neintegrabilita pro integrabilní distribuci)**.** Ukážeme si, že opravdu musíme uvažovat pouze vzájemně homotopní křivky. Vezmeme si M v podobě pláště kužele bez špičky (jako podmnožiny $\mathbb{R}^3$) a $\pi : F(M) \to M$. Konexi A bude odpovídat standardní Levi-Civitova konexe ∇ odpovídající indukované metrice na $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Nechť a je výška kužele a R jeho poloměr. Lokální souřadnice na M jsou (z, φ), kde $z \in (0, a)$ udává jak vysoko nad rovinou (x, y) se nacházíme a φ je standardní polární souřadnice. Vložení M do $\mathbb{R}^3$ má v souřadnicích tvar

$$x = \frac{R}{a}(a - z)\cos(\varphi), \quad y = \frac{R}{a}(a - z)\sin(\varphi), \quad z = z. \tag{5.70}$$

Indukovaná metrika na M dopadne následovně. Nejprve si vezmeme standardní metriku v E^3 zapsanou v cylindrických souřadnicích (r, φ, z):

$$g_{E^3} = dr \otimes dr + dz \otimes dz + r^2 d\varphi \otimes d\varphi. \tag{5.71}$$

Přechod (pullback) do kužele M pak spočívá v substituci $r(z) = \frac{R}{a}(a - z)$. Potom $dr = -\frac{R}{a}dz$ a dostáváme

$$g = (R/a)^2\{(1 + (a/R)^2)dz \otimes dz + (z - a)^2 d\varphi \otimes d\varphi\}. \tag{5.72}$$

Nyní je celkem přímočaré spočítat Christoffelovy symboly Levi-Civitovy konexe podle obvyklých formulek. Dostaneme následující:

$$\Gamma^{\varphi}_{z\varphi} = (z - a)^{-1}, \quad \Gamma^{z}_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{1 + (a/R)^2}(z - a). \tag{5.73}$$

Jinými slovy, netriviální jsou pouze následující kovariantní derivace:

$$\nabla_{\partial_z}(\partial_\varphi) = \nabla_{\partial_\varphi}(\partial_z) = (z - a)^{-1}\partial_\varphi, \quad \nabla_{\partial_\varphi}(\partial_\varphi) = -\frac{1}{1 + (a/R)^2}(z - a)\partial_z. \tag{5.74}$$

Z důvodu antisymetrie operátoru křivosti stačí vypočítat kombinaci $R(\partial_\varphi, \partial_z)$. Máme

$$\begin{aligned} R(\partial_\varphi, \partial_z)\partial_\varphi &= \nabla_{\partial_\varphi}((z - a)^{-1}\partial_\varphi) + \nabla_{\partial_z}(\frac{1}{1 + (a/R)^2}(z - a)\partial_z) \\ &= -\frac{1}{1 + (a/R)^2}\partial_z + \frac{1}{1 + (a/R)^2}\partial_z = 0. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Hodnota operátoru $R(\partial_\varphi, \partial_z)$ na ∂_z vyjde nula podobným výpočtem a dostáváme $R = 0$.

Horizontální distribuce v tomto případě *je integrabilní*. Nyní si vezmeme následující uzavřenou a hladkou smyčku $\gamma : [0, 1] \to M$.

$$z(t) = z(\gamma(t)) = z_0, \quad \varphi(t) = \varphi(\gamma(t)) = 2\pi t. \tag{5.76}$$

Jedná se tedy o křivku co jednou obtočí kužel ve výšce z_0. Chceme paralelně přenášet tečný vektor $(V^z, V^\varphi) \in T_{(z_0,0)}M$ podél křivky $\gamma(t)$. Nechť $V^z(t)$ $V^\varphi(t)$ označují komponenty paralelně rozneseného tečného vektoru podél křivky γ. Nyní ukážeme, že $(V^z(1), V^\varphi(1)) \neq (V^z(0), V^\varphi(0)) \equiv (V^z, V^\varphi)$. Rovnice paralelního přenosu dává

$$\dot{V}^z(t) + \dot{\varphi}(t)\Gamma^{z}_{\varphi\varphi}(t)V^\varphi(t) = 0, \quad \dot{V}^\varphi(t) + \dot{z}(t)\Gamma^{\varphi}_{z\varphi}(t)V^\varphi(t) + \dot{\varphi}(t)\Gamma^{\varphi}_{\varphi z}(t)V^z(t) = 0. \tag{5.77}$$

Po dosazení do obou rovnic dostáváme

$$\dot{V}^z(t) + \frac{2\pi(a - z_0)}{1 + (a/R)^2}V^\varphi(t) = 0, \quad \dot{V}^\varphi(t) - \frac{2\pi}{(a - z_0)}V^z(t) = 0. \tag{5.78}$$

To je ale vede standardním postupem na dvě rovnice druhého řádu:

$$\ddot{V}^z(t) + \frac{4\pi^2 R^2}{R^2+a^2} V^z(t) = 0, \quad \ddot{V}^\varphi(t) + \frac{4\pi^2 R^2}{R^2+a^2} V^\varphi(t) = 0. \tag{5.79}$$

To je ale standardní harmonický pohyb, tj. dostáváme rotaci vektoru $V = (V^z, V^\varphi)$ v rovině (z, φ). Explicitně, s troškou počítání:

$$V^z(t) = V^z \cos(2\pi\omega t) + \omega(a - z_0) V^\varphi \sin(2\pi\omega t), \tag{5.80}$$

$$V^\varphi(t) = V^\varphi \cos(2\pi\omega t) + (\omega(a - z_0))^{-1} V^z \sin(2\pi\omega t), \tag{5.81}$$

kde $\omega = R/\sqrt{R^2+a^2}$ je kosinus úhlu mezi podstavou a pláštěm kužele M. Všimněte si, že paralelní přenos je integrabilní právě tehdy když $\omega \in \mathbb{Z}$, což ale nemůže nastat pro kužel, kde vždycky $0 < \omega < 1$.

Cvičení 5.5.10. *Zkuste si celou diskuzi pro válec a ukažte, že v tomto případě žádný problém nenastane. Tento výsledek se dá dostat i vtipným trikem. Válec je totiž kužel, kde $a \to \infty$. Potom $\omega = 0$ a paralelně přenášený vektor je konstantní.*

Problém neintegrability paralelního přenosu lze formalizovat následujícím způsobem. Definujeme relaci ekvivalence na P následovně. Řekneme, že $p \sim q$, pokud existuje po částech hladká křivka $\gamma : [0,1] \to M$, taková, že $\gamma(0) = \pi(p)$, $\gamma(1) = \pi(q)$, a $q = \tau^\gamma_{\pi(p),\pi(q)}(p)$. Definujeme

$$\mathrm{Hol}_p(A) = \{g \in G \mid p \cdot g \sim p\} \subseteq G. \tag{5.82}$$

Množina $\mathrm{Hol}_p(A)$ se nazývá **grupou holonomie** konexe A v bodě $p \in P$.

Lemma 5.5.11. $\mathrm{Hol}_p(A)$ *je Lieova podgrupa G. Její komponenta souvislosti obsahující jednotku $e \in G$ se nazývá* ***redukovaná grupa holonomie*** $\mathrm{Hol}^0_p(A)$ *a sestává se z prvků* $\mathrm{Hol}_p(A)$ *kde povolíme ekvivalenci jen pomocí křivek homotopických nule (kontraktibilních).*

Důkaz. Ukážeme si jen, že $\mathrm{Hol}_p(A)$ tvoří grupu. Zjevně $p \sim p$, protože jde o relaci ekvivalence (což plyne z toho, že horizontální zdvih konstantní smyčky zajistí triviální paralelní přenos p na p). Odtud $e \in \mathrm{Hol}_p(A)$. Inverzi nám zajistí paralelní přenos po smyčce $\gamma'(t) = \gamma(1-t)$ a uzavřenost na grupový součin vyrobí složení navázání dvou smyček γ_1 a γ_2 (s následnou reparametrizací). ■

Cvičení 5.5.12. *Rozmyslete si, že pro $p' = p \cdot h$ platí* $\mathrm{Hol}_{p'}(A) = I_{h^{-1}}(\mathrm{Hol}_p(A))$.

Z tvrzení 5.5.8 plyne, že pro integrabilní konexi A dostáváme $\mathrm{Hol}^0_p(A) = 0$ pro všechny $p \in P$. Rovněž jsme si ukázali, že tvrzení neplatí pro celou grupu $\mathrm{Hol}_p(A)$. Existuje způsob, jak grupu holonomie (její algebru) přímo vypočítat z formy křivosti. Výslednou větu uvádíme bez důkazu:

Věta 5.5.13 (Ambrose-Singer)**.** *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor, kde M je souvislá. Nechť $p \in P$ je libovolný bod. Nechť $\Gamma(p) = \{q \in P \mid q \sim p\}$. Potom*

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Hol}_p(A)) = \cup_{q \in \Gamma(p)} \mathrm{Im}(\Omega|_q) \subseteq \mathfrak{g}. \tag{5.83}$$

Odtud dostáváme důležitý důsledek:

Důsledek 5.5.14. *Je-li $\mathrm{Hol}^0_p(A) = 0$ pro každý bod $p \in P$, máme $\Omega = 0$.*

Důkaz. Pokud je redukovaná grupa holonomie nulová, máme $0 = \mathrm{Lie}(\mathrm{Hol}_p^0(A)) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Hol}_p(A))$ pro každé $p \in P$. Pro libovolné p tedy podle Ambrose-Singerovy věty platí $\mathrm{Im}(\Omega|_q) = 0$ pro všechny $q \in \Gamma(p)$. Speciálně $\mathrm{Im}(\Omega|_p) = 0$. Odtud $\Omega = 0$. ■

Konečně, ukazuje se, že pro souvislou varietu M můžeme jednoduše vztáhnout grupy holonomie v různých vláknech.

Lemma 5.5.15. *Nechť M je souvislá varieta. Pak pro libovolné dva body p a p' existuje (nekanonický) isomorfismus $\mathrm{Hol}_p(A) \cong \mathrm{Hol}_{p'}(A)$.*

Důkaz. Pro p' a p v jednom vlákně jsou grupy holonomie adjungované prvkem unikátním prvkem grupy g. Snadno je vidět, že pro $q \sim p$ platí $\mathrm{Hol}_q(A) \cong \mathrm{Hol}_p(A)$. Ale pro souvislou varietu M vždy existuje hladká křivka γ spojující libovolné dva body $m, m' \in M$. Její horizontální zdvih do bodu $p \in P_m$ potom zajistí $p \sim q \equiv \gamma^h(1) \in P_{m'}$. To nám spojí izomorfismem grupy holonomie ve dvou různých vláknech P_m a $P_{m'}$. ■

Příklad 5.5.16. Jako další příklad si ukážeme neintegrabilní horizontální distribuci s neintegrabilním paralelním přenosem a spočítáme si grupu holonomie explicitně.

Budeme uvažovat téměř hloupoučkou triviální hlavní fibraci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kde $\pi(x, y, z) = (x, y)$, $G = (\mathbb{R}, +)$ a akci $R_a(x, y, z) = (x, y, z + a)$. Fundamentální vektorové pole příslušné $\alpha \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}$ je $\#\alpha = \alpha \cdot \partial_z$. Formou konexe A je tedy obyčejná 1-forma na $\mathbb{R}^3$. Definujeme

$$A = dz + xdy - ydx. \tag{5.84}$$

Máme $A(\#\alpha) = \alpha$ a $R_a^*(A) = A \equiv Ad_{a^{-1}}(A)$. A je tedy formou konexe. Horizontální podprostor v bodě (x, y, z) má tvar $\mathrm{Hor}_{(x,y,z)}\,\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\{(\partial_y - x\partial_z), (\partial_x + y\partial_z)\}$. Horizontální distribuce je tedy (globálně) generovaná dvojicí vektorových polí $e_1 = \partial_y - x\partial_z$ a $e_2 = \partial_x + y\partial_z$. Máme

$$[e_1, e_2] = 2\partial_z. \tag{5.85}$$

To ukazuje, že $\mathrm{Hor}(\mathbb{R}^3)$ není v tomto případě integrabilní. Forma křivosti Ω je jednoduše:

$$\Omega = dA = 2 \cdot dx \wedge dy \neq 0. \tag{5.86}$$

Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ je libovolný bod.

Protože je $M = \mathbb{R}^2$ souvislá a jednoduše souvislá, stačí vypočítat grupu holonomie v jednom bodě $P = \mathbb{R}^3$, řekněme $(0, 0, 0)$.

(i) Nejprve si ujasníme, že $(0, 0, z_0) \sim (x_0, y_0, z_0)$ pro libovolný bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Spojím bod $(0, 0)$ a (x_0, y_0) úsečkou $\gamma(t) = (x_0 t, y_0 t)$. Horizontální zdvih $\gamma^h(t)$ startující z bodu $(0, 0, z_0)$ tedy musí mít tvar $\gamma^h(t) = (x_0 t, y_0 t, z(t))$ pro $z(0) = z_0$. Podmínka horizontality dá ale $\dot{z}(t) = 0$, a tedy $z(t) = z(0) = z_0$. Tedy $\gamma^h(t) = (x_0 t, y_0 t, z_0)$. Máme $\gamma^h(1) = (x_0, y_0, z_0)$, což dokazuje naše tvrzení.

(ii) Uvažujme nyní bod $(a, 0)$ pro $a > 0$ a smyčku $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$. Zajímá nás její horizontální zdvih γ^h do bodu $(a, 0, 0)$. Dostaneme $\gamma^h(t) = (a\cos(t), a\sin(t), z(t))$ kde $z(0) = 0$. Podmínka horizontality dává rovnici $\dot{z}(t) = -a^2$. Odtud $\gamma^h(t) = (a\cos(t), a\sin(t), -a^2 t)$. Máme $\gamma^h(1) = (a, 0, -a^2)$. To nám dává $(a, 0, 0) \sim (a, 0, -a^2)$.

(iii) S použitím (i) a (ii) dostáváme $(0, 0, 0) \sim (a, 0, 0) \sim (a, 0, -a^2) \sim (0, 0, -a^2)$. Odtud dostáváme $-a^2 \in \mathrm{Hol}_{(0,0,0)}(A)$. Protože je to podgrupa, musíme mít

$$\{0, -a^2, a^2\} \in \mathrm{Hol}_{(0,0,0)}(A). \tag{5.87}$$

Konečně, a je libovolné a tedy $\mathrm{Hol}_{(0,0,0)}(A) = \mathbb{R} = G$.

Kapitola 6

Kalibrační teorie

6.1 Lokální formy, kalibrační transformace

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Nechť $\sigma : U \to P$ je lokální řez hlavní fibrace. Výběru takového řezu říkáme **volba kalibrace na** U. Pomocí řezu můžeme udělat pullback forem konexe a křivosti. Definujeme:

$$\mathcal{A} = \sigma^*(A), \quad \mathcal{F} = \sigma^*(\Omega). \tag{6.1}$$

Potom $\mathcal{A} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ a $\mathcal{F} \in \Omega^2(U, \mathfrak{g})$ se nazývají **lokální formy konexe a křivosti**.

Příklad 6.1.1. Připomeňme si, že pro $\pi : F(M) \to M$ odpovídá volba kalibrace volbě repérového pole $(e_1, \ldots, e_n)$ na okolí U, kde $\sigma(m) = (e_1|_m, \ldots, e_n|_m)$. Ukazovali jsme, že $\sigma^*(A) = \hat{\omega}$ a $\sigma^*(\Omega) = \hat{\Omega}$, kde $\hat{\omega}$ a $\hat{\Omega}$ jsou odpovídající lokální formy konexe a křivosti vzhledem k repérovému poli $(e_1, \ldots, e_n)$.

Nejdůležitější otázkou je pochopitelně transformace $\mathcal{A}$ při změně řezu σ. Nechť $\sigma' : U' \to P$ je jiný lokální řez, takový, že $U \cap U' \neq \emptyset$. Potom pro každý $m \in U \cap U'$, $\sigma(m)$ a $\sigma'(m)$ jsou ve stejném vlákně. Existuje tedy funkce $\mathbf{g} : U \cap U' \to G$, taková že pro všechny $m \in U \cap U'$ platí

$$\sigma'(m) = \sigma(m) \cdot \mathbf{g}(m) \tag{6.2}$$

Zobrazení $\mathbf{g}$ se nazývá (lokální) **kalibrační transformace**. Nejprve si musíme ujasnit, že $\mathbf{g}$ definuje hladké zobrazení. Ale to plyne okamžitě z důkazu Tvrzení 2.3.6 protože $\mathbf{g}$ odpovídá právě přechodovému zobrazení mezi zobrazeními lokální trivializace odpovídající řezům σ a σ'.

Abychom spočítali jak souvisí $\mathcal{A}' = \sigma'^*(A)$ a $\mathcal{A} = \sigma^*(A)$, budeme zřejmě muset ověřit, jak souvisí σ'_* a σ_*. Nejprve si ukážeme následující technické lemma.

Lemma 6.1.2. *Nechť M, N, N', S jsou hladké variety. Uvažujme hladká zobrazení $g : M \to N$ a $h : M \to N'$. Potom máme hladké zobrazení $f : N \times N' \to S$. Dohromady je tedy možné složit zobrazení $k : M \to S$ jako $k(m) = f(g(m), h(m))$, tj. $k = f \circ (g, h)$. Nechť $X \in T_m M$. Potom*

$$k_*(X) = \{f(\cdot, h(m))_* \circ g_*\}(X) + \{f(g(m), \cdot)_* \circ h_*\}(X). \tag{6.3}$$

Důkaz. Nechť $X = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma(t)$. Potom máme spočítat

$$k_*(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} k(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g(\gamma(t)), h(\gamma(t)). \tag{6.4}$$

Teď se jenom použije derivování složené funkce a to jak vypadá derivace funkce z kartézského součinu a výsledek snadno vyplyne. ■

Teď jednoduše použijeme toto lemma pro následující volby. Máme $M = U \cap U'$, $N = P$, $N' = G$ a $S = P$. Vezmeme $g = \sigma$, $h = \mathbf{g}$ a konečně $f = R$ (pravá akce G na P). Potom

$$k(m) = f(g(m), h(m)) = R(\sigma(m), \mathbf{g}(m)) = \sigma(m) \cdot \mathbf{g}(m) = \sigma'(m). \tag{6.5}$$

Abychom vypočítali k_*, musíme tedy zjistit, jak vypadá $R(\cdot, g)_*$ a $R(p, \cdot)_*$ pro libovolné $g \in G$ a $p \in P$. Zjevně $R(\cdot, g)_* = R_{g*}$ v našem obvyklém značení. Pro druhý případ $R(p, \cdot) = \theta^{(p)}$ je orbitové zobrazení a tedy $R(p, \cdot)_*(x^L|_g) = \#x|_{p\cdot g}$. Působení na libovolný tečný vektor $Y \in T_gG$ potom dává $R(p, \cdot)_*(Y) = \#\{\theta_L|_g(Y)\}|_{p\cdot g}$. Po dosazení tedy

$$\sigma'_*(X) = R_{\mathbf{g}(m)*}(\sigma_*(X)) + \#\{\theta_L|_{\mathbf{g}(m)}(\mathbf{g}_*(X))\}|_{\sigma'(m)} \tag{6.6}$$

S použitím tohoto výrazu je již snadné spočítat vztah mezi $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{A}$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'|_m(X) &= A|_{\sigma'(m)}(\sigma'_*(X)) = (\sigma^* R^*_{\mathbf{g}(m)}(A|_{\sigma'(m)}))(X) + \theta_L|_{\mathbf{g}(m)}(\mathbf{g}_*(X)) \\ &= Ad_{\mathbf{g}(m)^{-1}}((\sigma^*(A|_{\sigma(m)}))(X)) + \mathbf{g}^*(\theta_L)|_m(X) \\ &= \{Ad_{\mathbf{g}(m)^{-1}}(\mathcal{A}|_m) + \mathbf{g}^*(\theta_L)|_m\}(X). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Dostáváme tedy tvrzení shrnující předcházející výpočet:

Tvrzení 6.1.3. *Nechť $\sigma : U \to P$ a $\sigma' : U \to P'$ jsou dva lokální řezy, $\mathbf{g} : U \cap U' \to G$ je příslušná kalibrační transformace. Potom pro $\mathcal{A}' = \sigma'^*(A)$ a $\mathcal{A} = \sigma^*(A)$ platí na $U \cap U'$ vztah*

$$\mathcal{A}' = Ad_{\mathbf{g}^{-1}}(\mathcal{A}) + \mathbf{g}^*(\theta_L). \tag{6.8}$$

Poznámka 6.1.4. Pro maticové grupy G je Ad konjugace matic a platí Lemma 5.3.10. Potom můžeme psát kalibrační transformaci (6.8) ve tvaru

$$\mathcal{A}' = \mathbf{g}^{-1}\mathcal{A}\,\mathbf{g} + \mathbf{g}^{-1}d\mathbf{g}. \tag{6.9}$$

Nyní můžeme snadno dokázat tvrzení 3.3.4. Tam jsme tvrdili, že libovolná forma konexe $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ vztahem $\hat{\omega} = \sigma^*(\omega)$ definuje lokální formy konexe příslušné nějaké afinní konexi ∇.

Důsledek 6.1.5 (Důkaz tvrzení 3.3.4)**.**

Důkaz. V případě $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ je tedy $\mathbf{g}(m) = \mathbf{A}(m)$ a podle předchozí poznámky tedy $\hat{\omega}' = \mathbf{A}^{-1}\hat{\omega}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A}$. Ale to je přesně vztah (3.15) který jsme odvodili pro lokální formy konexe na základě transformačních vztahů pro Christoffelovy symboly při změně lokálního repérového pole. Můžeme tedy komponenty $\hat{\omega}$ v daném repérovém poli (odpovídajícím řezu σ) *vyhlásit* za Christoffelovy symboly a dostaneme dobře definovanou afinní konexi ∇ na M. ■

Nyní je velmi snadné odvodit podobné transformační vztahy i pro jiné druhy veličin na hlavním fibrovaném prostoru. Ukážeme si jeden takový případ:

Tvrzení 6.1.6. *Nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P,V)$ je horizontální p-forma typu ρ. Nechť $a = \sigma^*(\alpha)$ a $a' = \sigma'^*(\alpha)$ jsou příslušné lokální formy. Potom na $U \cap U'$ platí vztah*

$$a' = \rho(\mathbf{g}^{-1})a \tag{6.10}$$

Speciálně pro lokální formy konexe tedy $\mathcal{F}' = Ad_{\mathbf{g}^{-1}}(\mathcal{F})$.

Důkaz. Opět jde o přímočaré dosazení výrazu (6.6). Protože α je dle předpokladu horizontální, můžeme zcela ignorovat vertikální část (následující za #). A tedy

$$a' = \sigma^*(R^*_{\mathbf{g}}\alpha) = \sigma^*(\rho(\mathbf{g}^{-1})\alpha) = \rho(\mathbf{g}^{-1})\sigma^*(\alpha) = \rho(\mathbf{g}^{-1})a. \tag{6.11}$$

To dokazuje tvrzení. Jelikož $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ a $\mathcal{F}' = \sigma'^*(\Omega)$, kde Ω je horizontální 2-forma typu Ad, dostáváme ihned vztah mezi $\mathcal{F}'$ a $\mathcal{F}$. ■

Konečně taky dokončit jeden nedokončený důkaz. Sliby se mají plnit:

Příklad 6.1.7 (Dokončení důkazu tvrzení 2.3.6)**.** Máme zobrazení $\phi'_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ o kterém jsme nedokázali, že je vnoření, tj. $\phi'_{\alpha *} : T_{(m,g)}(U_\alpha \times G) \to T_{\phi_\alpha(m,g)}(\pi^{-1}(U_\alpha))$ má být prosté. Připomeňme, že $T_{(m,g)}(U_\alpha \times G) = T_m U_\alpha \oplus T_g G$. Obecný element $T_g G$ si navíc můžeme napsat jako $x^L|_g = L_{g*}(x)$ pro element $x \in \mathfrak{g}$ Lieovy algebry. Nechť tedy $\phi'_{\alpha *}(X, x^L|_g) = 0$ pro $X \in T_m M$ a $x \in \mathfrak{g}$. Nechť $X = \dot\gamma(0)$ pro nějakou křivku $\gamma : I \to U_\alpha$. Potom tedy máme

$$0 = \phi'_{\alpha *}(X, x^L|_g) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi'_\alpha(\gamma(t), g \cdot \exp(tx)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma_\alpha(\gamma(t)) \cdot g \cdot \exp(tx). \tag{6.12}$$

Podobným výpočtem jako v důkazu lemmatu 6.1.2 teď můžeme psát

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma_\alpha(\gamma(t)) \cdot g \cdot \exp(tx) = R_{g*}(\sigma_{\alpha *}(X)) + \#x|_{\sigma_\alpha(m)\cdot g} \tag{6.13}$$

Aplikací π_* na obě strany tedy dostáváme $0 = (\pi \circ R_g \circ \sigma_\alpha)_*(X) = X$, kde jsme využili vertikalitu generátorů: $\pi_*(\#x) = 0$. Tedy $X = 0$. Původní rovnice nám dá $\#|_{\phi_\alpha(m,g)}(x) = 0$, a tedy $x = 0_{\mathfrak{g}}$ z injektivity zobrzení $\#|_p$ implikované volností akce. A tedy $(X, x^L|_g) = (0_m, 0_g)$, což dokazuje injektivitu zobrazení $\phi'_{\alpha *}$.

Na závěr této sekce si odvodíme analog (6.8) pro tzv. infinitesimální kalibrační transformace. Přesný význam této definice si ujasníme. Nejprve je třeba vysvětlit následující problém. Víme, že zobrazení $\exp : \mathfrak{g} \to G$ je lokální difeomorfismus. Příslušné tečné zobrazení $\exp_* : T_0(\mathfrak{g}) \to T_e(G)$ v bodě 0 je obyčejná identita na $\mathfrak{g}$ (použije se $T_0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ a $T_e(G) = \mathfrak{g}$). Můžeme se ale ptát, jak vypadá příslušné tečné zobrazení v libovolném bodě $y \in \mathfrak{g}$. To není zas tak snadné ukázat.

Lemma 6.1.8. *Tečné zobrazení $\exp_* : T_y(\mathfrak{g}) \to T_{\exp(y)}G$ má tvar (zde opět $T_y(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{g}$):*

$$\exp_*(z) = L_{\exp(y)*}\{\phi(-ad_y)[z]\}, \tag{6.14}$$

kde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je analytická funkce kterou lze psát jako

$$\phi(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \cdots \tag{6.15}$$

Speciálně dostáváme $\theta_L|_{\exp(y)}(\exp_*(z)) = \phi(-ad_y)[z]$.

Nyní budeme předpokládat, že kalibrační transformace $\mathbf{g}$ má tvar $\mathbf{g}(m) = \exp(t\mathbf{x}(m))$, kde $\mathbf{x} : U \cap U' \to \mathfrak{g}$. Ekvivalentně $\mathbf{x} \in \Omega^0(U \cap U', \mathfrak{g})$. Jediné co je potřeba pořádně vypočítat je jak vyjádřit $\mathbf{g}^*(\theta_L)$. Mám $\mathbf{g} = \exp \circ \mathbf{x}'$, kde $\mathbf{x}'(m) = t\mathbf{x}(m)$. Odtud tedy pro $X \in T_m M$

$$\{\mathbf{g}^*(\theta_L)\}|_m(X) = \theta_L|_{\mathbf{g}(m)}(\mathbf{g}_*(X)) = \theta_L|_{\exp(\mathbf{x}'(m))}(\exp_*(\mathbf{x}'_*(X))) = \phi(-ad_{\mathbf{x}'})[\mathbf{x}'_*(X)]. \quad (6.16)$$

Již jsme jednou argumentovali, že pro zobrazení do vektorového prostoru je $\mathbf{x}'_*(X) = (d\mathbf{x}')|_m(X)$, kde $d\mathbf{x}' \in \Omega^1(U \cap U', \mathfrak{g})$. Výsledná kalibrační transformace je tedy

$$\mathcal{A}' = Ad_{\exp(-t\mathbf{x})}(\mathcal{A}) + \phi(-tad_{\mathbf{x}})[t \cdot d\mathbf{x}] \quad (6.17)$$

Pod pojmem **infinitesimální kalibrační transformace** rozumíme rozvoj pravé strany do nejvýš prvního řádu v parametru t. Dostáváme tedy

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + t\{-ad_{\mathbf{x}}(\mathcal{A}) + d\mathbf{x}\} + o(t^2) = \mathcal{A} + t\{[\mathcal{A}, \mathbf{x}]_{\mathfrak{g}} + d\mathbf{x}\} + o(t^2). \quad (6.18)$$

Ve fyzice se často vůbec nepíše parametr t a o zobrazení $\mathbf{x}$ se místo toho říká, že je malé. Pro lokální formy křivosti platí transformační vztah

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} + t[\mathcal{F}, \mathbf{x}]_{\mathfrak{g}} + o(t^2) \quad (6.19)$$

Opět se dá ukázat, že pro souvislé a jednoduše souvislé Lieovy grupy již infinitesimální transformace zcela určují správné chování na „konečných transformacích“.

Na objektech (formách) žijících na totálním prostoru P jsme zavedli operaci vnější kovariantní derivace $D : \Omega^p(P, V) \to \Omega^{p+1}(P, V)$. Je-li $\sigma : U \to P$ řez (volba kalibrace), můžeme tedy definovat **(lokální) vnější kovariantní derivaci** $\mathcal{D} : \Omega^p(U, V) \to \Omega^{p+1}(U, V)$ na všech lokálních objektech (pocházejících z pullbacku řezem) vztahem

$$\mathcal{D}(\sigma^*(\text{cokoliv})) := \sigma^*(D(\text{cokoliv})). \quad (6.20)$$

Zejména na formách typu ρ a lokální formě konexe dostáváme očekávaný výsledek.

Tvrzení 6.1.9. *Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe a $\Omega = DA$ odpovídající 2-forma křivosti. Nechť $\sigma : U \to P$ je lokální řez, přičemž $\mathcal{A} = \sigma^*(A)$ a $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ jsou lokální formy konexe a křivosti. Potom platí vztah*

$$\mathcal{F} = \mathcal{D}\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}}. \quad (6.21)$$

Dále, nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$ je horizontální p-forma typu ρ a nechť $a = \sigma^*(\alpha)$ je odpovídající lokální objekt. Potom platí vztah

$$\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \dot{\wedge} a. \quad (6.22)$$

Důkaz. Důkaz je přímou aplikaci Cartanovy strukturní rovnice (5.18) a formulky (5.46). Pak se jen využije definic a obvyklých vlastností diferenciálních forem. Například

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{D}\mathcal{A} = \mathcal{D}(\sigma^*(A)) = \sigma^*(DA) = \sigma^*(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}}) \\ = d(\sigma^*(A)) + \frac{1}{2}[\sigma^*(A) \wedge \sigma^*(A)]_{\mathfrak{g}} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

To dokazuje první z rovnici. Pro horizontální formy typu ρ je důkaz podobný. ■

Nyní musíme odpovědět na důležitou otázku. Do této doby jsme mluvili o lokálních objektech pocházejících z globálních na totálním prostoru P. To je však přesný opak situace se kterou se setkáme ve fyzikálních aplikacích. Tam definujeme veličiny žijící v „prostoročase“ M v nějaké (zvolené) kalibraci a pracujeme pouze s tím, jak se při změně kalibrace změní (tomu říkáme kalibrační transformace). V komplikovanějším prostoročase (například M není kontraktibilní) musíme navíc všechny objekty definovat pouze lokálně. Obecná odpověď spojující oba světy je daná následujícím tvrzením.

Tvrzení 6.1.10. *Nechť $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je kolekce hladkých řezů hlavní fibrace $\pi : P \to M$, taková že jejich definiční obory tvoří otevřené pokrytí báze M. Máme tedy hladká zobrazení $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$, $\pi \circ \sigma_\alpha = 1_{U_\alpha}$ a můžeme psát $M = \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$.*

Pro každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definujeme zobrazení $\mathbf{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ vztahem

$$\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m) \cdot \mathbf{g}_{\alpha\beta}(m) \tag{6.24}$$

Jinými slovy, $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ je změna kalibrace $\sigma_\alpha \mapsto \sigma_\beta$ na $U_\alpha \cap U_\beta$. Nechť $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je kolekce lokálně definovaných 1-forem s hodnotami v $\mathfrak{g}$, $\mathcal{A}_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ taková, že na $U_\alpha \cap U_\beta$ platí

$$\mathcal{A}_\beta = Ad_{\mathbf{g}_{\alpha\beta}^{-1}}(\mathcal{A}_\alpha) + \mathbf{g}^*_{\alpha\beta}(\theta_L), \tag{6.25}$$

pro každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Potom existuje unikátní forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, taková že $\mathcal{A}_\alpha = \sigma^*_\alpha(A)$.

Důkaz. Celý důkaz je jen zobecněním diskuze v sekci 3.3. Klíčovým je fakt, že na P můžeme používat lokální trivializaci odpovídající kolekci řezů $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ definovanou jako $\phi_\alpha(m, g) = \sigma_\alpha(m) \cdot g$. Viz tvrzení 2.3.6. Potom na každé otevřené množině $\pi^{-1}(U_\alpha) \subseteq P$ dostávám hladké zobrazení $g_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$ definované vztahem $p = \phi_\alpha(\pi(p), g_\alpha(p))$.

Definujeme formu $A_\alpha \in \Omega^1(\pi^{-1}(U_\alpha), \mathfrak{g})$ vztahem

$$A_\alpha = Ad_{g_\alpha^{-1}}(\pi^*(\mathcal{A}_\alpha)) + g^*_\alpha(\theta_L). \tag{6.26}$$

Nyní musíme ukázat, že na $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ platí $A_\alpha = A_\beta$ a tedy dostáváme globálně definovanou formu A vztahem $A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} := A_\alpha$. Pro $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ dostáváme:

$$\begin{aligned} p &= \phi_\beta(\pi(p), g_\beta(p)) = \sigma_\beta(\pi(p)) \cdot g_\beta(p) = \sigma_\alpha(\pi(p)) \cdot \mathbf{g}_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p) \\ &= \phi_\alpha(\pi(p), \mathbf{g}_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p)). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Porovnáním s definujícím vztahem tedy $g_\alpha(p) = \mathbf{g}_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p)$. Dál je třeba si rozmyslet, že pro libovolnou funkci $\mathbf{g} : N \to G$ platí vztah $Ad_{\mathbf{g}}(\mathbf{g}^*(\theta_L) = \mathbf{g}^*(\theta_R)$. Potom můžeme vypočítat, jak se změní první člen. Označme $\mathbf{g}'_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} \circ \pi$. Potom

$$\begin{aligned} Ad_{g_\beta^{-1}}(\pi^*(\mathcal{A}_\beta)) &= Ad_{g_\alpha^{-1}}(Ad_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}}\pi^*\{Ad_{\mathbf{g}_{\alpha\beta}^{-1}}(\mathcal{A}_\alpha) + \mathbf{g}^*_{\alpha\beta}(\theta_L)\}) \\ &= Ad_{g_\alpha^{-1}}\{\pi^*(\mathcal{A}_\alpha) + Ad_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}}(\mathbf{g}'^*_{\alpha\beta}(\theta_L))\} \\ &= Ad_{g_\alpha^{-1}}\{\pi^*(\mathcal{A}_\alpha) + \mathbf{g}'^*_{\alpha\beta}(\theta_R)\}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Aplikací lemmatu 6.1.2 pro $g = \mathbf{g}'_{\alpha\beta}$, $h = g_\beta$, $f = \mu$ (grupový součin v G) dostáváme

$$g_{\alpha *}(X) = R_{g_\beta(p)*}(\mathbf{g}'_{\alpha\beta *}(X)) + L_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}(p)*}(g_{\beta *}(X)), \tag{6.29}$$

pro všechny $X \in T_pP$, kde $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Odtud můžeme vypočítat transformační vlastnosti:

$$\begin{aligned}\langle g_\beta^*(\theta_L)|_p, X\rangle &= \langle \theta_L|_{g_\beta(p)}, g_{\beta *}(X)\rangle = \langle \theta_L|_{g_\beta(p)}, L_{\mathbf{g}'^{-1}_{\alpha\beta}*}\{g_{\alpha *}(X) - R_{g_\beta(p)*}(\mathbf{g}'_{\alpha\beta *}(X))\}\rangle \\ &= \langle \theta_L|_{g_\alpha(p)}, g_{\alpha *}(X) - R_{g_\beta(p)*}(\mathbf{g}'_{\alpha\beta *}(X))\rangle \\ &= \langle g_\alpha^*(\theta_L)|_p, X\rangle - \langle R_{g_\beta(p)*}(\theta_L|_{g_\alpha(p)}), \mathbf{g}'_{\alpha\beta *}(X))\rangle \\ &= \langle g_\alpha^*(\theta_L)|_p, X\rangle - \langle Ad_{g_\beta^{-1}(p)}(\theta_L|_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}(p)}), \mathbf{g}'_{\alpha\beta *}(X)\rangle \\ &= \langle g_\alpha^*(\theta_L)|_p - Ad_{g_\alpha^{-1}(p)}(Ad_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}(p)}\mathbf{g}'^*_{\alpha\beta}(\theta_L)), X\rangle \\ &= \langle g_\alpha^*(\theta_L)|_p - Ad_{g_\alpha^{-1}(p)}(\mathbf{g}'^*_{\alpha\beta}(\theta_R), X\rangle.\end{aligned} \tag{6.30}$$

Vidíme, že druhý člen přesně odečte člen s θ_R pocházející z prvního členu a $A_\beta = A_\alpha$. Zbývá ověřit, že A splňuje axiomy formy konexe. Nejprve máme

$$A_\alpha(\#x) = Ad_{g_\alpha^{-1}}(\langle \pi^*(\mathcal{A}_\alpha), \#x\rangle) + (g_\alpha^*(\theta_L))(\#x) = (g_\alpha^*(\theta_L)(\#x) = \theta_L(g_{\alpha *}(\#x)). \tag{6.31}$$

Ale $g_{\alpha *}(\#x|_p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} g_\alpha(p \cdot \exp(tx)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} g_\alpha(p) \cdot \exp(tx) = x^L|_{g_\alpha(p)}$. Odtud tedy

$$A_\alpha(\#x) = \theta_L(x^L) = x. \tag{6.32}$$

Při výpočtu jsme použili vlastnost $g_\alpha \circ R_h = R_h \circ g_\alpha$, kde na levé straně R_h je pravá akce na P a na pravé straně pravé násobení na G. S použitím tohoto vztahu máme

$$R_h^*(A_\alpha) = Ad_{R_h^*(g_\alpha)^{-1}}(\pi^*(\mathcal{A}_\alpha)) + R_h^*(g_\alpha^*(\theta_L)) = Ad_{h^{-1}}\{Ad_{g_\alpha^{-1}}(\pi^*(\mathcal{A}_\alpha)) + g_\alpha^*(\theta_L)\}. \tag{6.33}$$

To dokazuje, že A definuje formu konexe na P. Teď musíme ukázat, že $\sigma_\alpha^*(A) = \mathcal{A}_\alpha$. Z definice $g_\alpha(\sigma_\alpha(m)) = e$. Máme tedy

$$\sigma_\alpha^*(A) = \sigma^*\{Ad_{g_\alpha^{-1}}\pi^*(\mathcal{A}_\alpha) + g_\alpha^*(\theta_L)\} = Ad_{e^{-1}}(\pi \circ \sigma_\alpha)^*(\mathcal{A}_\alpha) + e^*(\theta_L) = \mathcal{A}_\alpha. \tag{6.34}$$

Použili jsme, že pullback konstantním zobrazením $e : U_\alpha \to G$ je nulový.

Konečně, musíme ukázat jednoznačnost konstrukce. Nechť $\sigma_\alpha^*(A) = \sigma_\alpha^*(A')$. Nechť $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ je libovolný pevně zvolený bod. Nechť $p = \sigma_\alpha(m) \cdot g$ pro jednoznačný element $g \in G$ a $m = \pi(p)$. Tvrdíme, že máme rozklad $T_pP = R_{g*}(\sigma_{\alpha *}(T_mM)) \oplus \mathrm{Ver}_p(P)$. Máme

$$\dim(R_{g*}(\sigma_{\alpha *}(T_mM)) = \dim(\sigma_{\alpha *}(T_mM)) = \dim(T_mM) = \dim(M). \tag{6.35}$$

Oba podprostory tedy mají požadovanou dimenzi. Zároveň musí mít prázdný průnik, protože $\pi_*(R_{g*}(\sigma_{\alpha *}(X))) = R_{g*}(\sigma_{\alpha *}(X)) = X$, a vertikalita tedy okamžitě implikuje $X = 0$. Pro každou konexi $A|_{\mathrm{Ver}_p(P)} = A'|_{\mathrm{Ver}_p(P)}$, takže musíme ověřit rovnost jen na komplementárním podprostoru:

$$\begin{aligned}A'|_p(R_{g*}(\sigma_{\alpha *}(X))) &= Ad_{g^{-1}}(A'|_{\sigma_\alpha(m)}(\sigma_{\alpha *}(X)) = Ad_{g^{-1}}(\mathcal{A}_\alpha|_m(X)) \\ &= \cdots = A|_p(R_{g*}(\sigma_{\alpha *}(X))).\end{aligned} \tag{6.36}$$

To dokazuje jednoznačnost a důkaz máme hotový. ■

Poznámka 6.1.11. Úplně analogicky se dokáže tvrzení, kde máme kolekci $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ a $a_\alpha \in \Omega^p(U_\alpha, V)$ na každém průniku splňují relaci $a_\beta = \rho(\mathbf{g}_{\alpha\beta}^{-1})a_\alpha$. Potom existuje právě jedna horizontální p-forma $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$ typu ρ, taková že $a_\alpha = \sigma_\alpha^*(\alpha)$.

Poznámka 6.1.12. Máme-li na okolí $U \subseteq M$ fixovanou kalibraci $\sigma : U \to P$ a máme k dispozici lokální formu konexe $\mathcal{A} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$, můžeme operátor kovariantní derivace jednoduše definovat jako $\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \mathbin{\dot\wedge} a$ pro všechny $a \in \Omega^p(U, V)$. Dostáváme operátor $\mathcal{D} : \Omega^p(U, V) \to \Omega^{p+1}(U, V)$. Je to ovšem pouze lokální operace. Máme-li kolekci $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ správně se transformujících p-forem (viz. předchozí poznámka) a kolekci $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ jako v předpokladu tvrzení 6.1.10, dostáváme nicméně kolekci $\{\mathcal{D}a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se správnými vlastnostmi a vše funguje podle předpokladu, tj. je-li $a_\alpha = \sigma_\alpha^*(\alpha)$ pro $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$, je $\mathcal{D}a_\alpha = \sigma_\alpha^*(D\alpha)$.

Příklad 6.1.13 (Maxwellovo pole)**.** Uvažujme triviální hlavní fibrovaný prostor $P = E^{1,3} \times U(1)$, tj. $M = E^{1,3}$ je Minkowského prostor vybavený metrikou $\eta = \mathrm{Diag}(1, -1, -1, -1)$.

Nechť $\omega \in \Omega^1(E^{1,3}, \mathfrak{u}(1))$ je forma konexe na P (označíme ji ω místo A z politických důvodů). Nechť $\sigma : E^{1,3} \to P$ je globální řez $\sigma(m) = (m, e)$, a nechť $\mathcal{A} = \sigma^*(\omega)$ je přislušná lokální forma konexe na $E^{1,3}$. Nyní je třeba si uvědomit, že $\mathfrak{u}(1) = \{\text{antihermitovské matice } 1 \times 1\} \doteq \mathbb{R}\{i\}$, kde $i \in \mathbb{C}$ je komplexní jednotka. $\mathfrak{u}(1)$ je tedy jednorozměrný vektorový prostor kde můžeme zvolit bázi $t_1 = i$. Potom $\mathcal{A}$ se rozkládá jako $\mathcal{A} = A \cdot t_i \equiv iA$, kde $A \in \Omega^1(E^{1,3})$.

Kalibrační transformace je hladké zobrazení $\mathbf{g} : U \to G = U(1)$. Pro jednoduchost $U = E^{1,3}$. Protože $U(1) = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ je jednotková kružnice, můžeme psát[1] $\mathbf{g}(m) = \exp(i\chi(m))$ pro $\chi : E^{1,3} \to \mathbb{R}$ a každé $m \in E^{1,3}$. Dostáváme tedy kalibrační transformaci $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$ ve tvaru

$$\mathcal{A}' = Ad_{\mathbf{g}^{-1}}\mathcal{A} + \mathbf{g}^{-1}d\mathbf{g} = \mathcal{A} + i \cdot d\chi \tag{6.37}$$

Rozpisem A tedy přesně $A' = A + d\chi$, což není nic jiného než kalibrační transformace Maxwellova 4-potenciálu tak jak jsme ji psali v podsekci 1.1.4.

Nyní uvažujme 2-formu křivosti a její lokální podobu $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$. Opět $\mathcal{F} = iF$ pro $F \in \Omega^2(E^{1,3})$. Máme $\mathcal{F} = \mathcal{D}\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_\mathfrak{g} = d\mathcal{A}$. Odtud $F = dA$ a vidíme, že $\mathcal{F} = iF$ popisuje přesně EM tenzor. Kalibrační transformace je v tomto případě $\mathcal{F}' = Ad_{\mathbf{g}^{-1}}\mathcal{F} = \mathcal{F}$, a tedy $F' = F$. Kalibrační invarianci F lze tedy vnímat jako důsledek „abelovskosti“ grupy $U(1)$.

Konečně, uvažujme následující reprezentaci $U(1)$. Vezmu prostor $V = \mathbb{C}$ (se strukturou 2-dim reálného vektorového prostoru) a definuju $\rho(g)[\lambda] = g \cdot \lambda$, pro všechny $g \in U(1) = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Nyní uvažuju veličinu typu ρ, tj. $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, \mathbb{C})$. Nechť $\phi = \sigma^*(\Phi)$ je odpovídající lokální veličina. Jelikož $\phi \in \Omega^0(E^{1,3}, \mathbb{C})$, můžeme ji rozložit do báze $\{1, i\}$ prostoru $\mathbb{C}$ pomocí komponentních forem $\phi_0, \phi_1 \in \Omega^0(E^{1,3}) = C^\infty(E^{1,3})$ a psát $\phi = \phi_0 \cdot 1 + \phi_1 \cdot i \equiv \phi_0 + i\phi_1$. Vidíme, že ϕ není nic jiného, než komplexní skalární pole! Podle tvrzení 6.1.6 navíc dostáváme

$$\phi' = \rho(\mathbf{g}^{-1})\phi = \exp(-i\chi)\phi. \tag{6.38}$$

To je ale přesně lokální kalibrační transformace diskutovaná v sekci 1.3. Konečně, podívejme se na vnější kovariantní derivaci $\mathcal{D}$. Z tvrzení 6.1.9 máme

$$\mathcal{D}\phi = d\phi + \rho'(\mathcal{A}) \mathbin{\dot\wedge} a = d\phi + \mathcal{A} \cdot \phi = d\phi + iA \cdot \phi. \tag{6.39}$$

To je ale do písmene přesně kovariantní derivace $\mathcal{D}$ definovaná „ručně“ v části 1.4.

6.2 Kalibračně invariantní účinek

Nyní bychom se chtěli nalézt univerzální návod jak z lokálních veličin $\mathcal{F}, \mathcal{A}$ a případně „hmotových polí“ odpovídajích lokálním verzím veličin typu ρ vyrobit funkcionál akce invariantní vůči

[1] Tohle je ve skutečnosti celkem pikantní tvrzení, které není tak snadné ukázat. Dokonce neplatí pokud U není jednoduše souvislé! V takovém případě nelze takto zapsat úplně každé zobrazení $\mathbf{g}$.

lokálním kalibračním invariancím. Připomeňme, že pro obyčejné p-formy na varietě (M, g, o) s metrikou a orientací jsme definovali (pseudo)skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \int_M (\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g = \int_M \alpha \wedge * \beta \tag{6.40}$$

Nechť $\alpha, \beta \in \Omega^p_\rho(P, V)$ jsou *horizontální* p-formy typu ρ, a nechť $a, b \in \Omega^p(U, V)$ jsou jejich lokální verze $a = \sigma^*(\alpha)$, $b = \sigma^*(\beta)$ odpovídající volbě kalibrace $\sigma : U \to P$. Chtěli bychom definovat podobný skalární součin jako pro formy kde $V = \mathbb{R}$.

Řešení je nasnadě. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ je symetrická bilineární nedegenerovaná forma na vektorovém prostoru V (tj. pseudoskalární součin). Nechť $\{E_i\}_{i=1}^{\dim V}$ je libovolná báze prostoru V. Definujeme

$$(\!(a, b)\!)_V = (a^i, b^j)_g \cdot \langle E_i, E_j \rangle_V. \tag{6.41}$$

Snadno se ověří, že tato definice nezávisí na výběru báze. Z definice je $(\!(a, b)\!) \in C^\infty(U)$.

Nyní předpokládejme, že $\sigma' : U' \to P$ je jiný lokální řez, a $a' = \sigma'^*(\alpha)$ and $b' = \sigma'^*(\beta)$ jsou odpovídající lokální formy. Můžeme tedy najít hladkou funkci $(\!(a', b')\!) \in C^\infty(U')$. Pochopitelně chceme aby na průniku byly obě funkce totožné, tj. $(\!(a, b)\!)|_{U \cap U'} = (\!(a', b')\!)|_{U \cap U'}$. Rozdíl obou řezů nám definuje kalibrační transformaci $\mathbf{g} : U \cap U' \to G$ a na $U \cap U$' platí

$$a' = \rho(\mathbf{g}^{-1})a, \quad b' = \rho(\mathbf{g}^{-1})b. \tag{6.42}$$

Potom pro $m \in U \cap U'$ dostáváme kalibrační transformaci

$$(\!(a', b')\!)_V(m) = (a^i, b^j)_g(m) \cdot \langle \rho(\mathbf{g}^{-1}(m))E_i, \rho(\mathbf{g}^{-1}(m))E_j \rangle_V. \tag{6.43}$$

Definice 6.2.1. Nechť (V, ρ) je reprezentace Lieovy grup G. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ je (pseudo)skalární součin na V. Řekneme, že $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ je **ρ-invariantní**, pokud

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle_V = \langle v, w \rangle_V, \tag{6.44}$$

pro všechny $v, w \in V$ a $g \in G$. Pro souvislou grupu G je tato vlastnost ekvivalentní ρ'-invarianci:

$$\langle \rho'(x)v, w \rangle_V + \langle v, \rho'(x)w \rangle_V = 0, \tag{6.45}$$

pro všechny $v, w \in V$ and $x \in \mathfrak{g}$, kde $\rho'(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \rho(\exp(tx))$ je odvozená reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na prostoru V.

Vidíme, že ρ-invariance je přesně vlastnost, která nás zachrání a zajistí invarianci vůči kalibračním transformacím. Předpokládejme tedy, že $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ *je ρ-invariantní.* Potom

$$(\!(a', b')\!)_V(m) = (a^i, b^j)_g(m) \cdot \langle E_i, E_j \rangle_V = (\!(a, b)\!)_V(m). \tag{6.46}$$

Dostáváme tedy **kalibračně invariantní**[2] objekt $(\!(a, b)\!)_V$.

Jak jsme to již několikrát dělali při definici globálních objektů, můžeme si nyní najít libovolnou kolekci řezů $\{\sigma_\mu\}_{\mu \in I}$, že jejich definiční obory pokryjí celou varietu M, pro každý řez definovat lokální objekty $a_\mu = \sigma_\mu^*(\alpha)$ a $b_\mu = \sigma_\mu^*(\beta)$ a hladké funkce $(\!(a_\mu, b_\mu)\!) \in C^\infty(U_\mu)$, které ovšem na libovolných průnicích splývají, tj. pro všechny $m \in U_\mu \cap U_{\mu'}$ máme $(\!(a_\mu, b_\mu)\!)_V(m) =$

[2]Tady je samozřejmě trošku problém se značením, protože z logických důvodů objekt zapisujeme pomocí symbolů (tady a a b) odpovídající konkrétní kalibraci. Kalibrační invariancí se tedy myslí, že když si vybereme jinou kalibraci a objekt zapíšeme pomocí odpovídajících symbolů (tady a' a b'), nic se nezmění.

$((a_{\mu'}, b_{\mu'}))_V(m)$. Dostáváme tedy globálně definovanou funkci, kterou můžeme integrovat přes celou varietu M. Většinou ji označujeme prostě $((a,b))$ pomocí jejího (libovolného) lokálního reprezentanta. Tuto funkci (zajistili jsme, že je globálně definovaná) již můžeme integrovat přes celé M:

$$\langle\langle a, b\rangle\rangle_V = \int_M ((a,b))_V \cdot \omega_g = \int_M \langle a \wedge *b\rangle_V \tag{6.47}$$

Pro každou dvojici horizontálních formu typu ρ tedy umíme vyrobit reálné číslo. Ukažme si nyní dva příklady této konstrukce, které budeme v následujícím potřebovat:

Příklad 6.2.2. Předpokládejme, že $(V,\rho) = (\mathfrak{g}, Ad)$. Pro každou kalibrační teorii máme k dispozici formu křivosti $\Omega = DA \in \Omega^2(P,\mathfrak{g})$, která je horizontální 2-forma typu Ad. Potřebujeme tedy nějakou Ad-invariantní symetrickou nedegenerovanou bilineární formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$. Je-li $\mathfrak{g}$ poloprostá, máme k dispozici Cartan-Killingovu formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathfrak{g}$ definovanou vztahem

$$\langle x, y\rangle_\mathfrak{g} := \mathrm{Tr}(ad_x ad_y). \tag{6.48}$$

Nechť $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ je lokální forma křivosti odpovídající nějakému lokálnímu řezu. Lokální formě konexe $\mathcal{A}$ se v řeči teorie pole říká **kalibrační pole** a funkcionál

$$S_{kin}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\langle\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\rangle_\mathfrak{g} \tag{6.49}$$

se nazývá **kinetický člen kalibrační teorie** popisované polem $\mathcal{A}$.

Příklad 6.2.3. Uvažujme $(V,\rho) = (\mathbb{C},\rho)$, kde $\mathbb{C}$ považujeme za dvourozměrný reálný vektorový prostor s bazí $\{1, i\}$ a $\rho(g)\lambda = g\cdot\lambda$. Pokud zapíšeme $g = e^{i\chi}$ pro $\chi \in \mathbb{R}$, má zobrazení $\rho(e^{i\chi})$ v bázi $\{1,i\}$ matici ve tvaru

$$\rho(e^{i\chi}) = \begin{pmatrix} \cos\chi & -\sin\chi \\ \sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix}, \tag{6.50}$$

což jen potvrzuje známý fakt, že násobení komplexním číslem $\exp(i\chi)$ ležícím na jednotkové kružnici odpovídá rotaci v Gaussově rovině o úhel χ. Díváme-li se na $\mathbb{C}$ jako na *reálný vektorový prostor*, je přirozenou volbou Euklidovský skalární součin

$$\langle \alpha_0 + i\alpha_1, \beta_0 + i\beta_1\rangle_V = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1, \tag{6.51}$$

který je přirozeně invariantní vůči rotacím a tedy $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ je ρ-invariantní.

K věci můžeme přistupovat i jinak, tj. dívat se na $\mathbb{C}$ jako na jednorozměrný komplexní vektorový prostor a použít standardní (komplexní) skalární součin na $\mathbb{C}$, tj.

$$\langle \lambda, \lambda'\rangle_\mathbb{C} = \bar{\lambda}\cdot\lambda'. \tag{6.52}$$

Tento skalární součin (je seskvilineární, ne bilineární) je ρ-invariantní vůči ρ jako komplexní reprezentaci $U(1)$ na $\mathbb{C}$. Je-li $\alpha \in \Omega^p_\rho(P,\mathbb{C})$ horizontální p-forma typu ρ a $a = \sigma^*(\alpha)$, můžeme použít $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ nebo $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathbb{C}$ k definici (stejného) reálného čísla $\langle\langle a, a\rangle\rangle$. Speciálně tedy můžeme definovat účinek pro komplexní skalární pole

$$S_0[\phi] = \langle\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\rangle_V - m^2\langle\langle \phi,\phi\rangle\rangle_V. \tag{6.53}$$

Je důležité si uvědomit, že v $\mathcal{D}$ je pořád schované Maxwellovo kalibrační pole $A = -i\mathcal{A}$. Jelikož $\mathfrak{u}(1)$ není poloprostá Lieova algebra, nemůžeme použít pro přidání kinetického členu Cartan-Killingovu formu jako v předchozím příkladě (je dokonce nulová). Jelikož $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}\{i\} \cong \mathbb{R}$, můžeme použít standardní skalární součin na $\mathbb{R}$, t.j. $\langle i\alpha, i\alpha'\rangle_\mathfrak{g} = \alpha\alpha'$. Potom

$$S_{kin}[A] = -\frac{1}{2}\langle\langle \mathcal{F},\mathcal{F}\rangle\rangle_\mathfrak{g} = -\frac{1}{2}\langle F, F\rangle_g \cdot \langle i\cdot 1, i\cdot 1\rangle_\mathfrak{g} = -\frac{1}{2}\langle dA, dA\rangle_g. \tag{6.54}$$

Kombinací S_{kin} a S_0 dostáváme přesně minimální interakci S, kterou jsme nalezli v (1.72).

Tyto příklady v zásadě shrnují základní filozofii kalibračních teorií. Máme Lieovu grupu G a hlavní fibraci $\pi : P \to M$. Varieta M plní úlohu fyzikálního prostoročasu. **Kalibrační pole** $\mathcal{A} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ je lokálně definovaná veličina pevně spjatá s **fixací kalibrace** $\sigma : U \to P$ a předepsaným chováním při změně kalibrace. Geometricky odpovídá volbě konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$.

Potom pro každou reprezentaci (V, ρ) Lieovy grupy G můžeme definovat **hmotová pole** $a \in \Omega^p(U, V)$, která jsou lokální verzí horizontální p-formy α typu ρ, $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$. Na V potřebujeme ρ-invariantní pseudoskalární součin.

Dohromady můžeme vytvořit kalibračně invariantní účinek (akci) pro pole $\mathcal{A}$ a hmotové pole α (těch můžeme do akce přidat libovolný počet) definovaný jako

$$S[\mathcal{A}, a] = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{D}\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{A} \rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle\!\langle \mathcal{D}a, \mathcal{D}a \rangle\!\rangle_V - m^2 \langle\!\langle a, a \rangle\!\rangle_V, \tag{6.55}$$

přičemž interakce polí $\mathcal{A}$ a a je vždy schovaná výhradně v $\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \mathbin{\dot\wedge} a$.

Příklad 6.2.4 (**Yang-Millsova teorie**, 1954)**.** Uvažujme izospinový dublet $\Psi \in C^\infty(E^{1,3}, \mathbb{C}^2)$, tj. $\Psi = (\phi_1, \phi_2)^T$, kde $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(E^{1,3}, \mathbb{C})$ jsou komplexní skalární pole. Příslušný funkcionál pro Ψ se obvykle píše ve tvaru

$$S_0[\Psi] = \int d^4x \{(\partial^\mu \Psi^\dagger)(\partial_\mu \Psi) - m^2 \Psi^\dagger \Psi\} = \int d^4x \sum_{i=1}^{2} \{\partial^\mu \bar\phi_i \cdot \partial_\mu \phi_i - m^2 \bar\phi_i \cdot \phi_i\} \tag{6.56}$$

Funkcionál je zjevně invariantní vůči transformaci $\Psi' = \mathbf{S}^{-1}\Psi$, kde $\mathbf{S} \in \mathrm{SU}(2)$ je *konstantní matice*. Problémem je opět lokální kalibrační transformace, kde $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x)$.

Naštěstí už přesně víme, jak postupovat. Uvažujme kanonickou reprezentaci $\mathrm{SU}(2)$ na $V = \mathbb{C}^2$, tj. $\rho(\mathbf{S})[\chi] = \mathbf{S}.\chi$ pro všechny $\chi \in \mathbb{C}^2$. Potom lokální kalibrační transformace Ψ odpovídá přesně kalibrační transformaci $\Psi = \sigma^*(\mathbf{\Psi})$ pro $\mathbf{\Psi} \in C^\infty_\rho(P, \mathbb{C}^2)$ je veličina typu ρ a $P = E^{1,3} \times \mathrm{SU}(2)$. Standardní skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ je ρ-invariantní z definice grupy $\mathrm{SU}(2)$ a můžeme ho tedy použít pro definici (komplexního seskvilineárního) skalárního součinu $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_V$. Potom

$$S_0[\Psi] = \langle\!\langle d\Psi, d\Psi \rangle\!\rangle_V - m^2 \langle\!\langle \Psi, \Psi \rangle\!\rangle_V, \tag{6.57}$$

a víme, že je třeba nahradit d operátorem vnější kovariantní derivace $\mathcal{D} = d + \rho'(\mathcal{A})$, kde $\mathcal{A} \in \Omega^1(E^{1,3}, \mathfrak{su}(2))$ se kalibračně transformuje vztahem

$$\mathcal{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathcal{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}d\mathbf{S}. \tag{6.58}$$

Připomeňme, že algebra $\mathfrak{su}(2)$ má bázi standardně zvolenou jako $\{\tau_a\}_{a=1}^3$, kde $\tau_a = -\frac{i}{2}\sigma_a$. Fyzikové ovšem nemají rádi anti-hermitovské matice, takže pracují s hermitovskou bází (která ale není báze $\mathfrak{su}(2)$!) $\{T_a\}_{a=1}^3$, kde $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a$. Komutační relace v obou bázích jsou

$$[\tau_a, \tau_b] = \epsilon_{abc}\tau_c, \quad [T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c. \tag{6.59}$$

Lokální forma konexe $\mathcal{A}$ se potom parametrizuje jako $\mathcal{A} = A^a\tau_a = -iA^aT_a$, kde $A^a \in \Omega^1(E^{1,3})$ jsou komponentní 1-formy, a píšeme $A = A^aT_a$. Kovariantní derivace $\mathcal{D}$ působící na dublet Ψ tedy získá tvar $\mathcal{D}\Psi = d\Psi - iA \cdot \Psi$. Analogicky, je-li $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ odpovídající forma křivosti, píšeme $\mathcal{F} = -iF^aT_a$, kde $A^a \in \Omega^2(E^{1,3})$. S použitím komutačních relací výše tedy

$$F^a = dA^a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}A^b \wedge A^c. \tag{6.60}$$

Zapsáno v obvyklých komponentách vzhledem k standardní souřadnicové bázi v $E^{1,3}$ dostáváme modifikovaný výraz

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{6.61}$$

Konečně, kalibrační transformaci lze psát jako (zde $A_\mu = A^a_\mu T_a$)

$$A'_\mu = \mathbf{S}^{-1} A_\mu \mathbf{S} + i\mathbf{S}^{-1}\partial_\mu \mathbf{S}. \tag{6.62}$$

Konečně, musíme analyzovat kinetický člen $S_{kin}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}}$ z příkladu 6.2.2. Dá se snadno ukázat, že Cartan-Killingova formu lze pro $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ a všechny $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{su}(2)$ psát jako $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle_{\mathfrak{g}} = 4\,\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})$. Po dosazení tedy dostáváme:

$$-\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{4}\int_M d^4x \{F^a_{\mu\nu}(F^b)^{\mu\nu}\}\langle \tau_a, \tau_b\rangle_{\mathfrak{g}} = -\int_M d^4x \{F^a_{\mu\nu}(F^b)^{\mu\nu}\}\,\mathrm{Tr}(\tau_a\tau_b). \tag{6.63}$$

Ale $\mathrm{Tr}(\tau_a\tau_b) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\sigma_a\sigma_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$. Celkově tedy dostáváme

$$-\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}} = \sum_{a=1}^{3}\frac{1}{2}\int_M d^4x \{F^a_{\mu\nu}(F^a)^{\mu\nu}\}. \tag{6.64}$$

Všimněte si, že normalizace kinetického členu se může lišit knížka od knížky. Důvodem je nejednoznačnost volby pseudosklárního součinu, kde si můžeme obecně vzít libovolný násobek Cartan-Killingovy metriky.

6.3 Pohybové rovnice kalibrační teorie

Uvažujme hlavní fibrovaný prostor $\pi : P \to M$ se strukturní grupou G. Uvažujme kalibrační teorii pole $\mathcal{A}$ spolu s hmotovým polem a, definovanou akcí (6.55). Jak vypadají pohybové rovnice? Připomeňme si, že kodiferenciál je zobrazení definované pomocí Hodgeovy duality: $\delta = *^{-1} d * \hat{\eta}$, kde $\hat{\eta}$ je operátor definovaný na p-formách jako $\hat{\eta}(\alpha) = (-1)^p\alpha$.

Definice 6.3.1. Nechť $\mathcal{D} : \Omega^p(U, V) \to \Omega^{p+1}(U, V)$ je operátor kovariantní derivace. Pro všechny $a \in \Omega^p(U, V)$ definovaný jako $\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \mathbin{\dot\wedge} a$. Nechť g je metrika na M. **Kovariantní kodiferenciál** $\mathcal{D}^\dagger$ definujeme vztahem

$$\mathcal{D}^\dagger = *^{-1}\mathcal{D} * \hat{\eta}, \tag{6.65}$$

kde $*$ působí pouze na komponentní p-formy jako obyčejná Hodgeova dualita na M.

Dostáváme tedy zobrazení $\mathcal{D}^\dagger : \Omega^{p+1}(U, V) \to \Omega^p(U, V)$. Stejně jako pro $\mathcal{D}$ neplatí, že $(\mathcal{D}^\dagger)^2 = 0$, přesněji $(\mathcal{D}^\dagger)^2(a) = -*^{-1}(\rho'(\mathcal{F}) \mathbin{\dot\wedge} *a)$. Důležité je, že v platnosti zůstává sdružení s operátorem $\mathcal{D}$, což si dokážeme v následujícím tvrzení.

Tvrzení 6.3.2. *Nechť $a \in \Omega^p(U, V)$, $b \in \Omega^{p+1}(U, V)$. Potom platí pravidlo*

$$d\langle a \wedge *b\rangle_V = \{(\!(\mathcal{D}a, b)\!)_V - (\!(a, \mathcal{D}^\dagger b)\!)_V\} \cdot \omega_g. \tag{6.66}$$

Je-li $a = \sigma^*(\alpha)$ a $b = \sigma^*(\beta)$ pro kalibraci $\sigma : U \to P$ a horizontální formy $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$, resp. $\beta \in \Omega^{p+1}_\rho(P, V)$, jsou obě strany kalibračně invariantní n-formy (definují tedy globální n-formu a má smysl je integrovat přes celou varietu M). Dostáváme tedy rovnici

$$\int_M d\langle a \wedge *b\rangle_V = \langle\!\langle \mathcal{D}a, b\rangle\!\rangle_V - \langle\!\langle a, \mathcal{D}^\dagger b\rangle\!\rangle_V. \tag{6.67}$$

Konečně, pokud je integrál z $\langle a \wedge *b\rangle_V$ přes ∂M z jakéhokoliv důvodu nula, dostáváme

$$\langle\!\langle \mathcal{D}a, b\rangle\!\rangle_V = \langle\!\langle a, \mathcal{D}^\dagger b\rangle\!\rangle_V. \tag{6.68}$$

Důkaz. Důkaz je modifikací podobného tvrzení pro obyčejný kodiferenciál. Přímým výpočtem

$$\begin{aligned} d\langle a \wedge *b\rangle_V &= \langle da \wedge *b\rangle_V + (-1)^p \langle a \wedge d(*b)\rangle_V \\ &= \langle \mathcal{D}a \wedge *b\rangle_V + (-1)^p \langle a \wedge \mathcal{D}(*b)\rangle_V \\ &\quad - \langle (\rho'(\mathcal{A}) \dot\wedge a) \wedge *b\rangle_V - (-1)^p \langle a \wedge (\rho'(\mathcal{A}) \dot\wedge *b)\rangle_V \\ &= \langle \mathcal{D}a \wedge *b\rangle_V - \langle a \wedge *(*^{-1}\mathcal{D} * \hat\eta(b))\rangle_V \\ &\quad - \mathcal{A}^\alpha \wedge a^i \wedge (*\beta)^j \cdot \{\langle \rho'(t_\alpha)E_i, E_j\rangle_V + \langle E_i, \rho'(t_\alpha)E_j\rangle_V\} \\ &= \{(\!(\mathcal{D}a, b)\!)_V - (\!(a, \mathcal{D}^\dagger b)\!)_V\} \cdot \omega_g. \end{aligned} \tag{6.69}$$

V posledním kroku jsme použili ρ'-invarianci formy $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Kalibrační invariance je zřejmá, stejně jako zbývající tvrzení (Stokesova věta). ■

Předpokládejme, že $a = \phi$, tj. $a = \sigma^*(\Phi)$ pro $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$ veličinu typu ρ. S využitím předchozího tvrzení můžeme odvodit pohybové rovnice akce $S[\mathcal{A}, \phi]$. Nejprve nalezneme pohybové rovnice pro kalibrační pole $\mathcal{A}$. Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je konexe a nechť $\theta \in \Omega^1_{Ad}(P, \mathfrak{g})$ je horizontální 1-forma typu Ad. Potom $\hat A = A + \epsilon\theta$ je opět konexe na P. Pro jednoduchost $\partial M = \emptyset$. Příslušná forma křivosti dává

$$\hat\Omega = d\hat A + \frac{1}{2}[\hat A \wedge \hat A]_\mathfrak{g} = \Omega + \epsilon\{d\theta + [A \wedge \theta]_\mathfrak{g}\} + o(\epsilon^2) = \Omega + \epsilon D\theta + o(\epsilon^2). \tag{6.70}$$

Lokálně dostáváme vztah $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} + \epsilon\mathcal{D}\vartheta + o(\epsilon^2)$, kde $\vartheta = \sigma^*(\theta)$. Variace kinetického členu je tedy velmi jednoduchá z pomocí předcházejícího tvrzení:

$$S_{kin}[\hat{\mathcal{A}}] = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}\rangle\!\rangle_\mathfrak{g} = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\!\rangle_\mathfrak{g} - \epsilon\langle\!\langle \mathcal{F}, \mathcal{D}\vartheta\rangle\!\rangle_\mathfrak{g} = S_{kin}[\mathcal{A}] - \epsilon\langle\!\langle \mathcal{D}^\dagger\mathcal{F}, \vartheta\rangle\!\rangle_\mathfrak{g} + o(\epsilon^2). \tag{6.71}$$

Nicméně nesmíme zapomenout, že kinetický člen hmotového pole $\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle$ rovněž obsahuje konexi. Je-li $\phi = \sigma^*(\Phi)$, máme $\hat D\Phi = D\Phi + \rho'(\theta)\Phi$. Lokálně tedy $\hat{\mathcal{D}}\phi = \mathcal{D}\phi + \rho'(\vartheta)\phi$. Odtud

$$\langle\!\langle \hat{\mathcal{D}}\phi, \hat{\mathcal{D}}\phi\rangle\!\rangle_V = \langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle_V + 2\epsilon\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \rho'(\vartheta)\phi\rangle\!\rangle_V + o(\epsilon^2). \tag{6.72}$$

Ve variaci kinetického členu dostáváme člen ve tvaru $\langle\!\langle\cdot, \vartheta\rangle\!\rangle_\mathfrak{g}$. Naším cílem je tedy přepsat $\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \rho'(\vartheta)\phi\rangle\!\rangle_V = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{J}, \vartheta\rangle\!\rangle_\mathfrak{g}$, kde $\mathcal{J}$ bude plnit roli „čtyřproudu“. Zavedeme si označení $\rho'_{\mu jk} = \langle \rho'(t_\mu)E_j, E_k\rangle_V$ a $s_{\mu\nu} = \langle t_\mu, t_\nu\rangle_\mathfrak{g}$. Potom dosazením do definic dostáváme

$$\begin{aligned} (\!(\mathcal{D}\phi, \rho'(\vartheta)\phi)\!)_V \cdot \omega_g &= \langle \rho'(\vartheta)\phi \wedge *\mathcal{D}\phi\rangle_V = \vartheta^\mu\phi^j \wedge (*\mathcal{D}\phi)^k \langle \rho'(t_\mu)E_j, E_k\rangle_V \\ &= \vartheta^\mu \wedge *\{\rho'_{\mu jk}\phi^j\mathcal{D}\phi^k\} \\ &= \vartheta^\mu \wedge *\{s^{\nu\lambda}\rho'_{\lambda jk}\phi^j\mathcal{D}\phi^k\} \cdot \langle t_\mu, t_\nu\rangle_\mathfrak{g}. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Zavedeme si nyní lokální 1-formu proudu $\mathcal{J} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ vztahem

$$\mathcal{J} = -2\{s^{\nu\lambda}\rho'_{\lambda jk}\phi^j\mathcal{D}\phi^k\}t_\nu = -2\langle \rho'(t^\nu_\mathfrak{g})\phi, \mathcal{D}\phi\rangle_V \cdot t_\nu, \tag{6.74}$$

kde $t^\nu_\mathfrak{g} = s^{\nu\mu}t_\mu$. Potom tedy $\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \rho'(\vartheta)\phi\rangle\!\rangle_V = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{J}, \vartheta\rangle\!\rangle_\mathfrak{g}$. Celkovou variaci akce S vzhledem k $\mathcal{A}$ můžeme tedy psát jako

$$S[\hat{\mathcal{A}}, \phi] = S[\mathcal{A}, \phi] - \epsilon\{\langle\!\langle \mathcal{D}^\dagger\mathcal{F} + \mathcal{J}, \vartheta\rangle\!\rangle_\mathfrak{g}\} + o(\epsilon^2). \tag{6.75}$$

Jelikož do prvního řádu v ϵ se musí obě akce rovnat, dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{F} = -\mathcal{J}. \tag{6.76}$$

Variace akce pro hmotové pole je již velmi jednoduchá. Předpokládáme $\hat{\Phi} = \Phi + \epsilon\Psi$, lokálně $\hat{\phi} = \phi + \epsilon\psi$. Po dosazení do akce

$$S[\mathcal{A}, \hat{\phi}] = S[\mathcal{A}, \phi] + 2\epsilon \langle\!\langle \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}\phi + m^2\phi, \psi \rangle\!\rangle_V + o(\epsilon^2) \tag{6.77}$$

Z nedegenerovanosti $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_V$ potom plyne pohybová rovnice pro ϕ ve tvaru

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}\phi + m^2\phi = 0. \tag{6.78}$$

Tvrzení 6.3.3. *Kalibrační pole $\mathcal{A}$ a hmotové pole ϕ splňují pohybové rovnice (extremalizují funkcionál S) právě tehdy když*

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = 0, \;\; \mathcal{D}^\dagger \mathcal{F} = -\mathcal{J}, \;\; \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}\phi + m^2\phi = 0. \tag{6.79}$$

První z rovnic nepochází z variace akce. Čtyřproud je dán rovnicí (6.74).

Tvrzení 6.3.4 (Noetherovský proud j)**.** *Definujeme $j = \mathcal{J} + *^{-1}[\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}]_\mathfrak{g}$. Potom j splňuje* ***rovnici kontinuity*** *ve tvaru $d * j = 0$, neboli ekvivalentně $\delta j = 0$.*

Důkaz. Pohybová rovnice (6.76) dává (ekvivalentně) $*\mathcal{J} = -\mathcal{D}*\mathcal{F} = -d(*\mathcal{F}) - [\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}]_\mathfrak{g}$. Odtud $-d(*\mathcal{F}) = *(\mathcal{J} + *^{-1}[\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}]_\mathfrak{g})$, a tedy $0 = d * (\mathcal{J} + *^{-1}[\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}]_\mathfrak{g}) = d * j$. ■

Kapitola 7

Přidružený vektorový fibrovaný prostor

7.1 Redukce ekvivariantních vektorových bandlů

Na začátek si ujasníme jednu generální proceduru, která za jistých okolností umožňuje vektorový bandl nad totálním prostorem hlavní fibrace $\pi : P \to M$ vybavený vhodnou grupovou akcí „redukovat“ na vektorový bandl nad M, jehož totální prostor je prostor orbit E/G. Nejprve si ovšem musíme vyjasnit několik základních pojmů z teorie vektorových bandlů.

Definice 7.1.1. Nechť $q : E \to M$ a $q' : E' \to M'$ jsou dva vektorové bandly. Potom dvojice $(\mathcal{F}, \varphi)$ se nazývá **morfismus vektorových bandlů**, pokud $\mathcal{F} : E \to E'$ a $\varphi : M \to M'$ jsou hladká zobrazení taková, že následující diagram je komutativní:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathcal{F}} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array} . \tag{7.1}$$

Jinými slovy, $\mathcal{F}(E_m) \subseteq E'_{\varphi(m)}$, tj. $\mathcal{F}$ zobrazuje vlákno nad m do vlákna nad $\varphi(m)$. Kromě toho musí být $\mathcal{F}$ po vláknech lineární, tj. pro každé $m \in M$ je $\mathcal{F}_m \equiv \mathcal{F}|_{E_m}$ lineární zobrazení příslušných vektorových prostorů, tj. $\mathcal{F}_m \in \mathrm{Hom}(E_m, E'_{\varphi(m)})$. Jsou-li $\mathcal{F}$ a φ difeomorfismy, nazývá se $(\mathcal{F}, \varphi)$ **izomorfismus vektorových bandlů**.

Morfismy vektorových bandlů jsou standardní nástroj jak porovnávat vektorové fibrované prostory. Izomorfní vektorové bandly jsou tedy po všech stránkách „de facto stejné“.

Lemma 7.1.2. *Nechť $(\mathcal{F}, \varphi)$ je morfismus vektorových bandlů E a E', kde $\varphi : M \to M'$ je difeomofismus. Potom je to izomorfismus právě tehdy když je pro každé $m \in M$ zobrazení $\mathcal{F}_m \in \mathrm{Hom}(E_m, E'_{\varphi(m)})$ lineární izomorfismus.*

Nyní máme definice potřebné k popisu vektorových bandlů vhodných k redukci.

Definice 7.1.3. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s akci $R : P \times G \to P$ grupy G. Nechť $q : E \to P$ je vektorový bandl nad totálním prostorem P s typickým vláknem V.

Předpokládejme, že na totálním prostoru E působí G pravou akcí $\Re : E \times G \to E$. Řekneme, že E je **ekvivariantní vektorový bandl**, pokud jsou splněny následující dvě vlastnosti:

1. Pro každé $g \in G$ tvoří dvojice $(\Re_g, R_g)$ automorfismus vektorového bandlu E.
2. Pro E existuje **π-saturovaná ekvivariantní lokální trivializace** $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$. To znamená, že pro každé $\alpha \in I$ je $\mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ pro otevřenou množinu $U_\alpha \subseteq M$, a každé trivializační zobrazení $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times V \to q^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ je ekvivariantní:

$$\psi_\alpha(R_g(p), v) = \Re_g(\psi_\alpha(p, v)), \tag{7.2}$$

pro každé $(p, v) \in \mathcal{U}_\alpha \times V$ a $g \in G$. V oblíbené tečkové notaci $\psi_\alpha(p \cdot g, v) = \psi_\alpha(p, v) \cdot g$.

Nechť E/G je prostor orbit příslušný pravé akci $\Re$, a označme $\natural : E \to E/G$ příslušné faktorzobrazení, tj. pro každé $e \in E$ je $\natural(e) \in E/G$ orbita obsahující bod e. Říkali jsme si, že ne vždycky je E/G poctivou varietou (takovou, že $\natural$ je hladká submerze). Ukážeme si, že pro ekvivariantní vektorový bandl E se dá říct mnohem víc.

Tvrzení 7.1.4. *Nechť $q : E \to P$ je ekvivariantní vektorový bandl. Potom na E/G existuje unikátní struktura vektorového bandlu (tj. včetně hladké struktury) $q^\natural : E/G \to M$, taková, že $(\natural, \pi)$ se stane po vláknech bijektivním morfismem vektorových bandlů E a E/G. Zejména*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\natural} & E/G \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q^\natural} \\ P & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} \tag{7.3}$$

tvoří komutativní diagram a $\natural : E \to E/G$ je hladká surjektivní submerze. Vektorové bandly E a E/G mají společné typické vlákno.

Důkaz. Budeme postupovat v duchu tvrzení 2.2.2, tj. sestrojíme lokální trivializaci prostoru E/G, a ukážeme, že přechodová zobrazení jsou hladká. Tím zajistíme na E/G topologii a hladkou strukturu. Pak zbývá ukázat tvrzení o $(\natural, \pi)$ a jednoznačnost konstrukce.

Nejprve si definujeme projekci $q^\natural : E/G \to M$. Můžeme si ji definovat přímo pomocí komutativity diagramu (7.3), tj. definujeme $q^\natural(\natural(e)) = \pi(q(e))$. Musíme ukázat, že tento předpis definuje zobrazení $q^\natural$, tj. musí dávat stejné hodnoty v případě, že $\natural(e) = \natural(e')$. To ale znamená, že existuje $g \in G$ takové, že $e' = \Re_g(e)$. Ale $(\Re_g, R_g)$ je morfismus vektorových bandlů, a tedy $q \circ \Re_g = R_g \circ q$. Navíc R působí podél vláken, a tedy $\pi \circ R_g = \pi$. Odtud tedy

$$q^\natural(\natural(e')) = \pi(q(e')) = \pi(q(\Re_g(e))) = \pi(R_g(q(e))) = \pi(q(e)) = q^\natural(\natural(e)). \tag{7.4}$$

A tedy $q^\natural$ je dobře definované a navíc automaticky zajistí komutativitu (7.3).

Jdeme vyrobit lokální trivializaci. Nechť $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ je π-saturovaná ekvivariantní trivializace z předpokladu. Můžeme předpokládat, že $\mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, kde U_α jsou okolí, kde máme lokální trivializaci $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ pro hlavní fibraci P. Chceme definovat bijektivní zobrazení $\mu_\alpha : U_\alpha \times V \to (q^\natural)^{-1}(U_\alpha)$ a ověřit, že příslušná přechodová zobrazení jsou hladká. Nechť $m \in U_\alpha$ and $p \in \pi^{-1}(m)$ je libovolný bod vlákna P nad m. Pro každé $(m, v) \in U_\alpha \times V$ definujeme

$$\mu_\alpha(m, v) = \natural(\psi_\alpha(p, v)). \tag{7.5}$$

Musíme zjistit, zda pravá strana nezávisí na výběru $p \in P_m$. Nechť $p' = p \cdot g$. Potom

$$\natural(\psi_\alpha(p \cdot g, v)) = \natural(\psi_\alpha(p, v) \cdot g) = \natural(\psi_\alpha(p, v)), \tag{7.6}$$

kde jsme využili ekvivarianci trivializačního zobrazení ψ_α (danou předpokladem). Jak vypadá zobrazení inverzní k μ_α? Máme definovat $\mu_\alpha^{-1} : (q^\natural)^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$. Pro libovolné $e \in \mathcal{U}_\alpha$:

$$\mu_\alpha^{-1}(\natural(e)) = ((\pi \circ \pi_1)(\psi_\alpha^{-1}(e)), \pi_2(\psi_\alpha^{-1}(e))), \tag{7.7}$$

kde π_1 a π_2 jsou projekce z kartézského součinu $\mathcal{U}_\alpha \times V$ na první a druhou komponentu. Opět je potřeba ověřit, že pravá strana se nezmění pokud $\natural(e) = \natural(e')$, tj. $e' = \Re_g(e)$ pro nějaké $g \in G$. Z ekvivariance zobrazení ψ_α ovšem plyne, že

$$\pi_1 \circ \psi_\alpha^{-1}(e \cdot g) = \pi_1(\psi_\alpha^{-1}(e)) \cdot g, \;\; \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(e \cdot g) = \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(e). \tag{7.8}$$

Odtud plyne i nezávislost μ_α^{-1} na volbě reprezentanta třídy (orbity) $\natural(e)$. Je to však inverze?

$$\mu_\alpha^{-1}(\mu_\alpha(m, v)) = \mu_\alpha^{-1}(\natural(\psi_\alpha(p, v))) = ((\pi \circ \pi_1)(p, v), \pi_2(p, v)) = (m, v). \tag{7.9}$$

Opačné pořadí je obdobně jednoduché. Konečně, nechť $\hat{g}_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \to \mathrm{GL}(V)$ jsou přechodová zobrazení odpovídající lokální trivializaci $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Definujeme $g^\natural_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(V)$ obvyklým vztahem $[g^\natural_{\alpha\beta}(m)](v) = (\pi_2 \circ \mu_\alpha^{-1})(\mu_\beta(m, v))$. Pro $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap U_\beta$ máme z definice přechodových zobrazení vztah $\psi_\beta(p, v) = \psi_\alpha(p, [\hat{g}_{\alpha\beta}(p)](v))$. Po dosazení tedy

$$[g^\natural_{\alpha\beta}(m)](v) = (\pi_2 \circ \mu_\alpha^{-1})(\natural(\psi_\beta(p, v))) = (\pi_2 \circ \mu_\alpha^{-1})(\natural\psi_\alpha(p, [\hat{g}_{\alpha\beta}(p)](v))) = [\hat{g}_{\alpha\beta}(p)](v). \tag{7.10}$$

Z toho ale plyne, že $\hat{g}_{\alpha\beta}$ a $g^\natural_{\alpha\beta}$ jsou zobrazení vztažená relací $\hat{g}_{\alpha\beta} = g^\natural_{\alpha\beta} \circ \pi$. Jelikož π je hladká sumberze a $\hat{g}_{\alpha\beta}$ je hladké zobrazení, musí být i $g^\natural_{\alpha\beta}$ hladké zobrazení.

Abychom ukázali, že $(\natural, \pi)$ je morfismus vektorových bandlů, musí být $\natural$ hladké, diagram (7.3) musí komutovat (to už jsme zajistili), a $\natural_p : E_p \to (E/G)_{\pi(p)}$ musí být lineární. Připomeňme si, že lineární struktura v jednotlivých vláknech se zavádí pomocí lokální trivializace, tj. řekneme, že $\mu_\alpha(m, v) + \lambda \cdot \mu_\alpha(m, w) := \mu_\alpha(m, v + \lambda w)$. Pro hladkost a linearity $\natural$ tedy stačí ukázat, že každé složení $\mu_\alpha^{-1} \circ \natural \circ \psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times V \to U_\alpha \times V$ je hladké a po vláknech lineární. Ale

$$(\mu_\alpha^{-1} \circ \natural \circ \psi_\alpha)(p, v) = (\pi(p), v), \tag{7.11}$$

kde jsou zmíněné vlastnosti zřejmé. Navíc je zřejmě $\natural$ po vláknech bijektivní (lokálně je to identita na V). Dokázali jsme tedy všechno až na jednoznačnost.

Předpokládejme, že $p^\natural : (E/G)' \to M$ splňuje předpoklady tvrzení, kde apostrof označuje pouze rozdílnost přidaných struktur (hladký atlas, fibrace), a nechť $\natural' : E \to (E/G)'$ je odpovídající zobrazení (množinově opět stejné). Můžeme definovat (množinově identitu) zobrazení $\boldsymbol{\Psi} : E/G \to (E/G)'$ vztahem $\boldsymbol{\Psi}(\natural(e)) = \natural'(e)$, které je automaticky hladké, protože $\natural$ je surjektivní submerze a $\natural'$ je hladké. Stejně nalezneme inverzi $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$ a $\boldsymbol{\Psi}$ je tedy difeomorfismus. Platí

$$p^\natural(\boldsymbol{\Psi}(\natural(e)) = p^\natural(\natural'(e)) = \pi(q(e)) = q^\natural(\natural(e)). \tag{7.12}$$

Využili jsme, že $\natural'$ je morfismus vektorových bandlů. Odtud plyne komutativita diagramu:

$$\begin{array}{ccc} E/G & \xrightarrow{\boldsymbol{\Psi}} & (E/G)' \\ \downarrow{\scriptstyle q^\natural} & & \downarrow{\scriptstyle p^\natural} \\ M & \xrightarrow{1_M} & M \end{array} \tag{7.13}$$

Obdobně se ukáže, že $\boldsymbol{\Psi}_m : (E/G)_m \to (E/G)'_m$ je lineární isomorfismus, což dokazuje, že $(\boldsymbol{\Psi}, 1_M)$ je izomorfismus vektorových bandlů E/G a $(E/G)'$. To je důkaz jednoznačnosti. ■

Před uvedením příkladů redukce vektorových fibrovaných prostorů si ještě za čerstva ujasníme, jak vypadají hladké řezy nového fibrovaného prostoru E/G. Ukazuje se, že se dají kanonicky ztotožnit s podmnožinou řezů původního vektorového bandlu E.

Definice 7.1.5. Nechť $q : E \to P$ je ekvivariantní vektorový bandl nad P. Nechť $\psi \in \Gamma(E)$ je hladký řez E. Řekneme, že ψ je G**-invariantní** řez, pokud pro všechny $g \in G$ a $p \in P$ platí

$$\psi(p \cdot g) = \Re_g(\psi(p)). \tag{7.14}$$

Množinu G-invariantních řezů označujeme jako $\Gamma_G(E)$.

$\Gamma_G(E)$ je zjevně vektorový podprostor $\Gamma(E)$. Nejde však o $C^\infty(P)$-podmodul, protože pro obecnou funkci f a $\psi \in \Gamma_G(E_P)$ není $f\psi$ G-invariantní řez bandlu E. Lze však snadno nahlédnout, že $\Gamma_G(E)$ tvoří $C^\infty(M)$-modul, kde „násobení“ $\bullet$ hladkou funkcí $h \in C^\infty(M)$ je definované jako $(h \bullet \psi)(p) = (h \circ \pi)(p) \cdot \psi(p)$, tj. ve zkratce $h \bullet \psi \equiv (h \circ \pi)\psi$. Množina hladkých řezů vektorového bandlu E/G též tvoří $C^\infty(M)$-modul, dá se tedy očekávat, že $\Gamma_G(E)$ a $\Gamma(E/G)$ spolu mohou nějak souviset.

Tvrzení 7.1.6. *$C^\infty(M)$-moduly $\Gamma_G(E)$ a $\Gamma(E/G)$ jsou kanonicky izomorfní.*

Důkaz. Definujeme zobrazení $\mathbf{\Phi} : \Gamma_G(E) \to \Gamma(E/G)$ a ukážeme, že jde o bijekci $C^\infty(M)$-modulů, tj. o lineární bijektivní zobrazení, které splňuje vlastnost $\mathbf{\Phi}(h \bullet \psi) = h \cdot \mathbf{\Phi}(\psi)$. Definujeme

$$\{\mathbf{\Phi}(\psi)\}(m) := \natural(\psi(p)), \tag{7.15}$$

pro každé $m \in M$ a libovolné $p \in \pi^{-1}(m)$. Musíme ověřit, že $\mathbf{\Phi}$ je dobře definovaný hladký řez E/G. Je-li $p' = p \cdot g$ jiný bod vlákna nad m, máme $\natural(\psi(p')) = \natural(\Re_g\psi(p)) = \natural(\psi(p))$. Navíc

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ \natural\ } & E/G \\ {\scriptstyle\psi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\mathbf{\Phi}(\psi)} \\ P & \xrightarrow{\ \pi\ } & M \end{array} \tag{7.16}$$

komutuje, což dokazuje, že $\mathbf{\Phi}(\psi)$ je hladké zobrazení (π je hladká submerze). Konečně, máme

$$(q^\natural \circ \mathbf{\Phi}(\psi))(m) = q^\natural(\natural(\psi(p)) = \pi((q \circ \psi)(p)) = \pi(p) = m. \tag{7.17}$$

A tedy $q^\natural \circ \mathbf{\Phi}(\psi) = 1_M$ a jde o řez fibrace E/G. Zobrazení Φ je zjevně lineární. Konečně, pro každou funkci $h \in C^\infty(M)$ dostáváme

$$\{\mathbf{\Phi}(h \bullet \psi)\}(m) = \natural((h \circ \pi)(p)\psi(p)) = h(m) \cdot \natural(\psi(p)) = h(m) \cdot \{\mathbf{\Phi}(\psi)\}(m). \tag{7.18}$$

S konstrukcí inverze $\mathbf{\Phi}^{-1}$ je to trošičku složitější, protože musíme využít lokální trivializaci popsanou v předchozím důkazu. Nechť $\phi \in \Gamma(E/G)$. Na okolí U_α můžeme definovat kompozici $\phi_\alpha = \mu_\alpha^{-1} \circ \phi$, t.j. $\phi_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha \times V$. Z definice hladkého řezu $\phi_\alpha(m) = (m, \hat\phi_\alpha(m))$ pro hladké zobrazení $\hat\phi_\alpha : U_\alpha \to V$. Pro libovolný bod $p \in \mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ definujeme (lokální řez) $(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to E$ vztahem $(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\alpha(p) = \psi_\alpha(p, \hat\phi_\alpha(\pi(p)))$. Protože $q \circ \phi_\alpha = 1_{U_\alpha}$ a funkce napravo jsou zjevně hladké, dostáváme hladký lokální řez na $\mathcal{U}_\alpha$. Pokud ukážeme, že pro $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ platí $(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\alpha(p) = (\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\beta)(p)$, dostaneme hladký globální řez $\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi)$.

Porovnáním dvou různých trivializačních zobrazení na E/G dostáváme pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\mu_\alpha(m, \hat\phi_\alpha(m)) = \phi(m) = \mu_\beta(m, \hat\phi_\beta(m)) = \mu_\alpha(m, [g^\natural_{\alpha\beta}(m)](\hat\phi_\beta(m))), \tag{7.19}$$

a tedy $\hat{\phi}_\alpha(m) = [g^\natural_{\alpha\beta}(m)](\hat{\phi}_\beta(m))$. Nyní můžeme porovnat lokální řezy E, nechť $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\alpha(p) &= \psi_\alpha(p, \hat{\phi}_\alpha(\pi(p))) = \psi_\alpha\{p, [g^\natural_{\alpha\beta}(\pi(p))](\hat{\phi}_\beta(\pi(p))\} \\ &= \psi_\alpha\{p, [\hat{g}_{\alpha\beta}(p)](\hat{\phi}_\beta(\pi(p))\} = \psi_\beta(p, \hat{\phi}_\beta(\pi(p))) = (\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\beta(p).\end{aligned} \tag{7.20}$$

Máme dokázáno, že $\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi)$ definuje globální řez. Zbývá ověřit, že je vskutku inverzní k $\mathbf{\Phi}$. Pro $m \in U_\alpha$ máme

$$\{\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))\}(m) = \natural(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi)(p)) = (\natural \circ \psi_\alpha)(p, \hat{\phi}_\alpha(\pi(p))) \tag{7.21}$$

Ale z definice lokální trivializace $\natural \circ \psi_\alpha(p, v) = \mu_\alpha(\pi(p), v)$, a dostáváme tedy

$$\{\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))\}(m) = \mu_\alpha(m, \hat{\phi}_\alpha(m)) = \phi(m). \tag{7.22}$$

Opačné poskládání $\mathbf{\Phi}^{-1} \circ \mathbf{\Phi} = 1$ se ověří obdobně. A máme dokázáno. ■

Nyní si ukážeme dva klasické příklady této konstrukce.

Příklad 7.1.7 (Redukce tečného bandlu)**.** Uvažujme vektorový bandl $\tau_P : TP \to P$, tj. obyčejný tečný fibrovaný prostor. Pravou akci $\Re : TP \times G \to TP$ můžeme definovat následovně. Nechť $X \in TP$, tj. $X \in T_pP$ pro bod $p = \tau_P(X)$. Definujeme $\Re_g(X) = R_{g*}(X)$. $R_{g*} \in \mathrm{Hom}(T_pP, T_{p\cdot g}P)$ a $\Re_g$ je tedy po vláknech lineární zobrazení takové, že diagram

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\Re_g} & TP \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_P} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_P} \\ P & \xrightarrow{R_g} & P \end{array} \tag{7.23}$$

komutuje. $(\Re_g, R_g)$ je tedy automorfismus vektorového bandlu TP. Musíme ukázat, že na TP existuje ekvivariantní lokální trivializace. Nechť $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in I}\}$ je principální lokální trivializace P, tj. $\phi_\alpha : U_\alpha \times G \to \mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Pro každé $p \in \mathcal{U}_\alpha$ máme tedy $p = \phi_\alpha(m, g)$ pro $m \in U_\alpha$ a $g \in G$. Zobrazení ϕ_α je difeomorfismus, a tedy $\phi_{\alpha*} : T_mU_\alpha \oplus T_gG \to T_pP$ je lineární izomorfismus.

Předpokládejme, že na $U_\alpha \subseteq M$ máme lokální souřadnice $(x^1, \ldots, x^n)$, a nechť $(\vec{V}, x) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}$. Definujeme trivializační zobrazení $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \to \tau_P^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ jako

$$\psi_\alpha(\phi_\alpha(m, g), (\vec{V}, x)) = \phi_{\alpha*}(V^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_m, x^R|_g), \tag{7.24}$$

pro všechny $(m, g) \in U_\alpha \times G$. Snadno se ověří, že jde vskutku o hladkou lokální trivializaci (v podstatě je to standardní lokální trivializace tečného bandlu, kde se nejprve použije lokální izomorfismus $T\mathcal{U}_\alpha \cong TU_\alpha \times TG$). Navíc je to ekvivariantní lokální trivializace:

$$\begin{aligned}\Re_h\{\psi_\alpha(\phi_\alpha(m, g), (\vec{V}, x))\} &= (R_h \circ \phi_\alpha)_*(V^i\partial_i|_m, x^R|_g) = (\phi_\alpha \circ (1 \times R_h))_*(V^i\partial_i|_m, x^R|_g) \\ &= \phi_{\alpha*}(V^i\partial_i|_m, R_{h*}(x^R|_g)) = \phi_{\alpha*}(V^i\partial_i|_m, x^R|_{gh}) \\ &= \psi_\alpha(\phi_\alpha(m, gh), (\vec{V}, x)) = \psi_\alpha(R_h(\phi_\alpha(m, g)), (\vec{V}, x)).\end{aligned} \tag{7.25}$$

Můžeme tedy vypustit výše zmíněnou mašinerii a sestrojit vektorový bandl $\tau_P^\natural : TP/G \to M$. Podle výše zmíněného tvrzení navíc $\Gamma(TP/G) \cong \Gamma_G(TP) \equiv \mathfrak{X}_G(P)$, kde $X \in \mathfrak{X}_G(P)$, pokud $R_{g*}(X|_p) = X|_{p\cdot g}$, tzn. $\Gamma(TP/G)$ odpovídá G-invariantním vektorovým polím na P. TP/G se někdy nazývá **Atiyahův vektorový bandl** a hraje důležitou roli při více „algebraickém“ popisu konexí na principálním fibrovaném prostoru.

7.2 Asociovaná fibrace

Druhý příklad je natolik důležitý, že si vysloužil vlastní sekci. Uvažujme libovolnou konečněrozměrnou reprezentaci (V, ρ). Vezmeme si triviální vektorový bandl $E = P \times V$ nad P, tj. $q = \pi_1$. Pravou akci $\Re : E \times G \to E$ si zavedeme vztahem

$$\Re_g(p, v) = (p \cdot g, \rho(g^{-1})[v]), \tag{7.26}$$

pro všechny $(p, v) \in P \times V$. Snadno je vidět, že akce působí lineárně po vláknech a $(\Re_g, R_g)$ tvoří automorfismus vektorových bandlů. Kanonická (globální) trivializace ovšem není G-ekvivariantní. Musíme si definovat jinou.

Nechť $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je lokální trivializace hlavní fibrace P. Nechť $\mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, a definujeme naši oblíbenou hladkou funkci $g_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to G$ vztahem $p = \phi_\alpha(\pi(p), g_\alpha(p))$. Definujeme trivializační zobrazení $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times V \to \pi_1^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ jako

$$\psi_\alpha(p, v) = (p, \rho(g_\alpha^{-1}(p))[v]). \tag{7.27}$$

Je snadné si rozmyslet, že jde o hladké zobrazení. Inverzní zobrazení ψ_α^{-1} má tvar $\psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, \rho(g_\alpha(p))[v])$. Zbývá ukázat, že je tato lokální trivializace ekvivariantní.

$$\begin{aligned} \Re_h(\psi_\alpha(p, v)) &= (p \cdot h, \rho(h^{-1})\{\rho(g_\alpha^{-1}(p))[v]\}) = (p \cdot h, \rho((g_\alpha(p) \cdot h)^{-1})[v]) \\ &= (p \cdot h, \rho(g_\alpha(p \cdot h)^{-1})[v]) = \psi_\alpha(p \cdot h, v). \end{aligned} \tag{7.28}$$

Použili jsme obvyklou ekvivarianci funkce g_α. Jaká jsou přechodová zobrazení trivializace ψ_α? Připomeňme, že zobrazení g_α a g_β jsou pro $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ vztaženy jako $g_\alpha(p) = g^P_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p)$, kde $g^P_{\alpha\beta}$ jsou přechodová zobrazení $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Potom

$$\begin{aligned} [g_{\alpha\beta}(p)](v) &= \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(\psi_\beta(p, v)) = \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(p, \rho(g_\beta^{-1}(p))[v]) \\ &= \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(p, \rho(g_\alpha^{-1}(p))[\rho(g^P_{\alpha\beta}(\pi(p))[v]]) \\ &= \rho(g^P_{\alpha\beta}(\pi(p)))[v]. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Jinými slovy, přechodovými zobrazeními jsou kompozice $\hat{g}_{\alpha\beta} = \rho \circ g^P_{\alpha\beta} \circ \pi$. To mi ihned dává přechodová zobrazení $(P \times V)/G$ ve tvaru $g^\natural_{\alpha\beta} = \rho \circ g^P_{\alpha\beta}$.

Definice 7.2.1. Vektorový bandl na faktorprostoru $(P \times V)/G$ se nazývá **vektorový bandl přidružený hlavní fibraci** $\pi : P \to M$ **a reprezentaci** (V, ρ). Obvyklé značení je $P \times_\rho V$. Někdy též **asociovaný vektorový bandl**.

Nyní můžeme použít tvrzení 7.1.6 k identifikaci modulu řezů $\Gamma(P \times_\rho V)$.

Tvrzení 7.2.2. *Pro každou přidruženou reprezentaci máme kanonický izomorfismus*

$$\Gamma(P \times_\rho V) \cong \Omega^0_\rho(P, V) \tag{7.30}$$

Jinými slovy, řezy $P \times_\rho V$ lze identifikovat s veličinami typu ρ.

Důkaz. Ve světle tvrzení 7.1.6 stačí ukázat, že $\Gamma_G(P \times V)$ jsou právě veličiny typu ρ. Každý řez $\sigma \in \Gamma(P \times V)$ musí být hladké zobrazení $\sigma : P \to P \times V$, splňující $\pi_1 \circ \sigma = 1_P$. Tedy

$$\sigma(p) = (p, \Phi(p)), \tag{7.31}$$

kde $\Phi : P \to V$ je hladká funkce. Máme tedy kanonický izomorfismus $\Gamma(P \times V) \cong C^\infty(P, V)$. Řez σ je G-invariantní, pokud $\Re_g(\sigma(p)) = \sigma(p \cdot g)$. Potom máme

$$\Re_g(\sigma(p)) = (p \cdot g, \rho(g^{-1})[\Phi(p)]) \stackrel{!}{=} \sigma(p \cdot g) = (p \cdot g, \Phi(p \cdot g)). \tag{7.32}$$

Dostáváme podmínku $\Phi(p \cdot g) = \rho(g^{-1})[\Phi(p)]$, tedy nic jiného než $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$. Dostáváme tedy kýžený izomorfismus $\Gamma(P \times_\rho V) \cong \Omega^0_\rho(P, V)$. ■

Příklad 7.2.3. Pro $(V, \rho) = (\mathfrak{g}, Ad)$ se $\mathfrak{g}_P \equiv P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ nazývá **adjungovaný vektorový bandl**. Jeho řezy jsou Ad-ekvivariantní funkce na P.

Příklad 7.2.4. Nechť $\pi : F(M) \to M$ je repérová hlavní fibrace variety M. Zvolíme si reprezentaci $(\mathbb{R}^n, \rho)$, kde ρ je kanonická reprezentace $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$.

Připomeňme, že lokální trivializace $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ fibrace $F(M)$ je definovaná na okolích U_α z hladkého atlasu M jako $\phi_\alpha(m, \mathbf{A}) = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$, kde $\partial|_m = (\partial_1|_m, \dots, \partial_n|_m)$ je souřadnicová báze v bodě m odpovídající daným lokálním souřadnicím $(x^1, \dots, x^n)$ na U_α. Potom zobrazení g_α přiřazuje bodu $e \in F(M)$ matici $g_\alpha(e) = \mathbf{A}(e)$, takovou že $e = \partial|_{\pi(e)} \cdot \mathbf{A}(e)$. Akce na triviálním bandlu $E = F(M) \times \mathbb{R}^n$ má tvar $\Re_{\mathbf{A}}(e, \vec{V}) = (e \cdot \mathbf{A}, \mathbf{A}^{-1}.\vec{V})$. Na $\mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ má lokální trivializace $\mu_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n \to (\pi_1^\natural)^{-1}(U_\alpha)$ tvar $\mu_\alpha(m, \vec{V}) = \natural(\psi_\alpha(e, \vec{V})) = \natural(e, \mathbf{A}^{-1}(e).\vec{V})$, kde $e \in F_m(M)$ je libovolná báze $T_m M$.

Nyní připomeňme lokální trivializaci tečného bandlu TM. Definujeme ji jako $\{(U_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, kde $\tau_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \tau_M^{-1}(U_\alpha)$ má tvar $\tau_\alpha(m, \vec{V}) = V^i \partial_i|_m$. Je-li $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ a na U_β máme lokální souřadnice $(y^1, \dots, y^n)$, přechodové zobrazení má tvar

$$[g_{\alpha\beta}(m)](\vec{V}) = \mathbf{J}(m)^{-1}.\vec{V}, \tag{7.33}$$

kde $\mathbf{J}^j_i(m) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_m$ je Jacobiho matice transformace souřadnic.

Definujeme si nyní izomorfismus vektorových bandlů $(\mathcal{F}, 1_M)$ z TM do $F(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$. Nejprve lokálně jako zobrazení $\mathcal{F}_\alpha : \tau_M^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \to (\pi_1^\natural)^{-1}(U_\alpha)$ pomocí příslušných lokálních trivializací:

$$\mathcal{F}_\alpha(\tau_\alpha(m, \vec{V})) = \mu_\alpha(m, \vec{V}), \tag{7.34}$$

To definuje zjevně hladké a po vláknech lineární a bijektivní zobrazení na 1_M (lokálně je to identita). Stačí ukázat, že pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ je $(\mathcal{F}_\beta)_m = (\mathcal{F}_\alpha)_m$. Přechodová zobrazení pro $F(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$ jsou $g^\natural_{\alpha\beta}(m) = \rho(g^{F(m)}_{\alpha\beta}(m))$. Ale $g^{F(m)}_{\alpha\beta}(m) = \mathbf{J}^{-1}(m)$. A můžeme počítat:

$$\mathcal{F}_\alpha(\tau_\beta(m, \vec{V})) = \mathcal{F}_\alpha(\tau_\alpha(m, \mathbf{J}^{-1}(m).\vec{V})) = \mu_\alpha(m, \mathbf{J}^{-1}(m).\vec{V}) = \mu_\beta(m, \vec{V}). \tag{7.35}$$

To ale ukazuje, že pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ působí $\mathcal{F}_\alpha$ stejně jako $\mathcal{F}_\beta$, což dokazuje naše tvrzení. Dostáváme tedy globální izomorfismus $\mathcal{F} : TM \to F(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$.

Připomeňme, že body asociované fibrace $P \times_\rho V$ mají tvar $\natural(p, v)$, kde $(p, v) \in P \times V$ a $\natural(p', v') = \natural(p, v)$, právě tehdy když existuje $g \in G$, takové, že $(p', v') = (p \cdot g, \rho(g^{-1})v)$.

7.3 Paralelní přenos, kovariantní derivace

Nyní si odvodíme několik alternativních způsobů jak popsat paralelní přenos řezů asociované fibrace. Ukážeme si jakým způsobem definuje konexe A na hlavní fibraci operátor kovariantní

derivace. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor a nechť (V, ρ) je libovolná konečněrozměrná reprezentace jeho strukturní grupy G. Nechť $q^\natural : P \times_\rho V \to M$ je příslušný asociovaný vektorový bandl.

Budeme psát $E = P \times_\rho V$. Nechť $\psi \in \Gamma(E)$. Nechť $\gamma : I \to M$ je hladká křivka. Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je 1-forma konexe na P. Nechť $p_0 \in P$ je libovolný bod vlákna nad $\gamma(0)$, tj. $\pi(p_0) = \gamma(0)$. Nechť $\gamma^h : I \to P$ je horizontální zdvih křivky γ startující z bodu p_0, tj. $\gamma^h(0) = p_0$ a $\pi \circ \gamma^h = \gamma$.

Pro každé $t \in I$ je $\psi(\gamma(t)) = \natural(p(t), v(t)) \in E$, kde $(p(t), v(t)) \in P \times V$. Jelikož je ψ řez, musí platit $\gamma(t) = q^\natural(\psi(\gamma(t)) = q^\natural(\natural(p(t), v(t))) = (\pi \circ \pi_1)(p(t), v(t)) = \pi(p(t))$. A tedy $\pi \circ p(t) = \gamma(t)$. Bod $p(t)$ může být zvolen jako libovolný bod vlákna nad $\gamma(t)$, můžeme tedy zvolit

$$\psi(\gamma(t)) = \natural(\gamma^h(t), v(t)). \tag{7.36}$$

Horizontální zdvih (přítomnost konexe) nám tedy umožňuje volit si konzistentně reprezentanta třídy $\psi(\gamma(t))$ v E. Nyní má smysl následující definice.

Definice 7.3.1. Nechť $\psi \in \Gamma(E)$ a $\gamma : I \to M$ je zvolená hladká křivka. Zbytek značení nechť odpovídá diskuzi výše. Řekneme, že řez ψ je **autoparalelní podél křivky** $\gamma(t)$, pokud je funkce $v(t) : I \to V$ definovaná vztahem (7.36) konstantní.

Abychom ukázali, že je tato definice korektní, musí si člověk rozmyslet, že nezávisí na volbě startovního bodu p_0 horizontálního zdvihu γ^h. Pokud γ'^h startuje z $p_0' = p_0 \cdot g$, máme $\gamma'^h(t) = \gamma^h(t) \cdot g$ pro všechny $t \in I$. Potom

$$\psi(\gamma(t)) = \natural(\gamma'^h(t), v'(t)) = \natural(\gamma^h(t) \cdot g, v'(t)) = \natural(\gamma^h(t), \rho(g)v'(t)). \tag{7.37}$$

Odtud tedy $v(t) = \rho(g)v'(t)$. Potom ale $\dot{v}(t) = \rho(g)\dot{v}'(t)$ a konstantnost vektorové funkce $v(t)$ tedy implikuje konstantnost $v'(t)$.

Ukázali jsme, že $\Gamma(E)$ je přirozeně izomorfní $C^\infty(M)$-modulu $\Omega^0_\rho(P, V)$ veličin typu ρ. Tam jsme již ale koncept autoparalelní veličiny definovali. Je tedy logické ukázat, že obě definice jsou plně ekvivalentní.

Tvrzení 7.3.2. *Nechť $\psi \in \Gamma(E)$, a nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$ je odpovídající veličina typu ρ. Potom ψ je autoparalelní podél křivky γ právě tehdy když Φ je autoparalelní podél křivky γ, tj. $\Phi(\gamma^h(t))$ je konstantní pro libovolný horizontální zdvih γ^h.*

Důkaz. Nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V) = \Gamma_G(P \times V)$. Odpovídající řez $\psi \in \Gamma(E)$ je definovaný jako $\psi(m) = \natural(p, \Phi(p))$, kde $p \in \pi^{-1}(m)$ libovolný bod vlákna na m. Pro $m = \gamma(t)$ si můžeme p vybrat jako $\gamma^h(t)$, tj. $\psi(\gamma(t)) = \natural(\gamma^h(t), \Phi(\gamma^h(t)))$. To ale ukazuje, že $v(t) = \Phi(\gamma^h(t))$, takže zjevně $v(t)$ je konstantní právě tehdy když $\Phi(\gamma^h(t))$ je konstantní. To dokazuje naše tvrzení. ■

Autoparalelnost veličin můžeme analyzovat pomocí následující definice kovariantní derivace. Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$ je vektorové pole. Nechť $\gamma(t) : I \to M$ je integrální křivka pole X startující z bodu m, tj. $\gamma(0) = m$. Nechť $\gamma^h : I \to P$ je libovolný horizontální zdvih γ. Nechť $\psi \in \Gamma(E)$. Definujeme **kovariantní derivaci řezu ψ podél vektorového pole X** vztahem

$$(\nabla_X \psi)(m) = \natural(\gamma^h(0), \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v(t)), \tag{7.38}$$

kde $v(t)$ je zobrazení definované vztahem (7.36). Musíme ověřit, že $\nabla_X \psi$ je opravdu hladký řez E. Místo přímého ověření můžeme použít izomorfismus $\Gamma(E) \cong \Omega^0_\rho(P, V)$.

Lemma 7.3.3. *Nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$ je veličina typu ρ. Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$. Potom $\nabla_X\Phi \in C^\infty(P,V)$ definovaná vztahem*

$$\nabla_X\Phi = X^h.\Phi, \tag{7.39}$$

je opět veličina typu ρ. Zde $X^h \in \mathfrak{X}(P)$ je horizontální zdvih vektorového pole X. Odpovídá-li Φ řezu $\psi \in \Gamma(E)$, pak $\nabla_X\Phi$ odpovídá řezu $\nabla_X\psi$.

Důkaz. Mimo jiné tím zadarmo dokážeme, že opravdu $\nabla_X\psi \in \Gamma(E)$. Zjevně $\nabla_X\Phi$ je hladké zobrazení z P do V. Musíme ukázat, že je to veličina typu ρ. Připomeňme, že X^h je G-invariantní vektorové pole, tj. $X^h|_{p\cdot g} = R_{g*}(X^h|_p)$. Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned}(X^h.\Phi)(p\cdot g) &= \langle (d\Phi)|_{p\cdot g}, X^h|_{p\cdot g}\rangle = \langle (d\Phi)|_{p\cdot g}, R_{g*}(X^h|_p)\rangle = \langle R_g^*((d\Phi)|_{p\cdot g}), X^h|_p\rangle \\ &= \langle d(R_g^*\Phi)|_p, X^h|_p\rangle = \langle d(\rho(g^{-1})\Phi)|_p, X^h|_p\rangle = \rho(g^{-1})\{(X^h.\Phi)(p))\}.\end{aligned} \tag{7.40}$$

Odtud tedy $\nabla_X\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$. Zbývá ukázat, že $\nabla_X\Phi$ odpovídá řezu $\nabla_X\psi$. Nechť $\psi' \in \Gamma(E)$ je řez odpovídající $\nabla_X\Phi$. Máme

$$\psi'(m) = \natural(p, (\nabla_X\Phi)(p)) = \natural(p, (X^h.\Phi)(p)), \tag{7.41}$$

kde $p \in \pi^{-1}(m)$ je libovolný bod vlákna nad m. Nechť $\gamma : I \to M$ je integrální křivka pole X startující z bodu m, a nechť $\gamma^h : I \to M$ je horizontální zdvih γ startující ze zvoleného (ale libovolného) bodu $p \in \pi^{-1}(m)$. Ale potom můžeme psát $(X^h.\Phi)(p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi(\gamma^h(t))$ a

$$\psi'(m) = \natural(\gamma^h(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi(\gamma^h(t))). \tag{7.42}$$

Ale v důkazu předchozího tvrzení jsme ukázali, že $v(t) = \Phi(\gamma^h(t))$, a tedy opravdu $\psi' = \nabla_X\psi$. ■

Předtím, než si vyjasníme vlastnosti kovariantní operátoru kovariantní derivace, musíme si vyjasnit následující. Prostor veličin typu ρ, neboli (ekvivalentně) řezů asociované fibrace $P \times_\rho V$ si můžeme vybavit „povláknovou metrikou“, neboli $C^\infty(M)$-bilineárním zobrazením $(\cdot,\cdot)_V : \Omega^0_\rho(P,V) \times \Omega^0_\rho(P,V) \to C^\infty(M)$, které je symetrické a nedegenerované, tj. $(\Phi,\Phi')_V = 0$ pro všechny $\Phi' \in \Omega^0_\rho(P,V)$ implikuje $\Phi = 0$. Nechť $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ je ρ-invariantní nedegenerovaná symetrická bilineární forma na V. Potom můžeme definovat

$$(\Phi,\Phi')_V(m) = \langle\Phi(p), \Phi'(p)\rangle_V \tag{7.43}$$

kde $p \in \pi^{-1}(m)$ je libovolný bod vlákna nad m. Snadno se ověří, že pravá strana nezávisí na volbě p (ρ-invariance $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$) a levá strana závisí hladce na m (π je surjektivní submerze). Symetričnost a nedegenerovanost plyne z vlastností $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.

Tvrzení 7.3.4. *Nechť $\sigma : U \to P$ je lokální řez a $\phi = \sigma^*(\Phi) \in C^\infty(U,V)$ a $\phi' = \sigma^*(\Phi')$ jsou příslušná lokální verze Φ a Φ'. Potom na U máme $(\!(\phi,\phi')\!)_V = (\Phi,\Phi')_V$.*

Důkaz. Pro každé $m \in U$ můžeme psát

$$(\phi,\phi')_V(m) = \langle\sigma^*(\Phi)(m), \sigma^*(\Phi')(m)\rangle_V = \langle\Phi(\sigma(m)), \Phi'(\sigma(m)\rangle_V = (\Phi,\Phi')_V(m). \tag{7.44}$$

■

Nyní si můžeme shrnout vlastnosti kovariantní derivace ∇. Můžeme ji psát v řeči veličin typu ρ nebo (plně ekvivalentně) v řeči řezů asociované fibrace $P \times_\rho V$. My si v tuto chvíli zvolíme první z možností. Připomeňme, že $\Omega^0_\rho(P,V)$ tvoří $C^\infty(M)$-modul s násobením $\bullet$.

Tvrzení 7.3.5 (Vlastnosti ∇). *Nechť $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Omega^0_\rho(P,V) \to \Omega^0_\rho(P,V)$ je konexe odpovídající formě konexe $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$. Potom ∇ je $\mathbb{R}$-bilineární a platí*

$$\nabla_{fX}(\Phi) = f \bullet \nabla_X(\Phi), \quad \nabla_X(f \bullet \Phi) = f \bullet \nabla_X(\Phi) + (X.f) \bullet \Phi, \tag{7.45}$$

pro všechny $X \in \mathfrak{X}(M)$. Vnější kovariantní derivace $D : \Omega^0_\rho(P,V) \to \Omega^1_\rho(P,V)$ souvisí s operátorem kovariantní derivace ∇ vztahem

$$\nabla_X(\Phi) = \langle D\Phi, X^h \rangle \equiv \langle d\Phi, X^h \rangle. \tag{7.46}$$

Konečně, kovariantní derivace ∇ je vždy kompatibilní s metrikou $(\cdot,\cdot)_V$, tj.

$$X.(\Phi,\Phi')_V = (\nabla_X\Phi, \Phi')_V + (\Phi, \nabla_X\Phi')_V, \tag{7.47}$$

pro každé vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $\Phi, \Phi' \in \Omega^0_\rho(P,V)$.

Důkaz. Všechna tvrzení lze snadno dokázat z definice. Pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(M)$ máme

$$\{\nabla_{fX}(\Phi)\}(p) = (fX)^h|_p.\Phi = \{(f\circ\pi)\cdot X^h\}|_p.\Phi = f(\pi(p))\cdot(X^h.\Phi)(p) = \{f \bullet \nabla_X\Phi\}(p). \tag{7.48}$$

Druhá vlastnost se dokáže velmi obdobně. Souvislost z vnější kovariantní derivací plyne přímo z definice D. Konečně, pro libovolnou ρ-invariantní formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ a indukovanou metriku $(\cdot,\cdot)_V$ můžeme psát $(\Phi,\Phi')_V \circ \pi = \langle \Phi, \Phi' \rangle_V$. Potom

$$\begin{aligned} X.(\Phi,\Phi')_V \circ \pi &= X^h.\langle\Phi,\Phi'\rangle_V = \langle X^h.\Phi, \Phi'\rangle_V + \langle \Phi, X^h.\Phi'\rangle_V \\ &= \langle \nabla_X\Phi, \Phi'\rangle_V + \langle \Phi, \nabla_X\Phi'\rangle_V \\ &= \{(\nabla_X\Phi,\Phi')_V + (\Phi,\nabla_X\Phi')_V\}\circ\pi. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Protože je π surjektivní zobrazení, dokázali jsme kompatibilitu s metrikou. ■

Vidíme, že ∇ má vlastnosti velmi podobné obyčejné kovariantní derivaci na varietě. To není úplně náhoda. Vskutku, pokud pro $P = F(M)$ konexe $A \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ odpovídá afinní konexi ∇ na varietě M. Vezmeme-li si $V = (\mathbb{R}^n, \rho)$, kde ρ je standardní reprezentace $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$, máme $\Omega^0_\rho(P,V) \cong \mathfrak{X}(M)$ a kovariantní derivace v této sekci definuje původní afinní konexi.

Máme-li k dispozici operátor kovariantní derivace ∇, můžeme definovat **operátor křivosti** R příslušný ∇ následujícím způsobem. Pro všechny $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ a $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$ definujeme

$$R(X,Y)\Phi = \nabla_X(\nabla_Y\Phi) - \nabla_Y(\nabla_X\Phi) - \nabla_{[X,Y]}\Phi. \tag{7.50}$$

Snadno si odvodíme několik základních vlastnosti operátoru křivosti:

Tvrzení 7.3.6. *Operátor křivosti R příslušný kovariantní derivaci ∇ je $C^\infty(M)$-lineární v každém vstupu, tj. je $\mathbb{R}$-lineární a vzhledem k násobení funkcí platí*

$$R(X,fY)\Phi = R(fX,Y)\Phi = R(X,Y)(f\bullet\Phi) = f\bullet R(X,Y)\Phi, \tag{7.51}$$

pro všechny $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ a $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$. Platí vztah

$$R(X,Y)\Phi = \rho'(\Omega(X^h,Y^h))\Phi \tag{7.52}$$

Důkaz. Vlastnosti vzhledem k násobení funkcí jsou jednoduchý důsledek (7.48). $\mathbb{R}$-linearita je zřejmá. Ukážeme si pouze jedno z tvrzení. Nechť $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ a $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$.

$$\begin{aligned} R(X,Y)(f \bullet \Phi) &= \nabla_X(\nabla_Y(f \bullet \Phi)) - \nabla_Y(\nabla_X(f \bullet \Phi)) - \nabla_{[X,Y]}(f \bullet \Phi) \\ &= \nabla_X(f \bullet \nabla_Y\Phi + (Y.f) \bullet \Phi) - \nabla_Y(f \bullet \nabla_X\Phi + (X.f) \bullet \Phi) \\ &\quad - f \bullet \nabla_{[X,Y]}\Phi - ([X,Y].f) \bullet \Phi \\ &= f \bullet \{\nabla_X(\nabla_Y\Phi) - \nabla_Y(\nabla_X\Phi) - \nabla_{[X,Y]}\Phi\} \\ &\quad + (X.f) \bullet \nabla_Y\Phi + (Y.f) \bullet \nabla_X\Phi - (Y.f) \bullet \nabla_X\Phi - (X.f) \bullet \nabla_Y\Phi \\ &\quad + \{X.(Y.f) - Y.(X.f) - [X,Y].f\} \bullet \Phi \\ &= f \bullet R(X,Y)\Phi. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Linearita v ostatních vstupech se dokáže analogicky (jednodušeji). Zbývá ukázat poslední tvrzení. Z definice kovariantní derivace máme

$$R(X,Y)\Phi = X^h.(Y^h.\Phi) - Y^h.(X^h.\Phi) - [X,Y]^h.\Phi = \{[X^h,Y^h] - [X,Y]^h\}.\Phi. \tag{7.54}$$

Musíme tedy vyzkoumat akci vektorového pole $[X^h,Y^h] - [X,Y]^h$. Připomeňme, že $X^h \sim_\pi X$, a z toho důvodu $[X^h,Y^h] \sim_\pi [X,Y]$. Jinými slovy, $[X^h,Y^h] - [X,Y]^h$ je vertikální vektorové pole. Máme tedy $[X^h,Y^h] - [X,Y]^h = f^\mu \cdot \#t_\mu$ pro neznámé funkce $f^\mu \in C^\infty(P)$. Zapůsobíme na obě strany 1-formou konexe A. Dostáváme

$$\begin{aligned} f^\mu \cdot t_\mu &= A(f^\mu \cdot \#t_\mu) = A([X^h,Y^h] - [X,Y]^h) = A([X^h,Y^h]) \\ &= -\{X^h.A(Y^h) - Y^h.A(X^h) - A([X^h,Y^h])\} \\ &= -\Omega(X^h,Y^h) = -\Omega^\mu(X^h,Y^h) \cdot t_\mu. \end{aligned} \tag{7.55}$$

Odtud tedy $f^\mu = -\Omega^\mu(X^h,Y^h)$. Připomeňme, že Φ je veličina typu ρ a tedy platí

$$R(X,Y)\Phi = f^\mu \#t_\mu.\Phi = -\rho'(f^\mu \cdot t_\mu)\Phi = \rho'(\Omega(X^h,Y^h))\Phi. \tag{7.56}$$

A máme dokázáno! ∎

7.4 Kalibrační teorie podruhé

Na závěr této kapitoly si ukážeme, jak lze akci kalibrační teorie přepsat v řeči globálně definovaných objektů na M, což je v kontrastu s originálním funkcionálem, kde akci definujeme „lepením po lokálních kouscích“. Nejprve si musíme definovat následující zobecnění známého pojmu formy s hodnotami ve vektorovém prostoru

Definice 7.4.1. Nechť $q : E \to M$ je vektorový fibrovaný prostor. Potom zobrazení $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$ se nazývá **p-forma s hodnotami v řezech** E, pokud je totálně antisymetrické a $C^\infty(M)$-lineární v každém vstupu. Jejich prostor tvoří $C^\infty(M)$-modul označovaný jako $\Omega^p(M,E)$. Pro triviální vektorový bandl $E = M \times V$ máme $\Gamma(E) = C^\infty(M,V)$ a tedy $\Omega^p(M,E) = \Omega^p(M,V)$ je prostor forem s hodnotami ve vektorovém prostoru V.

Formy s hodnotami ve vektorovém bandlu lze opět rozložit do „komponentních forem“. Tentokrát to obecně lze pouze lokálně. Řekneme, že $\{\psi_\mu\}_{\mu=1}^{\mathrm{rank}(E)}$ jsou **lokální generátory** $\Gamma(E)$, pokud $\psi_\mu \in \Gamma_U(E)$ je pro každé μ lokální řez E na okolí $U \subseteq M$ a pro každé $m \in U$ tvoří

$\{\psi_j(m)\}_{j=1}^{\mathrm{rank}(E)}$ bázi vektorového prostoru vlákna E_m. Lze si snadno rozmyslet, že každý řez $\psi \in \Gamma(E)$ lze na U psát jako $\psi = f^j\psi_j$ pro unikátní hladké funkce $f^j \in C^\infty(U)$. Potom pro $\omega \in \Omega^p(M,E)$ můžeme na U pro vektorová pole $(X_1,\dots,X_p)$ psát

$$\omega(X_1,\dots,X_p) = \omega^j(X_1,\dots,X_p)\cdot\psi_j, \tag{7.57}$$

a analogicky jako pro formy ve vektorovém prostoru zjistíme, že $\omega^j \in \Omega^p(U)$.

Příklad 7.4.2. Nechť $E = \mathfrak{g}_P = P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ je adjungovaný vektorový bandl. Již jsme si ujasnili, že $\Gamma(E) \cong C^\infty_{Ad}(P,\mathfrak{g})$. Definujeme $F \in \Omega^2(M,\mathfrak{g}_P)$ vztahem

$$F(X,Y) = \Omega(X^h, Y^h) \in \Gamma(\mathfrak{g}_P) \tag{7.58}$$

Musíme ukázat, že pravá strana je opravdu Ad-ekvivariantní a závisí $C^\infty(M)$-lineárně na X a Y. První věc plyne z ekvivariance 2-formy křivosti a invariance horizontálních zdvihů:

$$\begin{aligned} F(X,Y)(p\cdot g) &= \Omega|_{p\cdot g}(X^h|_{p\cdot g}, Y^h|_{p\cdot g}) = \Omega|_{p\cdot g}(R_{g*}(X^h|_p), R_{g*}(Y^h|_p)) \\ &= R_g^*(\Omega|_{p\cdot g})(X^h|_p, Y^h|_p) = Ad_{g^{-1}}(\Omega|_p(X^h|_p, Y^h|_p)) \\ &= Ad_{g^{-1}}(F(X,Y)(p)). \end{aligned} \tag{7.59}$$

$C^\infty(M)$-linearita plyne z vlastnosti $(f\cdot X)^h = (f\circ\pi)\cdot X^h$. Potom

$$F(fX,Y) = \Omega((f\circ\pi)\cdot X^h, Y^h) = (f\circ\pi)\cdot\Omega(X^h,Y^h) = f\bullet F(X,Y). \tag{7.60}$$

Linearita v druhém vstupu již plyne z antisymetrie. Dokázali jsme, že $F \in \Omega^2(M,\mathfrak{g}_P)$. Jelikož Ω je horizontální 2-forma na P, obsahuje F všechny informace o křivosti $\Omega = DA$. Z tohoto důvodu se někdy F říká **2-forma křivosti konexe** A.

Na rozdíl od forem na vektorovém prostoru nemůžeme přímočaře definovat vnější derivaci $d : \Omega^p(M,E) \to \Omega^{p+1}(M,E)$. V případě, že $E = P\times_\rho V$ je asociovaný vektorový bandl, můžeme využít operátoru kovariantní derivace.

Definice 7.4.3. Nechť $E = P\times_\rho V$ Potom $\Gamma(E) \cong C^\infty_\rho(P,V) \equiv \Omega^0(M,E)$ Definujeme **kovariantní diferenciál** $\nabla : \Omega^0(M,E) \to \Omega^1(M,E)$ vztahem

$$\nabla(\Phi)(X) = \nabla_X(\Phi), \tag{7.61}$$

pro všechny $\Phi \in \Omega^0(M,E)$ a $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Z vlastností kovariantní derivace plyne, že $\nabla(\Phi)(f\cdot X) = \nabla_{f\cdot X}(\Phi) = f\bullet\nabla_X(\Phi)$ a tedy opravdu $\nabla(\Phi)\in\Omega^1(M,E)$. Ve skutečnosti se dá kovariantní diferenciál ∇ rozšířit na zobrazení $\nabla : \Omega^p(M,E) \to \Omega^{p+1}(M,E)$ s využitím pomocné afinní konexe na M. Nebudeme to však potřebovat.

Konečně, musíme si ujasnit, že pro varietu (M,g,o) můžeme na prostoru forem $\Omega^p(M, P\times_\rho V)$ definovat povláknový skalární součin $(\cdot,\cdot)_V$ analogicky jako na $\Omega^0_\rho(P,V) \equiv \Omega^0(M, P\times_\rho V)$, jen s použitím Hodgeovy duality. Nechť $\{\Phi_j\}_{j=1}^{\dim V}$ jsou libovolné lokální generátory $\Gamma(E)$. Potom na $U\subseteq M$ můžeme psát $\omega = \omega^j\cdot\Phi_j$, $\omega' = \omega'^k\Phi_k$. Definujeme

$$(\omega,\omega')_V = (\omega^j,\omega'^k)_g\cdot(\Phi_j,\Phi_k)_V, \tag{7.62}$$

kde na pravé straně používáme povláknový skalární součin definovaný na $C^\infty_\rho(P,V)$ v předchozí sekci. Snadno se ověří, že $(\cdot,\cdot)_V$ je (pseudo)skalární součin na prostoru $\Omega^p(M, P\times_\rho V)$.

Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe, $F \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}_P)$ příslušná 2-forma křivosti. Nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$ je veličina typu ρ. Můžeme definovat funkcionál

$$S'[A, \Phi] = \int_M \{-\frac{1}{2}(F, F)_\mathfrak{g} + (\nabla\Phi, \nabla\Phi)_V - m^2(\Phi, \Phi)_V\} \cdot \omega_g. \tag{7.63}$$

Nyní si ukážeme, že tohle je přesně stejný funkcionál jako kalibrační teorie pro dvojici polí $(\mathcal{A}, \phi)$ definovaný akci (6.55). V této verzi ovšem nepoužíváme lokální řezy a příslušné lokální formy konexe $\mathcal{A}$ a hmotové pole ϕ. Mimo jiné opravdu vidíme, že skutečnými geometrickými objekty v pozadí kalibrační teorie jsou globální pole (A, Φ).

Tvrzení 7.4.4. *Funkcionál $S'[A, \Phi]$ je ekvivalentní přepis funkcionálu $S[\mathcal{A}, \phi]$.*

Důkaz. Může být matoucí, že S píšeme jako funkcionál od polí $(\mathcal{A}, \phi)$. To má svůj původ ve fyzice, protože tam vždy používají lokální objekty. Striktně vzato závisí i S pouze na dvojici (A, Φ). Oba funkcionály S a S' jsou integrály n-forem na varietě M, přičemž v případě S jsou integrandy definované pouze lokálně (a na průnicích se transformují tak aby definovaly globální n-formu). Nechť $\sigma : U \to P$ je lokální řez. Uvažujme nejprve kinetický člen. Nechť $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ je lokální forma křivosti. Máme

$$S_{kin}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\int_M (\!(\mathcal{F}, \mathcal{F})\!)_\mathfrak{g} \cdot \omega_g, \tag{7.64}$$

kde $(\!(\mathcal{F}, \mathcal{F})\!)_\mathfrak{g} \in C^\infty(U)$ je (lokálně definovaná) funkce

$$(\!(\mathcal{F}, \mathcal{F})\!)_\mathfrak{g} \cdot \omega_g = \mathcal{F}^\mu \wedge *_g(\mathcal{F}^\nu) \cdot \langle t_\mu, t_\nu \rangle_\mathfrak{g}. \tag{7.65}$$

Na druhou stranu, kinetický člen v S' má explicitní tvar

$$-\frac{1}{2}(F, F)_\mathfrak{g} \cdot \omega_g = -\frac{1}{2}(F^\mu, F^\nu)_g \cdot (\Phi_\mu, \Phi_\nu)_\mathfrak{g} \cdot \omega_g = -\frac{1}{2}F^\mu \wedge *(F^\nu) \cdot (\Phi_\mu, \Phi_\nu)_\mathfrak{g}, \tag{7.66}$$

kde $\{\Phi_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ jsou libovolné lokální generátory $\Gamma(\mathfrak{g}_P)$ na nějakém okolí U. Lokální řez σ můžeme využít ke speciální volbě lokálních generátorů na U. Chceme $\Phi_\mu \in C^\infty_{Ad}(P, \mathfrak{g})$. Definujeme

$$\Phi_\mu(\sigma(m)) = t_\mu, \tag{7.67}$$

kde $t_\mu \in \mathfrak{g}$ je vektor báze $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ algebry $\mathfrak{g}$. Standardním způsobem můžeme definovat hladké zobrazení $g : \pi^{-1}(U) \to G$ vztahem $p = \sigma(\pi(p)) \cdot g(p)$. Pro libovolné p tak z požadavku ekvivariance Φ dostáváme jednoznačný předpis

$$\Phi_\mu(p) = \Phi_\mu(\sigma(\pi(p)) \cdot g(p)) = Ad_{g(p)^{-1}}\Phi_\mu(\sigma(\pi(p)) = Ad_{g(p)^{-1}}(t_\mu). \tag{7.68}$$

Z definice $g(p \cdot h) = g(p) \cdot h$ a snadno se tedy ověří, že Φ_μ je Ad-ekvivariantní funkce definovaná na $\pi^{-1}(U)$, a tedy $\Phi_\mu \in C^\infty_{Ad}(\pi^{-1}(U), \mathfrak{g}) \cong \Gamma_U(\mathfrak{g}_P)$. Nechť $\Phi \in C^\infty_{Ad}(\pi^{-1}(U), \mathfrak{g})$. Máme $\Phi(\sigma(m)) = f^\mu(m) \cdot t_\mu$ pro jednoznačné a hladké funkce $f^\mu \in C^\infty(U)$. A tady

$$\Phi(p) = \Phi(\sigma(\pi(p)) \cdot g(p)) = Ad_{g(p)^{-1}}(\Phi(\sigma(\pi(p))) = f^\mu(\pi(p)) \cdot Ad_{g(p)^{-1}}(t_\mu) = (f^\mu \bullet \Phi_\mu)(p). \tag{7.69}$$

Vidíme tedy, že $\{\Phi_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ tvoří lokální generátory $\Gamma(\mathfrak{g}_P)$ na U. S využitím lokálního řezu můžeme pro $m \in U$ psát

$$(\Phi_\mu, \Phi_\nu)_\mathfrak{g}(m) = (\Phi_\mu, \Phi_\nu)_\mathfrak{g}(\pi(\sigma(m)) = \langle \Phi_\mu(\sigma(m)), \Phi_\nu(\sigma(m)) \rangle_\mathfrak{g} = \langle t_\mu, t_\nu \rangle_\mathfrak{g} \tag{7.70}$$

Zbývá ukázat, že komponentní 1-formy $\mathcal{F}^\mu$ and F^μ (pro tyto konkrétní lokální generátory) jsou stejné. Z definice máme

$$F^\mu(X,Y) \bullet \Phi_\mu = F(X,Y) = \Omega(X^h, Y^h) = \Omega^\mu(X^h, Y^h) \cdot t_\mu. \tag{7.71}$$

Obě strany jsou funkce na P, které vyčíslíme v bodě $p = \sigma(m)$. Dostáváme

$$\{F^\mu(X,Y)\}(m) \cdot t_\mu = \{\Omega^\mu(X^h, Y^h)\}(\sigma(m)) \cdot t_\mu. \tag{7.72}$$

Nyní si stačí uvědomit, že $\sigma_*(X|_m) = X^h|_{\sigma(m)} + \#x|_{\sigma(m)}$ pro nějaké $x \in \mathfrak{g}$, a podobně pro Y. Jelikož Ω je horizontální 2-forma, dostáváme

$$\begin{aligned} \{\Omega^\mu(X^h, Y^h)\}(\sigma(m)) &= \Omega^\mu|_{\sigma(m)}(\sigma_*(X|_m), \sigma_*(Y|_m)) \\ &= (\sigma^*\Omega)^\mu|_m(X|_m, Y|_m) = \{\mathcal{F}^\mu(X,Y)\}(m). \end{aligned} \tag{7.73}$$

Porovnáním obou stran dostáváme výsledek. Tedy $S_{kin}[\mathcal{A}] = S'_{kin}(A)$. Ekvivalence zbývajících členů se ukáže úplně analogicky, tj. přítomnost lokálního řezu σ poslouží k výběru vhodných lokálních generátorů $C^\infty(U)$-modulu $\Gamma_U(P \times_\rho V)$. ■

Kapitola 8

Spinová teorie

8.1 Cliffordovy algebry a spinová grupa

Nechť V je konečněrozměrný reálný vektorový prostor. Pro každé $p \in \mathbb{N}$ definujeme

$$T^p(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ krát}}. \tag{8.1}$$

Konvenčně zavádíme $T^0(V) := \mathbb{R}$. Pro $p \in \mathcal{N}$ je tedy $T^p(V)$ vektorový prostor generovaný vektory ve tvaru $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$, které splňují relace

$$v_1 \otimes \cdots \otimes (v_i + \lambda w_i) \otimes \cdots \otimes v_p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_p + \lambda v_1 \otimes \cdots \otimes w_i \otimes \cdots \otimes v_p \tag{8.2}$$

pro každé $i \in \{1, \ldots, p\}$ a vektory $v_1, \ldots, v_p, w_i \in V$. $T^p(V)$ se nazývá **p-tá tenzorová mocnina vektorového prostoru** V. Je-li $(e_i)_{i=1}^{\dim(V)}$ báze V, tvoří soubor

$$(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})_{(i_1,\ldots,i_p) \in \{1,\ldots,n\}^p} \tag{8.3}$$

bázi $T^p(V)$. Jinými slovy $T^p(V)$ je konečněrozměrný vektorový prostor a $\dim(T^p(V)) = n^p$. Uvažujme direktní sumu těchto prostorů, tedy

$$T(V) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V). \tag{8.4}$$

Elementy tohoto prostoru jsou formální součty *konečně mnoha* elementů z různých tenzorových mocnin. Například tedy výrazu typu $1 + v \otimes w - x \otimes y \otimes z$. Pro netriviální V je $T(V)$ vždy nekonečněrozměrný vektorový prostor!

Na $T(V)$ lze zavést asociativní bilineární součin $\otimes : T(V) \times T(V) \to T(V)$. Pro každé $p, q \in \mathbb{N}_0$ zavedeme $\otimes_{p,q} : T^p(V) \times T^q(V) \to T^{p+q}(V)$ vztahem

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes_{p,q} (w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \tag{8.5}$$

pro všechny $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q \in V$, a rozšíříme na bilineární zobrazení. Pro $p = 0$ nebo $q = 0$ zavedeme jako $\lambda \otimes_{0,q} t := \lambda t$ a $t' \otimes_{p,0} \lambda := \lambda t'$ pro všechny $\lambda \in \mathbb{R} = T^0(V)$ a $t \in T^q(V)$ a

$t' \in T^p(V)$. Součin $\otimes$ pak dostaneme požadováním bilinerity, například:

$$\begin{aligned}(1 + v \otimes w) \otimes (x - y \otimes z) &= 1 \otimes_{0,1} x - 1 \otimes_{0,2} (y \otimes z) \\ &\quad + (v \otimes w) \otimes_{2,1} x - (v \otimes w) \otimes_{2,2} (y \otimes z) \\ &= 1 \otimes x - 1 \otimes y \otimes z + v \otimes w \otimes x - v \otimes w \otimes y \otimes z.\end{aligned} \tag{8.6}$$

$(T(V), \otimes)$ se nazývá **tenzorová algebra prostoru** V. Triviálně se ověří, že $T(V)$ je asociativní algebra s jednotkou $1 \in T^0(V) \equiv \mathbb{R}$. Tenzorová algebra *není komutativní*.

Definice 8.1.1. Ideálem $J \subseteq T(V)$ nazýváme podprostor J takový, že pro všechny $j \in J$ a všechny $s, t \in T(V)$ platí $s \otimes j \otimes t \in T(V)$.

Pro každou podmnožinu $S \subseteq T(V)$ existuje **ideál** $\langle S \rangle$ **generovaný množinou** S. Je to unikátní nejmenší ideál obsahující množinu S. Explicitně má tvar

$$\langle S \rangle = \mathbb{R}\{t \otimes s \otimes t' \mid s \in S,\ t, t' \in T(V)\}. \tag{8.7}$$

Pro každý ideál $J \subseteq T(V)$ existuje struktura asociativní algebry s jednotkou na faktorprostoru $T(V)/J$. Připomeňme, že na $T(V)$ se zavede relace ekvivalence $t \sim t' \Leftarrow t' - t \in J$. $T(V)/J$ je prostor tříd této ekvivalence. Struktura algebry se zavede jednoduše vztahem

$$[t] \cdot [t'] := [t \otimes t'] \tag{8.8}$$

Tato definice dává smysl *pouze v případě*, že J je ideál v $T(V)$. Jednotkou je třída $[1]$.

Definice 8.1.2. Nechť V je konečněrozměrný vektorový prostor vybavený pseudoskalárním součinem $g : V \times V \to V$. Uvažujeme ideál $J_g(V)$ definovaný jako

$$J_g(V) := \langle \{v \otimes w + w \otimes v - 2g(v, w) \mid v, w \in V\} \rangle \tag{8.9}$$

Cliffordova algebra odpovídající (V, g) je definovaná jako příslušná faktoralgebra, tedy

$$\mathrm{Cl}(V, g) := T(V)/J_g(V). \tag{8.10}$$

Jak tato algebra vypadá v praxi? Nechť $[v] \in \mathrm{Cl}(V, g)$ je třída ekvivalence $v \in V \equiv T^1(V)$. Potom pro každé $v, w \in V$ dostáváme následující relaci:

$$[v] \cdot [w] + [w] \cdot [v] = [v \otimes w + w \otimes v] = 2g(v, w)[1]. \tag{8.11}$$

Prostor $\mathrm{Cl}(V, g)$ je tedy generovaný formálními konečnými lineárními kombinacemi vektorů tvaru $[v_1] \cdots [v_p] \equiv [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p]$. Je-li $(e_i)_{i=1}^n$ báze V, snadno se rozmyslí, že každý element $u \in \mathrm{Cl}(V, g)$ lze psát jako jednoznačná lineární kombinace

$$u = \sum_{p=0}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \alpha^{i_1 \ldots i_p} [e_{i_1}] \cdots [e_{i_p}] \tag{8.12}$$

Vidím, že $\mathrm{Cl}(V, g)$ je konečněrozměrná algebra a $\dim(\mathrm{Cl}(V, g)) = 2^n$. Tento rozklad rovněž zadává nekanonický izomorfismus *vektorových prostorů* $\mathrm{Cl}(V, g) \cong \Lambda V$. V následujícím upouštíme od explicitního psaní závorek okolo generátorů $[v]$.

Příklad 8.1.3. Nechť $p, q \in \mathbb{N}_0$ a uvažujme $V = \mathbb{R}^{p+q}$ vybavený standardním pseudoskalárním součinem $g = \eta^{(p,q)}$. Obvykle se používá značení $\mathrm{Cl}(p,q) := \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{p+q}, \eta^{(p,q)})$.

Uvažujme $\mathrm{Cl}(1,1)$ se standardní bázi (e_1, e_2). Máme tedy $g(e_1,e_1) = 1$, $g(e_2,e_2) = -1$ a $g(e_1,e_2) = g(e_2,e_1) = 0$. Podle předchozího pozorování tedy bázi $\mathrm{Cl}(1,1)$ tvoří vektory $(1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2)$. Obecný prvek $u \in \mathrm{Cl}(1,1)$ lze tedy psát jako kombinaci

$$u = \alpha + \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^{12} e_1 \cdot e_2. \tag{8.13}$$

Jak vypadá součin s jiným prvkem $v = \beta + \beta^1 e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^{12} e_1 \cdot e_2$. Jelikož je (e_1, e_2) ortonormální bázi V, je snadné nalézt součiny bazických elementů, t.j.

$$e_1 \cdot e_1 = g(e_1, e_1) = 1, \tag{8.14}$$
$$e_2 \cdot e_2 = g(e_2, e_2) = -1, \tag{8.15}$$
$$e_1 \cdot e_2 = -e_2 \cdot e_1 + 2g(e_1, e_2) = -e_2 \cdot e_1. \tag{8.16}$$

Pomocí nich už snadno spočítáme libovolný součin $u \cdot v$. Uvažujme například $u = 1 + e_1 \cdot e_2$ a $v = e_1 - e_2$. Potom s použitím těchto relací

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (1 + e_1 \cdot e_2) \cdot (e_1 - e_2) = e_1 - e_2 + e_1 \cdot e_2 \cdot e_1 - e_1 \cdot e_2 \cdot e_2 \\ &= 2e_1 - 2e_2. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Podobně snadno se dá počítat v libovolné ortonormální bázi v libovolné Cliffordově algebře.

Příklad 8.1.4. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{C}^{2,2}$ komplexních matic 2×2, vybavený standardní asociativní algebrou maticového násobení. V tomto prostoru leží trojice Pauliho matic $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Jak známo, tyto splňují antikomutační relace

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbf{1}_2 \tag{8.18}$$

Uvažujeme-li nyní Cliffordovu algebru $\mathrm{Cl}(3,0)$, zjistíme, že zobrazení $\Psi : \mathrm{Cl}(3,0) \to \mathbb{C}^{2,2}$ definované na generátorech jako $\Psi(e_i) := \sigma_i$ je izomorfismus algeber, t.j. $\mathrm{Cl}(3,0) \cong \mathbb{C}^{2,2}$.

Máme dva významné podprostory $\mathrm{Cl}(V,g)$. Definujeme $\mathrm{Cl}^+(V,g)$ jako $u \in \mathrm{Cl}(V,g)$ mající netriviální koeficienty v rozkladu (8.12) pouze u *sudých* součinů generátorů. Podobně $\mathrm{Cl}^-(V,g)$ má netriviální koeficienty pouze u *lichých* součinů generátorů. Snadno se ověří, že definice nezávisí na výběru báze $(e_i)_{i=1}^n$ a dostáváme direktní rozklad *vektorového prostoru*

$$\mathrm{Cl}(V,g) = \mathrm{Cl}^+(V,g) \oplus \mathrm{Cl}^-(V,g). \tag{8.19}$$

$\mathrm{Cl}^+(V,g)$ tvoří podalgebru $\mathrm{Cl}(V,g)$. Nyní můžeme definovat důležitý příklad Lieových grup.

Tvrzení 8.1.5. *Nechť (V,g) je konečněrozměrný vektorový prostor vybavený pseudoskalárním součinem g. Uvažujme pouze $V \neq 0$. Definujeme podmnožinu*

$$\mathrm{Pin}(V,g) := \{u \in \mathrm{Cl}(V,g) \mid u = v_1 \cdots v_k,\ \ g(v_i, v_i) \in \{-1, 1\},\ k \in \mathbb{N}\}, \tag{8.20}$$

tedy elementy v u, které lze psát jako součin konečně mnoha elementů z $V \subseteq \mathrm{Cl}(V,g)$ normovaných na ± 1. Dál označujeme $\mathrm{Spin}(V,g) := \mathrm{Pin}(V,g) \cap \mathrm{Cl}^+(V,g)$.

*Potom $\mathrm{Pin}(V,g)$ a $\mathrm{Spin}(V,g)$ tvoří Lieovu grupu vzhledem k násobení indukovanému z $\mathrm{Cl}(V,g)$. $\mathrm{Pin}(V,g)$ se nazývá **pinová grupa** příslušná (V,g). $\mathrm{Spin}(V,g)$ se nazývá **spinová grupa** příslušná (V,g). Opět se používá standardní značení $\mathrm{Pin}(p,q) := \mathrm{Pin}(\mathbb{R}^{p+q}, \eta^{(p,q)})$ a podobně pro $\mathrm{Spin}(p,q)$.*

Důkaz. Ukažme si že $\mathrm{Pin}(V,g)$ tvoří grupu. Je-li $v_1\cdots v_k \in \mathrm{Pin}(V,g)$ a $w_1\cdots w_\ell \in \mathrm{Pin}(V,g)$, zjevně jejich součin je opět v $\mathrm{Pin}(V,g)$. $\mathrm{Pin}(V,g)$ obsahuje jednotku 1. Protože $V \neq 0$, existuje $v \in V$ takový, že $g(v,v) \in \{-1,1\}$. Potom $1 = v\cdot v\cdot v\cdot v \in \mathrm{Pin}(V,g)$. Inverze k $v_1\cdots v_k$ je $\pm v_k\cdots v_1$, kde znaménko závisí na konkrétní normalizaci vektorů.

Jak ukázat, že tvoří Lieovu grupu? Platí, že pro každou konečněrozměrnou asociativní algebru $(A, *_A, 1_A)$ s jednotkou je podmnožina $A^\times := \{a \in A \mid a *_A b = b *_A a = 1_A \text{ pro nějaké } b \in B\}$ vždy otevřenou podmnožinou A (se standardní topologií). Jelikož $A^\times$ je zjevně grupa, tvoří $A^\times$ Lieovu grupu, jejíž Lieova algebra je A vybavená komutátorem $[a,b]_A := a*_A b - b*_A a$. Klasickým příkladem je maticová algebra $A = \mathbb{R}^{n,n}$, kde $A^\times = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Dá se ukázat, že $\mathrm{Pin}(V,g)$ tvoří podgrupu a uzavřenou podmnožinu Lieovy grupy $\mathrm{Cl}^\times(V,g)$ a tedy Lieovu grupu. Důkaz pro $\mathrm{Spin}(V,g)$ je analogický. ∎

Poznámka 8.1.6. Protože $\mathrm{Pin}(V,g)$ a $\mathrm{Spin}(V,g)$ jsou zkonstruovány jako uzavřené podgrupy $\mathrm{Cl}^\times(V,g)$, jejich Lieovy algebry $\mathfrak{pin}(V,g)$ a $\mathfrak{spin}(V,g)$ musí jít ztotožnit s podalgebrami Lieovy algebry $\mathfrak{cl}^\times(V,g) \doteq \mathrm{Cl}(V,g)$. Dá se relativně snadno ukázat, že obě jsou stejné a platí

$$\mathfrak{pin}(V,g) = \mathfrak{spin}(V,g) = \mathrm{Cl}^2(V,g) = \mathbb{R}\{e_i\cdot e_j \mid i<j\}, \tag{8.21}$$

kde $(e_i)_{i=1}^n$ je libovolná ortonormální báze (V,g). Podprostoru $\mathrm{Cl}^2(V,g)$ se říká **bivektory** v $\mathrm{Cl}(V,g)$, protože $e_i\cdot e_j \to 2e_i \wedge e_j$ definuje *kanonický* izomorfismus $\mathrm{Cl}^2(V,g) \cong \Lambda^2 V$. Další ekvivalentní popis je $\mathrm{Cl}^2(V,g) = \{v\cdot w - w\cdot v \mid v,w \in V\}$.

Každý element $u \in \mathrm{Cl}(V,g)$ lze kanonicky rozložit jako $u = u_+ + u_-$, kde $u_\pm \in \mathrm{Cl}^\pm(V,g)$. Definujeme zobrazení $\hat\eta : \mathrm{Cl}(V,g) \to \mathrm{Cl}(V,g)$ vztahem $\hat\eta(u) := u_+ - u_-$, tj. $\mathrm{Cl}^\pm(V,g)$ jsou vlastní podprostory $\hat\eta$ s vlastním číslem ± 1.

Lemma 8.1.7. *$\hat\eta$ je automorfismus algebry* $\mathrm{Cl}(V,g)$.

Důkaz. Pro každé $u,v \in \mathrm{Cl}(V,g)$ máme

$$\begin{aligned}\hat\eta(u\cdot v) &= \hat\eta((u_+ + u_-)\cdot(v_+ + v_-)) = \hat\eta(u_+\cdot v_+ + u_-\cdot v_- + u_+\cdot v_- + u_-\cdot v_+)\\ &= u_+\cdot v_+ + u_-\cdot v_- - u_+\cdot v_- - u_-\cdot v_+\\ &= (u_+ - u_-)\cdot(v_+ - v_-)\\ &= \hat\eta(u)\cdot\hat\eta(v).\end{aligned} \tag{8.22}$$

Důkaz je hotov. ∎

Nyní si ukážeme, že grupy $\mathrm{Pin}(V,g)$ a $\mathrm{Spin}(V,g)$ mají kanonické reprezentace na prostoru V.

Tvrzení 8.1.8. *Nechť $u \in \mathrm{Pin}(V,g)$. Definujeme zobrazení $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{GL}(V)$ vztahem*

$$[\rho(u)](v) := \hat\eta(u)\cdot v\cdot u^{-1} \tag{8.23}$$

pro každé $v \in V$. Potom platí následující tvrzení:

(i) (V,ρ) je reprezentace grupy $\mathrm{Pin}(V,g)$.

(ii) Pro $u \in V \cap \mathrm{Pin}(V,g)$ je $\rho(u)$ zrcadlení okolo roviny kolmé na u, t.j.

$$[\rho(u)](v) = v - \frac{2g(u,v)}{g(u,u)}u \tag{8.24}$$

(iii) ρ *má hodnoty v podgrupě* $\mathrm{O}(V,g) \subseteq \mathrm{GL}(V,g)$.

(iv) ρ *můžeme interpretovat jako hladký epimorfismus* $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{O}(V,g)$. *Jeho jádro je* $\ker(\rho) = \{-1,1\} \cong \mathbb{Z}_2$.

(v) Označme ρ_+ *restrikci* ρ *na* $\mathrm{Spin}(V,g)$. *Potom* (V,ρ_+) *je reprezentace* $\mathrm{Spin}(V,g)$ *na* V *a* $\rho_+ : \mathrm{Spin}(V,g) \to \mathrm{SO}(V,g)$ *je hladký grupový epimorfismus se stejným jádrem.*

Důkaz. Dokažme nejprve bod *(ii)*, tedy $u \in V$. Zřejmě $u = u_-$ a tedy $\hat{\eta}(u) = -u$. Protože $u \cdot u = g(u,u)$, můžeme psát $u^{-1} = g(u,u)^{-1}u$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}[\rho(u)](v) &= -\frac{1}{g(u,u)} u \cdot v \cdot u = -\frac{1}{g(u,u)}(2g(u,v) - v \cdot u) \cdot u \\ &= v - \frac{2g(u,v)}{g(u,u)} u.\end{aligned} \tag{8.25}$$

Zrcadlení okolo roviny kolmé na u je ortogonální transformace, t.j. v tomto případě $\rho(u) \in \mathrm{O}(V,g)$. Musíme si rozmyslet, že $[\rho(u)](v) \in V \subseteq \mathrm{Cl}(V,g)$ pro obecné $u \in \mathrm{Pin}(V,g)$. Ale $u = w_1 \cdots w_k$ pro $w_i \in V$ splňující $g(w_i,w_i) \in \{-1,1\}$, a tedy

$$\begin{aligned}[\rho(u)](v) &= \hat{\eta}(w_1 \cdots w_k) \cdot v \cdot (w_1 \cdots w_k)^{-1} = \hat{\eta}(w_1) \cdots \hat{\eta}(w_k) \cdot v \cdot w_k^{-1} \cdots w_1^{-1} \\ &= [\rho(w_1) \circ \cdots \circ \rho(w_k)](v) \in V,\end{aligned} \tag{8.26}$$

protože $\rho(u)$ je působení k po sobě následujících zrcadlení vektoru v. Zejména $\rho(u) \in \mathrm{O}(V,g)$. Zároveň snadno vidíme, že $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{O}(V,g)$ je grupový homomorfismu a (V,ρ) je reprezentace $\mathrm{Pin}(V,g)$ na V. Máme tedy dokázaná tvrzení *(i)* a *(iii)*.

Hladkost ρ plyne z faktu, že je lze považovat za restrikci hladkého zobrazení $\rho : \mathrm{Cl}^\times(V,g) \to \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Cl}(V,g))$ definovaného stejnou formulkou. Fakt, že ρ je surjektivní plyne z Cartanovy–Dieudonného věty, která říká: *Každý element* $A \in \mathrm{O}(V,g)$ *lze psát jako složení nejvýše* $\dim(V)$ *zrcadlení.* Zbývá nalézt jádro ρ.

Nechť tedy $\hat{\eta}(u) \cdot v \cdot u^{-1} = v$ pro všechny $v \in V$. Píšeme $u = u_+ + u_-$. Potom dostáváme rovnici $(u_+ - u_-) \cdot v = v \cdot (u_+ + u_-)$. Protože $v \in V \subseteq \mathrm{Cl}^-(V,g)$, máme dvě nezávislé rovnice

$$u_+ \cdot v = v \cdot u_+, \quad u_- \cdot v = -v \cdot u_- \tag{8.27}$$

pro každé $v \in V$. Nechť $(e_i)_{i=1}^n$ je libovolná ortonormální báze V. Pišme $u_+ = a_+ + b_- \cdot e_1$, kde $a_+ \in \mathrm{Cl}^+(V,g)$ a $b_- \in \mathrm{Cl}^-(V,g)$ již neobsahují e_1. Protože u_+ musí komutovat s libovolným $v \in V$, musí komutovat i s e_1, a tedy

$$(a_+ + b_- \cdot e_1) \cdot e_1 = e_1 \cdot (a_+ + b_- \cdot e_1). \tag{8.28}$$

Protože a_+ a b_- neobsahují e_1, máme $a_+ \cdot e_1 = e_1 \cdot e_+$ a $b_- \cdot e_1 = -e_1 \cdot b_-$. Odtud po dosazení

$$a_+ \cdot e_1 + g(e_1,e_1) b_- = a_+ e_1 - g(e_1,e_1) b_-, \tag{8.29}$$

tedy $b_- = 0$ a $u_+ = a_+$ neobsahuje e_1. Zopakováním tohoto argumentu nemůže u_+ obsahovovat žádný generátor e_i a tedy $u_+ = \lambda$. S použitím druhé z rovnic bychom analogicky ukázali, že $u_- = 0$ a tedy $u = \lambda$. Dá se ukázat, že $\lambda \in \mathrm{Pin}(V,g)$, právě tehdy když $\lambda \in \{-1,1\}$.

Tvrzení o $\mathrm{Spin}(V,g)$ plyne z toho, že složení sudého počtu zrcadlení má determinant $+1$, a tedy je elementem $\mathrm{SO}(V,g)$. ∎

Tvrzení 8.1.9. *Dá se ukázat, že* $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{O}(V,g)$ *a* $\rho_+ : \mathrm{Spin}(V,g) \to \mathrm{SO}(V,g)$ *jsou tzv. dvoulistá nakrytí.*

Jinými slovy, ρ *je surjektivní lokální difeomorfismus a každý bod* $A \in \mathrm{O}(V,g)$ *má okolí* U *takové, že* $\rho^{-1}(U)$ *je disjunktním sjednocením dvou souvislých množin difeomorfních* U*.*

Nakrývací homomorfismus $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{O}(V,g)$ vždy indukuje izomorfismus algeber $\rho' : \mathfrak{pin}(V,g) \to \mathfrak{o}(V,g)$. Pro každé $u \in \mathfrak{pin}(V,g) = \mathrm{Cl}^2(V,g)$ jej získáme formulí

$$\rho'(u) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp(tu)). \tag{8.30}$$

Zde máme usnadněnou situaci, protože $\exp(tu)$ je „opravdická“ exponenciála v asociativní algebře $\mathrm{Cl}(V,g)$, tedy absolutně konvergentní suma

$$\exp(tu) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \underbrace{u \cdots u}_{p \text{ krát}} \tag{8.31}$$

Mám tedy spočítat výraz

$$\begin{aligned} [\rho'(u)](v) = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \hat{\eta}(\exp(tu)) \cdot v \cdot \exp(tu)^{-1} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tu) \cdot v \cdot \exp(-tu) \\ & = u \cdot v - v \cdot u =: [u,v]. \end{aligned} \tag{8.32}$$

Volme nyní za u generátory Lieovy algebry $\mathfrak{pin}(V,g)$, tedy $u = e_i \cdot e_j$, kde $i < j$ a $(e_i)_{i=1}^n$ je ortonormální báze V. Dostáváme

$$\begin{aligned} [\rho'(e_i \cdot e_j)](v) &= e_i \cdot e_j \cdot v - v \cdot e_i \cdot e_j \\ &= e_i \cdot (2g(e_j,v) - v \cdot e_j) - v \cdot e_i \cdot e_j \\ &= 2g(e_j,v)e_i - 2g(e_i,v)e_j + v \cdot e_i \cdot e_j - v \cdot e_i \cdot e_j \\ &= 2g(e_j,v)e_i - 2g(e_i,v)e_j. \end{aligned} \tag{8.33}$$

Zaveďme si označení $\mathcal{E}_{ij}$ pro lineární operátor $\mathcal{E}_{ij} \in \mathfrak{o}(V,g)$ daný pro $i,j \in \{1,\dots,n\}$ vzorcem

$$\mathcal{E}_{ij}(v) := g(e_j,v)e_i - g(e_i,v)e_j. \tag{8.34}$$

To je ovšem obvyklá báze algebry $\mathfrak{o}(V,g)$. Její matice vzhledem ke stejné bázi $(e_i)_{i=1}^n$ má tvar

$$(\mathcal{E}_{ij})_\ell^k = g(e_j,e_\ell)\delta_i^k - g(e_i,e_\ell)\delta_j^k. \tag{8.35}$$

Dokázali jsme následující lemma:

Lemma 8.1.10. *Indukovaný izomorfismus* $\rho' : \mathfrak{pin}(V,g) \to \mathfrak{o}(V,g)$ *má tvar*

$$\rho'(e_i \cdot e_j) = 2\mathcal{E}_{ij}, \tag{8.36}$$

pro všechny $1 \le i < j \le n$, $(e_i)_{i=1}^n$ *je ortonormální báze* (V,g) *a* $\mathcal{E}_{ij} \in \mathfrak{o}(V,g)$ *jsou definované vztahem (8.34). Zavádíme proto novou bázi* $(m_{ij})_{i<j}$ *algebry* $\mathfrak{pin}(V,g)$*, kde* $m_{ij} := \frac{1}{2} e_i \cdot e_j \equiv \frac{1}{4}[e_i,e_j]$*. Potom* $\rho'(m_{ij}) = \mathcal{E}_{ij}$*.*

Poznámka 8.1.11. Výraz $m_{ij} = \frac{1}{4}[e_i,e_j]$ má dobrý smysl pro libovolné hodnoty $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Všimněte si, že $m_{ij} = -m_{ji}$ a zejména $m_{ii} = 0$.

8.2 Prolongace hlavních fibrovaných prostorů

Definice 8.2.1. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou G. Nechť $\rho : H \to G$ je hladký homomorfismus Lieových grup.

Hlavní fibrovaný prostor $\varpi : Q \to M$ se strukturní grupoou H spolu s hladkým zobrazením $\varphi : Q \to P$ nazveme **prolongací** P **nad** ρ, pokud

(i) $\varphi : Q \to P$ je hladké zobrazení takové, že $\pi \circ \varphi = \varpi$;

(ii) φ je ekvivariantní, t.j. pro každé $q \in Q$ a $h \in H$ platí

$$\varphi(q \cdot h) = \varphi(q) \cdot \rho(h). \tag{8.37}$$

Zobrazení φ má obvykle velmi podobné geometrické vlastnosti jako homomorfismus ρ. Pro nás je důležité zejména následující pozorování:

Tvrzení 8.2.2. *Je-li $\rho : H \to G$ nakrytí, je i $\varphi : Q \to P$ nakrytí.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že φ je surjektivní. Nechť $p \in P$. Označme $m := \pi(p)$. Pro libovolné $q \in Q_m$ leží $\varphi(q)$ ve stejném vlákně jako p. Odtud $\varphi(q) \cdot g = p$ pro jednoznačné $g \in G$. Jelikož je ρ surjektivní, můžeme psát $g = \rho(h)$ a tedy

$$p = \varphi(q) \cdot g = \varphi(q) \cdot \rho(h) = \varphi(q \cdot h). \tag{8.38}$$

Odtud vidíme, že je surjektivní. Nechť $\phi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ a $\psi : U \times H \to \varphi^{-1}(U)$ jsou ekvivariantní trivializační zobrazení pro P, resp. pro Q. Definujme hladké zobrazení $\hat{\varphi} : U \to G$ vztahem $\phi(m, \hat{\varphi}(m)) = \varphi(\psi(m, e))$. Potom pro každé $(m, h) \in M \times H$ dostáváme

$$\varphi(\psi(m,h)) = \varphi(\psi(m,e) \cdot h) = \varphi(\psi(m,e)) \cdot \rho(h) = \phi(m, \hat{\varphi}(m)) \cdot \rho(h) = \phi(m, \hat{\varphi}(m) \cdot \rho(h)). \tag{8.39}$$

Definuju si nyní nové zobrazení $\phi' : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ předpisem $\phi'(m, g) = \phi(m, \hat{\varphi}(m) \cdot g)$. Lze snadno uvidět, že tento předpis definuje nové **trivializační zobrazení pro** P **adaptované na** ρ, protože zobrazení φ získá pro každé $(m, h) \in U \times H$ tvar.

$$\varphi(\psi(m, h)) = \phi'(m, \rho(h)). \tag{8.40}$$

Vidím, že $\phi'^{-1} \circ \varphi|_{\varpi^{-1}(U)} \circ \psi = 1 \times \rho$, což je zřejmě lokální difeomorfismus. Proto nutně i φ je lokální difeomorfismus.

Abychom dokázali, že jde o nakrytí, stačí pro každý bod $p_0 \in P$ nalézt stejnoměrně nakryté okolí $\mathcal{U} \subseteq P$. Nechť $m_0 := \pi(p)$. Nechť U je souvislé okolí bodu m_0 spolu s lokálními trivializacemi $\phi' : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ a $\psi : U \times H \to \varpi^{-1}(U)$ splňující (8.40). Máme $p_0 = \phi'(m_0, g_0)$ pro nějaké $g_0 \in G$. Protože ρ je nakrytí, existuje stejnoměrně nakryté okolí $V \subseteq G$ bodu g_0. Snadno se rozmyslí, že $\mathcal{U} := \phi(U \times V)$ je stejnoměrně nakryté okolí bodu p_0. ∎

Nadále předpokládejme, že $\rho : H \to G$ je nakrytí. Potom ρ indukuje izomorfismus Lieových algeber $\rho' : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$. Ukazuje se, že vertikální podprostory a konexe $\pi : P \to M$ a jeho prolongace $\varphi : Q \to M$ jsou pevně svázány.

Tvrzení 8.2.3. *Nechť $\varphi : Q \to M$ a φ jsou prolongací $\pi : P \to M$ nad nakrytím ρ. Potom následující fakta jsou pravdivá:*

(i) Nechť $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ a $\#' : \mathfrak{h} \to \mathfrak{X}(P)$ označuje infinitesimální generátory. Potom $\#'x$ a $\#\rho'(x)$ jsou φ-vztažená pro každé $x \in \mathfrak{h}$. Jinými slovy, pro každé $q \in Q$ máme

$$\varphi_*(\#'_q(x)) = \#_{\varphi(x)}(\rho'(x)). \tag{8.41}$$

Zejména platí $\varphi_*(\mathrm{Ver}_q(Q)) = \mathrm{Ver}_{\varphi(q)}(Q)$.

(ii) Pro každou konexi $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ zadává $A' := \rho'^{-1}(\varphi^*(A))$ konexi na Q. Naopak, pro každou konexi $A' \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$ existuje právě jedna konexe A splňující tento vztah.

(iii) Ekvivalentně máme $\varphi_*(\mathrm{Hor}'_q(Q)) = \mathrm{Hor}_{\varphi(q)}(P)$ pro každé $q \in Q$.

Důkaz. Nechť $q \in Q$ a $x \in \mathfrak{h}$ jsou libovolné. Potom

$$\varphi_*(\#'_q(x)) = \varphi_*(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} q \cdot \exp(tx)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(q \cdot \exp(tx)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(q) \cdot \rho(\exp(tx)). \tag{8.42}$$

Ale $\rho(\exp(tx)) = \exp(t\rho'(x))$ a tedy na pravé straně dostáváme $\#_{\varphi(x)}(\rho'(x))$. To dokazuje tvrzení (i). Vztah vertikálních podprostorů je zřejmý.

Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe na P. Zjevně $A' \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$. Musíme ověřit axiomy formy konexe. Pro každé $q \in Q$ a $x \in \mathfrak{h}$ máme

$$A'|_q(\#'_q(x)) = \rho'^{-1}(A|_{\varphi(q)}(\varphi_*(\#'_q(x)))) = \rho'^{-1}(A|_{\varphi(q)}(\#_{\varphi(q)}(\rho'(x)))) = x. \tag{8.43}$$

Na ověření ekvivariance je potřeba si rozmyslet, že pro každé $x \in \mathfrak{h}$ a $h \in H$ platí formulka

$$\rho'(Ad_h(x)) = Ad_{\rho(h)}\rho'(x). \tag{8.44}$$

To snadno získáme z příslušných definic, protože

$$\begin{aligned} \rho'(Ad_h(x)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(tAd_h(x))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(h\exp(tx)h^{-1}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(h)\rho(\exp(tx))\rho(h)^{-1} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(h)\exp\left(t\rho'(x)\right)\rho(h)^{-1} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tAd_{\rho(h)}(\rho'(x))) = Ad_{\rho(h)}(\rho'(x)). \end{aligned} \tag{8.45}$$

Potom pro každý vektor $X \in T_qQ$ platí

$$(R_h^*(A'|_{q\cdot h}))(X) = A'|_{q\cdot h}(R_{h*}(X)) = \rho'^{-1}(A|_{\varphi(q\cdot h)}(\varphi_*(R_{h*}(X)))) \tag{8.46}$$

Ale $\varphi \circ R_h = R_{\rho(h)} \circ \varphi$. Můžu tedy použít ekvivarianci formy A a dostávám

$$\begin{aligned} (R_h^*(A'|_{q\cdot h}))(X) &= \rho'^{-1}\{Ad_{\rho(h)^{-1}}(A|_{\varphi(q)}(\varphi_*(X)))\} \\ &= Ad_{h^{-1}}(\rho'^{-1}(A|_{\varphi(q)}(\varphi_*(X)))) \\ &= Ad_{h^{-1}}A'_q(X), \end{aligned} \tag{8.47}$$

kde jsme použili výše odvozený vztah (8.44). Vidíme, že $A' \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$ je opravdu forma konexe.

Naopak, je-li $A' \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$ forma konexe, definujeme pro každé $p \in P$ a $X \in T_pP$ formu $A|_p$ následovně. Protože φ je surjektivní, existuje $q \in Q$, že $p = \varphi(q)$. Potom

$$A|_p(X) := \rho'(A'|_q(\hat{X}_q)), \tag{8.48}$$

kde $\hat{X}_q \in T_qQ$ je jednoznačný vektor takový, že $X = \varphi_*(\hat{X}_q)$. Musíme ověřit nezávislost pravé strany na výběru q. Je-li $\varphi(q') = p$ pro jiné q', máme $q' = q \cdot h$ pro nějaké $h \in \ker(\rho)$. Z jednoznačnosti plyne, že $\hat{X}_{q'} = R_{h*}(\hat{X}_q)$. Potom tedy

$$\begin{aligned}\rho'(A'|_{q'}(\hat{X}_{q'})) &= \rho'((R_h^*(A'|_q))(\hat{X}_q)) = \rho'(Ad_{h^{-1}}A'|_q(\hat{X}_q)) \\ &= Ad_{\rho(h)^{-1}}\rho'(A'|_q(\hat{X}_q)) = \rho'(A'|_q(\hat{X}_q)).\end{aligned} \tag{8.49}$$

Zbývá ukázat, že $A|_p$ definuje hladkou formu, ale to snadno plyne z toho, že φ je nakrytí (lokální difeomorfismus). To dokazuje tvrzení (ii). V důkazu tvrzení (iii) stačí ověřit, že $\varphi_*(\mathrm{Hor}'_q(Q))$ je v jádru $A|_{\varphi(q)}$ pro všechna $q \in Q$, ale to je zřejmé. ■

Lokální řezy hlavní fibrace P a fibrovaného prostoru Q jsou opět v blízkém vztahu. K tomuto potřebujeme jedno obecné tvrzení:

Tvrzení 8.2.4. *Nechť $\varphi : Q \to P$ je nakrytí. Nechť M je souvislá a jednoduše souvislá varieta. Nechť $\sigma : M \to P$ je hladké zobrazení. Nechť $m_0 \in N$ je libovolný bod a zvolme $q_0 \in Q$ takové, že $\varphi(q_0) = \sigma(m_0)$.*

Potom existuje právě jedno hladké zobrazení $\hat{\sigma} : M \to Q$ takové, že $\varphi \circ \hat{\sigma} = \sigma$ a $\hat{\sigma}(n_0) = q_0$.

To se nám bude hodit pro následující pozorování:

Tvrzení 8.2.5. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor a $\varpi : Q \to M$, $\varphi : Q \to P$ jeho prolongace nad nakrytím $\rho : H \to G$.*

Nechť $\sigma \in \Gamma_U(P)$ je lokální řez, kde U je souvislá a jednoduše souvislá otevřená množina. Nechť $m_0 \in U$ a $q_0 \in \varphi^{-1}(\sigma(m_0))$. Potom existuje jednoznačný řez $\hat{\sigma} \in \Gamma_U(Q)$ takový, že $\varphi \circ \hat{\sigma} = \sigma$. Množina $\varphi^{-1}(\sigma(m_0))$ a tedy i množina možných zdvihů $\hat{\sigma}$ je nanejvýš spočetná a izomorfní normální podgrupě $K := \ker(\rho) \subseteq H$.

Důkaz. První část plyne z předchozího tvrzení, pokud ověříme, že $\hat{\sigma}$ je řez. Ale z definice prolongace plyne, že $\varpi \circ \hat{\sigma} = (\pi \circ \varphi) \circ \hat{\sigma} = \pi \circ \sigma = 1_U$.

Druhá část tvrzení plyne z následujícího. Nechť V je stejnoměrně nakryté okolí bodu $\sigma(m_0)$. Potom každý z bodů $\varphi^{-1}(\sigma(m_0))$ musí ležet v jiné komponentě souvislosti variety $\varphi^{-1}(U)$, kterých může být nanejvýš spočetně mnoho.

Konečně, nechť $q_0' \in \varphi^{-1}(\sigma(m_0))$ je jiný bod. Protože $\varpi(q_0') = \varpi(q_0)$, existuje $h \in H$ takové, že $q_0' = q_0 \cdot h$. Potom ale $\varphi(q_0') = \varphi(q_0 \cdot h) = \varphi(q_0) \cdot \rho(h)$, z čehož plyne $\rho(h) = e$ a tedy $h \in K$. Nechť $\hat{\sigma}'(m) := \hat{\sigma}(m) \cdot h$ pro každé $m \in U$. Zjevně $\varphi \circ \hat{\sigma}' = \sigma$ a $\hat{\sigma}'(m_0) = q_0 \cdot k = q_0'$, a tedy $\hat{\sigma}'$ je příslušný zdvih. ■

8.3 Spinový bandl

Nechť (M, g, o) je varieta s metrikou a orientací. Předpokládejme, že g má signaturu (p, q) Nyní ukážeme, že za pomocí přidaných struktur můžeme sestrojit kanonický hlavní fibrovaný prostor $O^+(M)$, jehož strukturní grupou je $\mathrm{SO}(p, q)$. Sestrojí se podobně jako $F(M)$, ale tentokrát

$$O^+(M) := \sqcup_{m \in M} \mathcal{E}_g^+(T_mM), \tag{8.50}$$

kde $\mathcal{E}_g^+(T_mM)$ je množina *pravotočivých ortonormálních* bází T_mM.

Lemma 8.3.1. *Nechť $e \in \mathcal{E}_g^+(T_mM)$. Nechť $e' \in \mathcal{E}(T_mM)$ je libovolná jiná báze. Zejména tedy $e' = e \cdot \mathbf{A}$ pro unikátní $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.*

Potom $e' \in \mathcal{E}_g^+(T_mM)$ právě tehdy když $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(p,q)$.

Důkaz. Nechť $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}_g^+(T_mM)$. Máme tedy $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}^{(p,q)}$. Nechť $e'_i = \mathbf{A}_j^i e_j$. Potom podmínka ortonormality báze $(e'_1, \dots, e'_n)$ dává rovnici

$$\eta_{ij}^{(p,q)} = g(e'_i, e'_j) = g(\mathbf{A}_i^k e_k, \mathbf{A}_j^\ell e_\ell) = \mathbf{A}_i^k \mathbf{A}_j^\ell \eta_{k\ell}^{(p,q)} \tag{8.51}$$

Maticově tedy $\eta^{(p,q)} = \mathbf{A}^T \eta^{(p,q)} \mathbf{A}$, což je přesně podmínka $\mathbf{A} \in \mathrm{O}(p,q)$. Má-li být e' pravotočivá, musí být (z definice pravotočivosti) $\det(\mathbf{A}) > 0$ a tedy $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(p,q)$. ∎

Tvrzení 8.3.2. *Nechť (M, g, o) je varieta s metrikou a orientací, kde g má signaturu (p,q). Potom $\pi : O^+(M) \to M$ tvoří hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou $\mathrm{SO}(p,q)$ a akci a trivializací definovanou stejně jako pro $F(M)$.*

*$O_+(M)$ se nazývá **fibrace ortonormálních pravotočivých repérů**. Lokální řezy $O_+(M)$ odpovídají polím ortonormálních pravotočivých repérů.*

Důkaz. Důkaz kopíruje všechna tvrzení pro $F(M)$. ∎

Konexe na $F(M)$ odpovídaly afinním konexím na M. Není překvapivé, že $O^+(M)$ odpovídá jisté jejich podtřídě. Jelikož jsme kromě orientace přidali metriku g, výsledek není překvapivý.

Tvrzení 8.3.3. *Konexe na $O^+(M)$ odpovídají **metrickým afinním konexím** vzhledem k metrice g, t.j. kovariantní derivace splňuje pro všechny $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ rovnici*

$$X.g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{8.52}$$

Důkaz. Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální pravotočivé pole repérů na $U \subseteq M$. Pro $X = e_a$, $Y = e_b$ a $Z = e_c$ má podmínka (8.52) tvar

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_{e_a} e_b, e_c) + g(e_b, \nabla_{e_a} e_c) = g(\Gamma_{ba}^k e_k, e_c) + g(e_b, \Gamma_{ca}^k e_k) \\ &= \Gamma_{ba}^k \eta_{kc} + \Gamma_{ca}^k \eta_{bk}, \end{aligned} \tag{8.53}$$

kde píšeme $\eta_{ab} = g(e_a, e_b)$. To ukazuje, že výraz $\Gamma_{cba} := \Gamma_{ba}^k \eta_{kc}^{(p,q)}$ je antisymetrický v indexech c a b. Příslušné lokální formy konexe můžeme nyní přepsat jako

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_b^a E_a^b = (\Gamma_{bc}^a e^c) E_a^b = (\Gamma_{abc} e^c) \eta^{ak} E_k^b = \frac{1}{2} (\Gamma_{abc} e^c) \{\eta^{ak} E_k^b - \eta^{bk} E_k^a\}, \tag{8.54}$$

kde jsme použili předpokládanou antisymetrii Γ_{abc} v prvních dvou indexech. Označme matici napravo jako $\mathcal{E}^{ab}$. Vidíme, že $\mathcal{E}^{ab} = -\mathcal{E}^{ba}$. Tvrdíme, že $(\mathcal{E}^{ab})_{a<b}$ tvoří bázi $\mathfrak{o}(p,q)$ a její vztah s maticemi $\mathcal{E}_{ij}$ v první sekci této kapitoly je jednoduše $\mathcal{E}_{cd} = \eta_{ca}\eta_{db}\mathcal{E}^{ab}$. Máme

$$(\mathcal{E}^{ab})_j^i = \eta^{ak}(E_k^b)_j^i - \eta^{bk}(E_k^a)_j^i = \eta^{ak}\delta_j^b\delta_k^i - \eta^{bk}\delta_j^a\delta_k^i = \eta^{ai}\delta_j^b - \eta^{bi}\delta_j^a \tag{8.55}$$

Odtud tedy dostáváme výraz

$$(\mathcal{E}_{cd})_j^i = \eta_{ca}\eta_{db}(\eta^{ai}\delta_j^b - \eta^{bi}\delta_j^a) = \eta_{dj}\delta_c^i - \eta_{cj}\delta_d^i. \tag{8.56}$$

Ale to je přesně výraz (8.35). Je zřejmé, že matice $(\mathcal{E}^{ab})_{a<b}$ tvoří bázi $\mathfrak{o}(p,q)$ a právě jsme dokázali, že lokální formy konexe můžeme psát jako

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2}\hat{\omega}_{ab}\mathcal{E}^{ab} = \sum_{a<b}\hat{\omega}_{ab}\mathcal{E}^{ab}, \;\; \hat{\omega}_{ab} = \Gamma_{abc}e^c. \tag{8.57}$$

Vidíme, že $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{o}(p,q))$. Postupem analogickým ke konstrukci na $F(M)$ se nyní ukáže, že lze z takových forem vyrobit globální formu konexe $\omega \in \Omega^1(O^+(M), \mathfrak{o}(p,q))$ a každá taková zadává metrickou afinní konexi na M vzhledem k metrice g. ■

Nyní připomeňme, že máme dvoulisté nakrytí $\rho_+ : \mathrm{Spin}(p,q) \to \mathrm{SO}(p,q)$. Zároveň jsme pro danou varietu (M,g,o) zkonstruovali hlavní fibrovaný prostor $\pi : O^+(M) \to M$ se strukturní grupou $\mathrm{SO}(p,q)$. Můžeme se tedy ptát, jestli existuje prolongace $O^+(M)$ nad morfismem ρ_+.

Definice 8.3.4. Prolongace $\varpi : S(M) \to M$, $\varphi : S(M) \to O^+(M)$ nad nakrytím $\rho_+ : \mathrm{Spin}(p,q) \to \mathrm{SO}(p,q)$ se nazývá **spinový bandl nad** M, nebo též **spinová struktura na** M. Variety, které připouští existenci spinové struktury se nazývají **spinové variety**.

Poznámka 8.3.5. Ne každá orientovaná varieta s metrikou je spinová. Na jedné varietě může existovat několik neekvivalentních prolongací $\mathcal{O}^+(M)$ a tedy i spinových struktur. V následujícím tedy budeme předpokládat, že máme spinovou varietu (M,g,o) a zafixovali jsme spinový bandl $\varpi : S(M) \to M$ (spolu se zobrazením $\varphi : S(M) \to O^+(M)$.

Tvrzení 8.3.6. *Nechť $\sigma : U \to O^+(M)$ je lokální řez (a tedy pole ortonormálních pravotočivých repérů na U), kde U je souvislá a jednoduše souvislá otevřená množina.*

Potom existuje hladký řez $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ takový, že $\varphi \circ \hat{\sigma} = \sigma$. Jediný další takový řez je $\hat{\sigma}' := \hat{\sigma} \cdot (-1)$. Každému poli ortonormálních pravotočivých repérů na souvislém a jednoduše souvislém U odpovídají právě dva zdvihy na řez spinového bandlu.

Tvrzení 8.3.7. *Konexe na spinovém bandlu $S(M)$ odpovídají jednoznačně metrickým konexím na M vzhledem k metrice g. Nechť $\omega \in \Omega^1(O^+(M), \mathfrak{o}(p,q))$ a $\omega' \in \Omega^1(S(M), \mathfrak{pin}(p,q))$ jsou ve vztahu jako v Tvrzení 8.2.3. Nechť $\sigma \in \Gamma_U(O^+(M))$ je lokální řez odpovídající poli pravotočivých ortonormálních repérů a nechť $\hat{\sigma} \in \Gamma_U(S(M))$ je jeho zdvih, tj. $\varphi \circ \hat{\sigma} = \sigma$.*

Nechť $\hat{\omega} = \sigma^*(\omega)$ a $\hat{\omega}' = \hat{\sigma}'^*(\omega')$ jsou přislušné lokální formy konexe. Potom $\hat{\omega} = \rho'(\hat{\omega}')$.

Označme $(m^{ab})_{a<b}$ bázi $\mathfrak{pin}(p,q)$ definovanou jako $m^{ab} := \eta^{ai}\eta^{bj}m_{ij}$, kde $(m_{ij})_{i<j}$ je báze $\mathfrak{pin}(p,q)$ z Lemma 8.1.10. Můžeme psát $\hat{\omega} = \sum_{a<b}\hat{\omega}_{ab}\mathcal{E}^{ab}$ a $\hat{\omega}' = \sum_{a<b}\hat{\omega}'_{ab}m^{ab}$. Potom

$$\hat{\omega}'_{ab} = \hat{\omega}_{ab}. \tag{8.58}$$

*Konexi ω' se říká **spinová konexe**, a je jednoznačně určená metrickou afinní konexí, kterou unikátně kóduje konexe ω.*

Důkaz. Vztah mezi ω a ω' lze psát jako $\rho'(\omega') = \varphi^*(\omega)$. Působením $\hat{\sigma}^*$ dostaneme rovnici

$$\rho'(\hat{\omega}') = (\hat{\sigma}^* \circ \varphi^*)(\omega) = (\varphi \circ \hat{\sigma})^*(\omega) = \sigma^*(\omega) = \hat{\omega}. \tag{8.59}$$

Rovnost komponentních forem plyne triviálně z Lemma 8.1.10, protože

$$\rho'(\hat{\omega}') = \rho'(\frac{1}{2}\hat{\omega}'_{ab}m^{ab}) = \frac{1}{2}\hat{\omega}'_{ab}\rho'(m^{ab}) = \frac{1}{2}\hat{\omega}'_{ab}\mathcal{E}^{ab}, \tag{8.60}$$

ale pravá strana je dle již dokázaného rovna $\hat{\omega} = \frac{1}{2}\hat{\omega}_{ab}\mathcal{E}^{ab}$. To implikuje (8.58). ■

Na spínovém bandlu se spinovou konexí můžeme uvažovat následující konstrukci. Nechť $s \in S(M)$ je libovolný bod. Potom $\varphi(s) \in O^+(M)$ je z definice pravotočivá ortonormální báze $T_m M$, kde $m = \varpi(s) = \pi(\varphi(s))$, označme ji jako $\varphi(s) =: (e_1(s), \dots, e_n(s))$. Každý z těchto tečných vektorů můžeme horizontálně zdvihnout zpět do bodu s, tj. sestrojit

$$\mathcal{E}_a(s) := (e_a(s))^h_s \in \mathrm{Hor}_s(S(M)) \subseteq T_s S(M), \tag{8.61}$$

pro každé $a \in \{1, \dots, n\}$. Ukazuje se, že tímto způsobem definujeme hladká vektorová pole.

Tvrzení 8.3.8. *Předpis $\mathcal{E}_a|_s := \mathcal{E}_a(s)$ definuje globální hladké horizontální vektorové pole $\mathcal{E}_a \in \mathfrak{X}(S(M))$ pro každé $a \in \{1, \dots, n\}$. $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ jsou globální generátory horizontální distribuce $\mathrm{Hor}(S(M))$. Nechť $u \in \mathrm{Spin}(p,q)$ a nechť $\mathbf{A} := \rho(u) \in \mathrm{O}(p,q)$. Potom*

$$R_{u*}(\mathcal{E}_a) = (\mathbf{A}^{-1})^b_a \mathcal{E}_b. \tag{8.62}$$

Důkaz. Na souvislém a jednoduše souvislém okolí U zvolme řez $\sigma : U \to O^+(M)$, neboli pravotočivé ortonormální pole repérů $(f_1, \dots, f_n)$ na U. Nechť $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ je nějaký jeho zdvih. Potom obvyklým způsobem dostáváme hladkou funkci $u : \varpi^{-1}(U) \to \mathrm{Spin}(p,q)$ splňující

$$s = \hat{\sigma}(\varpi(s)) \cdot u(s). \tag{8.63}$$

Označme $\mathbf{A} := \rho \circ u : \varpi^{-1}(U) \to \mathrm{SO}(p,q)$. Zapůsobením φ na obě strany tedy dostáváme

$$\varphi(s) = \sigma(\varpi(s)) \cdot \mathbf{A}(s). \tag{8.64}$$

Odtud dostáváme vztah $e_a(s) = \mathbf{A}(s)^b_a \; f_b|_{\varpi(s)}$. Horizontální zdvih je lineární zobrazení a proto

$$\mathcal{E}_a|_s = \mathbf{A}(s)^b_a \; f^h_b|_s, \tag{8.65}$$

kde f^h_b jsou horizontální zdvihy vektorových polí $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{X}_U(M)$. To ale dokazuje, že $\mathcal{E}_a$ jsou hladká vektorová pole. Zřejmě tvoří globální generátory horizontální distribuce, protože na $\varpi^{-1}(U)$ je lze pomocí hladkých funkcí nakombinovat z generátorů $(f^h_1, \dots, f^h_n)$.

Nechť $u \in \mathrm{Spin}(p,q)$ a $\mathbf{A} := \rho(u)$. Jelikož $\mathcal{E}_a|_s = (e_a(s))^h_s$, je nutně $R_{u*}(\mathcal{E}_a|_s)$ horizontálním zdvihem téhož vektoru do bodu $s \cdot u$, tj. $R_{u*}(\mathcal{E}_a|_s) = (e_a(s))^h_{s\cdot u}$. Navíc můžeme psát

$$\begin{aligned} e_a(s) \equiv \varphi(s)_a &= \varphi(s \cdot u \cdot u^{-1})_a = (\varphi(s \cdot u) \cdot \rho(u)^{-1})_a \\ &= (\mathbf{A}^{-1})^b_a \varphi(s \cdot u)_b = (\mathbf{A}^{-1})^b_a e_b(s \cdot u). \end{aligned} \tag{8.66}$$

Odtud pak okamžitě dostáváme kýženou rovnici, protože

$$R_{u*}(\mathcal{E}_a|_s) = (e_a(s))^h_{s\cdot u} = (\mathbf{A}^{-1})^b_a (e_b(s \cdot u))^h_{s\cdot u} = (\mathbf{A}^{-1})^b_a \mathcal{E}_b|_{s\cdot u}. \tag{8.67}$$

Důkaz je nyní hotov! ∎

8.4 Spinorové reprezentace, spinorová pole

Uvažujme nyní reprezentaci (W, ζ) asociativní algebry $\mathrm{Cl}(V,g)$. Jinými slovy, máme lineární zobrzení $\zeta : \mathrm{Cl}(V,g) \to \mathrm{End}(W)$ splňující

$$\zeta(u \cdot u') = \zeta(u) \circ \zeta(u'), \;\; \zeta(1) = 1_V. \tag{8.68}$$

Nechť $(e_i)_{i=1}^n$ je ortonormální báze (V,g). Pro každé $a \in \{1, \dots, n\}$ zavedeme označení $e^a := \eta^{ab} e_b$. Pro zmatení nepřítele $(e^1, \dots, e^n)$ je nová báze V, nikoliv duální báze V^*. Není příliš třeba je explicitně rozlišovat, protože jsou spolu jednoznačně izomorfismem $V \cong V^*$ indukovaným metrikou g.

Tvrzení 8.4.1. *Nechť (W,ζ) je reprezentace $\mathrm{Cl}(V,g)$. Nechť $(e_i)_{i=1}^n$ je ortonormální báze (V,g). Potom reprezentace je jednoznačně určena obrazy $\gamma^a := \zeta(e^a) \in \mathrm{End}(W)$, které splňují*

$$\gamma^a \circ \gamma^b + \gamma^b \circ \gamma^a = 2\eta^{ab}\, 1_W. \tag{8.69}$$

Pro každé $u \in \mathrm{Spin}(V,g)$ pak platí identita

$$\zeta(u) \circ \gamma^a \circ \zeta(u)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^a_b \gamma^b, \tag{8.70}$$

*kde $\mathbf{A}$ je matice operátoru $\rho(u)$ vzhledem k bázi $(e_i)_{i=1}^n$. Reprezentace (W,ζ) indukuje reprezentaci grupy $\mathrm{Spin}(V,g)$ na prostoru W, kterou nazýváme **spinorová reprezentace**.*

Důkaz. S využitím standardní relace pro vektory v Cliffordově algebře dostáváme pro bázi $(e^a)_{a=1}^n$ prostoru V vztah

$$e^a \cdot e^b + e^b \cdot e^a = \eta^{ai}\eta^{bj}(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i) = \eta^{ai}\eta^{bj} 2\eta_{ij} = \eta^{ab}. \tag{8.71}$$

Na tuto relaci můžeme vypustit ζ a dostaneme (8.69). Zbývá ukázat relaci (8.70). Z definice nakrývacího homomorfismusu $\rho : \mathrm{Spin}(V,g) \to \mathrm{SO}(V,g)$ máme pro každé $u \in \mathrm{Spin}(V,g)$ a každé $v \in V$ vztah $[\rho(u)](v) = u \cdot v \cdot u^{-1}$, kde můžeme vynechat operátor $\hat{\eta}$ protože $u \in \mathrm{Cl}^+(V,g)$. Pro každé $a \in \{1,\dots,n\}$ pokládáme $v = e^a$ a dostáváme

$$u \cdot e^a \cdot u^{-1} = [\rho(u)](e^a) = \eta^{ai}[\rho(u)](e_i) = \eta^{ai}\mathbf{A}^j_i e_j = (\eta^{ai}\mathbf{A}^j_i \eta_{jb}) e^b. \tag{8.72}$$

Nyní si stačí povšimnout, že $\eta^{ai}\mathbf{A}^j_i\eta_{jb} = (\eta^{-1}\mathbf{A}^T\eta)^a_b = (\mathbf{A}^{-1})^a_b$. To plyne z toho, že $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(p,q)$. Vskutku, taková matice z definice splňuje rovnici

$$\mathbf{A}^T\eta\mathbf{A} = \eta. \tag{8.73}$$

Vynásobením rovnice η^{-1} zleva dostáváme $(\eta^{-1}\mathbf{A}^T\eta)\mathbf{A} = \mathbf{1}_n$ a tedy $\mathbf{A}^{-1} = \eta^{-1}\mathbf{A}^T\eta$. Vidíme, tedy, že platí rovnice $u \cdot e^a \cdot u^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^a_b e^b$. Zapůsobením ζ na obě strany dostáváme (8.70). ■

Příklad 8.4.2. Uvažujme $(V,g) = (\mathbb{R}^4, \eta^{(3,1)})$. Sestrojíme reálnou věrnou reprezentaci $\mathrm{Cl}(V,g)$ na prostoru $\mathbb{R}^4$. Podle předchozí věty stačí zadat γ-matice, které se v tomto případě obvykle označují $(\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)$ a matice skalárního součinu vzhledem ke standardní bázi (e_0,e_1,e_2,e_3) prostoru $\mathbb{R}^4$ má tvar $\eta^{(3,1)} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. Definujeme

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix},\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{8.74}$$

Všechny matice jsou reálné - jedná se tedy o reálnou reprezentaci $\mathrm{Cl}(3,1)$ na $\mathbb{R}^4$. Dá se ukázat, že se jedná o věrnou reprezentaci, tj. $\zeta : \mathrm{Cl}(3,1) \to \mathbb{R}^{4,4}$ je monomorfismus. Protože $\dim(\mathrm{Cl}(3,1)) = \dim(\mathbb{R}^{4,4}) = 16$, je to navíc izomorfismus, t.j. $\mathrm{Cl}(3,1) \cong \mathbb{R}^{4,4}$. ζ se nazývá **Majoranova reprezentace Cliffordovy algebry** $\mathrm{Cl}(3,1)$.

Příklad 8.4.3. Pro $(V,g) = (\mathbb{R}^4, \eta^{(1,3)})$ neexistuje reálná věrná reprezentace $\mathrm{Cl}(1,3)$ na $\mathbb{R}^4$, protože potom by nutně platilo $\mathrm{Cl}(1,3) \cong \mathbb{R}^{4,4} \cong \mathrm{Cl}(3,1)$, což se ví, že není pravda. Existuje ale věrná *komplexní* reprezentace na $\mathbb{C}^4$, kde při označení z předchozího příkladu

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix},\ \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ pro } i \in \{1,2,3\}. \tag{8.75}$$

Této reprezentaci se říká **Diracova reprezentace Cliffordovy algebry** $\mathrm{Cl}(1,3)$.

Nyní se dostáváme ke kýženým veličinám pro fyzikální teorie obsahující fermiony.

Definice 8.4.4. Nechť (W,ζ) je spinorová reprezentace $\mathrm{Spin}(p,q)$. Potom $\Psi \in \Omega^0_\zeta(S(M),W)$ nazýváme **spinorovým polem**. Ekvivalentně, $\Psi \in \Gamma(S(M)\times_\zeta W)$.

Tvrzení 8.4.5. *Nechť $\sigma : U \to O^+(M)$ je lokální řez definovaný na souvislém a jednoduše souvislém $U \subseteq M$, neboli pravotočivé ortonormální pole repérů na U. Nechť $\hat\sigma : U \to S(M)$ je jeden ze dvou jeho zdvihů. Nechť (W,ζ) je spinorová reprezentace* $\mathrm{Spin}(p,q)$.

*Potom **lokální spinorové pole** definujeme vztahem*

$$\psi := \hat\sigma^*(\Psi) \in \Omega^0(U,W). \tag{8.76}$$

Nechť $\hat\sigma' : U \to S(M)$ je druhý ze zdvihů a $\psi' = \hat\sigma'^*(\Psi)$. Potom $\psi' = -\psi$.

Důkaz. Jelikož $\hat\sigma' = \hat\sigma\cdot(-1)$, kde $-1 \in \mathrm{Spin}(p,q)$, z obvyklých transformačních vlastností lokálních veličin typu ζ máme

$$\psi' = \zeta((-1)^{-1})\psi = \zeta(-1)\psi = -\zeta(1)\psi = -\psi. \tag{8.77}$$

Tím je důkaz hotový. ∎

8.5 Diracův operátor, Diracovo pole

Připomeňme, že na $S(M)$ máme kanonickou n-tici vektorových polí $(\mathcal{E}_a)_{a=1}^n$. Nechť $(e_a)_{a=1}^n$ je standardní ortonormální báze v $(\mathbb{R}^{p+1},\eta^{(p,q)})$.

Tvrzení 8.5.1. *Nechť (W,ζ) je spinorová reprezentace* $\mathrm{Spin}(p,q)$. *Nechť $\beta \in \Omega^k_\zeta(S(M),W)$ je horizontální forma typu ζ. Definujeme operátor $i_{\not\xi}$ vztahem*

$$i_{\not\xi}\beta := \gamma^a i_{\mathcal{E}_a}\beta, \tag{8.78}$$

kde $\gamma^a := \zeta(e^a)$. Potom $i_{\not\xi}\beta$ je horizontální $(k-1)$-forma typu ζ.

Nechť $\hat\sigma : U \to S(M)$ je libovolný lokální řez. Nechť $\sigma := \varphi\circ\hat\sigma : U \to S^+(M)$ je odpovídající lokální řez definující pole pravotočivých ortonormálních repérů $(f_a)_{a=1}^n$ na U. Nechť $b := \hat\sigma^*(\beta)$ je odpovídající lokální forma. Potom

$$\hat\sigma^*(i_{\not\xi}\beta) = \gamma^a i_{f_a} b. \tag{8.79}$$

Důkaz. Pro každé $x \in \mathfrak{pin}(p,q)$ dostáváme $i_{\#x}(i_{\not\xi}\beta) = -i_{\not\xi}(i_{\#x}\beta) = 0$ a tedy β je horizontální. Nechť $u \in \mathrm{Spin}(p,q)$ a označme $\mathbf{A} := \rho(u) \in \mathrm{SO}(p,q)$. Potom můžeme psát

$$R_u^*(i_{\not\xi}\beta) = \gamma^a R_u^*(i_{\mathcal{E}_a}\beta) = \gamma^a i_{R_{u^{-1}*}(\mathcal{E}_a)} R_u^*(\beta) = \mathbf{A}^b_a\gamma^a i_{\mathcal{E}_b}(\zeta(u^{-1})\beta) = \mathbf{A}^b_a\gamma^a\zeta(u^{-1})i_{\mathcal{E}_b}\beta, \tag{8.80}$$

kde jsme využili (8.62). S využitím (8.70) můžeme psát $\mathbf{A}^b_a\gamma^a = \zeta(u^{-1})\gamma^b\zeta(u)$. Dosazením

$$R_u^*(i_{\not\xi}\beta) = \zeta(u^{-1})\gamma^b i_{\mathcal{E}_b}\beta = \zeta(u^{-1})(i_{\not\xi}\beta). \tag{8.81}$$

To dokazuje, že $i_{\not\xi}\beta$ je $(k-1)$-forma typu ζ. Zbývá ukázat vztah (8.79). Připomeňme, že pro každé $m \in U$ máme $\mathcal{E}_a|_{\hat\sigma(m)} = f^h_a|_{\hat\sigma(m)} = \hat\sigma_*(f_a|_m)+$ vertikální vektor. Protože β je podle předpokladu

horizontální forma, můžeme pro všechny $X_1, \dots, X_{k-1} \in T_m M$ psát

$$\begin{aligned}
[\hat{\sigma}^*(i_{\not{E}}\beta)]|_m(X_1,\dots,X_k) &= [i_{\not{E}}\beta]|_{\hat{\sigma}(m)}(\hat{\sigma}_*(X_1),\dots,\hat{\sigma}_*(X_{k-1})) \\
&= \gamma^a\beta|_{\hat{\sigma}(m)}(\mathcal{E}_a|_{\hat{\sigma}(m)},\hat{\sigma}_*(X_1),\dots,\hat{\sigma}_*(X_{k-1})) \\
&= \gamma^a\beta|_{\hat{\sigma}(m)}(\hat{\sigma}_*(f_a|_m),\hat{\sigma}_*(X_1),\dots,\hat{\sigma}_*(X_{k-1})) \\
&= \gamma^a a|_m(f_a|_m,X_1,\dots,X_{k-1}) \\
&= [\gamma^a i_{f_m} b]|_m(X_1,\dots,X_{k-1}).
\end{aligned} \tag{8.82}$$

Což bylo dokázáti. ∎

Tvrzení 8.5.2. *Nechť (W,ζ) je spinorová reprezentace $\mathrm{Spin}(p,q)$. Nechť $\beta \in \Omega^k_\zeta(S(M),W)$ je horizontální forma typu ζ. Nechť $\omega' \in \Omega^1(S(M),\mathfrak{pin}(p,q))$ je spinová konexe. Definujeme operátor $\not{D}$ vztahem*

$$\not{D}\beta := (i_{\not{E}} \circ D)(\beta), \tag{8.83}$$

kde D je vnější kovariantní derivace odpovídající ω'. Potom $\not{D}\beta$ je opět horizontální k-forma typu ζ.

Nechť $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ je libovolný lokální řez. Nechť $\sigma := \varphi \circ \hat{\sigma} : U \to S^+(M)$ je odpovídající lokální řez definující pole pravotočivých ortonormálních repérů $(f_a)_{a=1}^n$ na U. Nechť $b := \hat{\sigma}^*(\beta)$ je odpovídající lokální forma. Potom

$$\hat{\sigma}^*(\not{D}\beta) = \not{\mathcal{D}}b \equiv \gamma^a i_{f_a}(\mathcal{D}b). \tag{8.84}$$

*$\not{D}$ se nazývá **Diracův operátor**.*

Důkaz. Všechno plyne triviálně z předchozího tvrzení a vlastností vnější kovariantní derivace. ∎

Z hlediska fyziky nás pochopitelně nejvíce zajímají transformační vlastnosti lokální verze Diracova operátoru $\not{\mathcal{D}}$. Zaveďme si následující notaci. Nechť $\hat{\sigma}' : U' \to S(M)$ je jiný lokální řez. Příslušnou kalibrační transformaci označme jako $\mathbf{u} : U \cap U' \to \mathrm{Spin}(p,q)$.

Tvrzení 8.5.3. *Nechť $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ a $\hat{\sigma}' : U' \to S(M)$ jsou dva řezy spjaté kalibrační transformací $\mathbf{u} : U \cap U' \to \mathrm{Spin}(p,q)$. Potom na $U \cap U'$ platí vztah*

$$\not{\mathcal{D}}' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})\not{\mathcal{D}}\zeta(\mathbf{u}). \tag{8.85}$$

Zejména pokud $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ a $\hat{\sigma}' : U \to S(M)$ zadávají stejné pole ortonormálních pravotočivých repérů $\sigma = \varphi \circ \hat{\sigma} = \varphi \circ \hat{\sigma}'$ na U, máme $\not{\mathcal{D}} = \not{\mathcal{D}}'$.

Důkaz. Nechť $\mu \in \Omega^k_\zeta(S(M),W)$ je horizontální forma typu ζ. Označme $m := \hat{\sigma}^*(\mu)$ a $m' = \hat{\sigma}'^*(\mu)$. Z již dokázaných vlastností vnějších kovariantních derivací víme, že $\mathcal{D}'m' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})\mathcal{D}m$. Definujme funkci $\mathbf{A} := \rho \circ \mathbf{u} : U \cap U' \to \mathrm{SO}(p,q)$. Nechť $(f_a)_{a=1}^n$ a $(f'_a)_{a=1}^n$ jsou repérová pole odpovídající $\hat{\sigma}$ a $\hat{\sigma}'$. Na $U \cap U'$ platí $f'_b = \mathbf{A}^a_b f_b$. Odtud potom

$$\begin{aligned}
\not{\mathcal{D}}'b' &= \gamma^a i_{f'_a}(\mathcal{D}'b') = \mathbf{A}^b_a\gamma^a i_{f_b}(\zeta(\mathbf{u}^{-1})\mathcal{D}b) = (\zeta(\mathbf{u}^{-1})\gamma^b\zeta(\mathbf{u}))\zeta(\mathbf{u}^{-1})i_{f_b}\mathcal{D}b \\
&= \zeta(\mathbf{u}^{-1})(\gamma^b i_{f_b}\mathcal{D}b) = \zeta(\mathbf{u}^{-1})(\not{\mathcal{D}}b).
\end{aligned} \tag{8.86}$$

S přihlédnutím k faktu, že na $U \cap U'$ platí $b' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})b$, dostaneme snadno relaci (8.85). Pokud $\hat{\sigma}$ a $\hat{\sigma}'$ zadávají stejné pole ortonormálních pravotočivých repérů, je $\mathbf{u}$ na každé komponentě souvislosti U rovna ± 1. Protože $\zeta(\pm 1) = \pm 1_W$, případné vlastnosti, plyne tvrzení z (8.85). ∎

Pojďme si nyní nalézt explicitní vyjádření Diracova operátoru na lokálních spinorových polích ψ. Budeme předpokládat následující zadaná data:

(i) spinová konexe ω', odpovídající jednoznačně metrické afinní konexi na M vzhledem ke g;

(ii) spinorová reprezentace (W, ζ) grupy $\mathrm{Spin}(p,q)$;

(iii) volba kalibrace $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ indukující pole pravotočivých ortonormálních repérů $(f_a)_{a=1}^n$ na U odpovídající řezu $\sigma := \varphi \circ \hat{\sigma} : U \to O^+(M)$;

(iv) souřadnice $(x^\mu)_{\mu=1}^n$ na okolí U;

(v) bázi $(E_\alpha)_{\alpha=1}^{\dim(W)}$ reprezentačního prostoru W.

K výpočtu budeme potřebovat ještě následující pozorování. Jak vypadá přidružená reprezentace (W, ζ') algebry $\mathfrak{pin}(p,q)$? Protože (W, ζ) pochází z reprezentace ζ asociativní algebry $\mathrm{Cl}(p,q)$, dá se snadno rozmyslet, že ζ' je indukovaná restrikcí ζ na $\mathfrak{pin}(p,q) \subseteq \mathrm{Cl}(p,q)$.

Vstutku, pro každé $x \in \mathfrak{pin}(p,q)$ máme

$$\begin{aligned} \zeta'(x) = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \zeta(\exp(tx)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \zeta(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{x \cdots x}_{k \text{ krát}}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{\zeta(x) \cdots \zeta(x)}_{k \text{ krát}} \\ = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\zeta(x)) = \zeta(x). \end{aligned} \tag{8.87}$$

Že homomorfismus algeber ζ může vlézt i dovnitř nekonečné sumy vyžaduje nějakou práci s normami, kterou si rádi odpustíme.

Nechť $\Psi \in \Omega^0_\zeta(S(M), W)$ je spinorové pole a $\sigma = \hat{\sigma}^*(\Psi)$ příslušná lokální verze. Můžeme psát $\psi = \psi^\alpha E_\alpha$. Pro každé $a \in \{1, \ldots, n\}$ můžeme psát $f_a = f_a^\mu \partial_\mu$ pro funkce $f_a^\mu \in C^\infty(U)$, kterým se také někdy říká *vielbeinová pole*. Operátory $\gamma^a \in \mathrm{End}(W)$ rovněž můžeme psát vzhledem k bázi, tj. $\gamma^a E_\alpha =: \gamma_\alpha^{a\beta} E_\beta$.

Připomeňme, že lokální forma konexe má tvar $\hat{\omega}' = \frac{1}{2}(\Gamma_{bca} f^a) m^{bc}$, kde $\Gamma_{abc} = \eta_{ak}\Gamma^k_{bc}$ se získají z Christoffelových symbolů konexe ∇ vzhledem k repérovému poli $(f_a)_{a=1}^n$. Z využitím rovnice (6.22) tedy dostáváme výraz

$$\begin{aligned} \not{D}\psi &= \gamma^a i_{f_a}(d\psi + \zeta(\hat{\omega})\psi) = \gamma^a(f_a^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2}\Gamma_{bca}\zeta(m^{bc})\psi) \\ &= \gamma^a(f_a^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{8}\Gamma_{bca}[\gamma^b, \gamma^c]\psi) \end{aligned} \tag{8.88}$$

Vzhledem k tomu, že $\Gamma_{bca} = -\Gamma_{cba}$, můžeme výraz psát o něco jednodušeji jako

$$\not{D}\psi = \gamma^a(f_a^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{4}\Gamma_{bca}\gamma^b\gamma^c\psi). \tag{8.89}$$

Toto je správná forma (lokálního) Diracova operátoru v prostorech s netriviální metrikou g s použitím obecné metrické konexe ∇.

Příklad 8.5.4. Pro $M = \mathbb{R}^4$ a plochou Minkowského metriku $\eta^{(1,3)}$.

K dispozici máme globální pole ortonormálních pravotočivých repérů $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})_{\mu=0}^3$. To nám zadává globální trivializaci $O^+(M) \cong M \times \mathrm{SO}(1,3)$. Snadno tak můžeme sestrojit prolongaci

$O^+(M)$ v podobě triviální fibrace $S(M) = M \times \mathrm{Spin}(1,3)$, kde $\varphi : S(M) \to O^+(M)$ má explicitní tvar $\varphi(m,u) := \partial|_m \cdot \rho(u)$, kde $\partial|_m = (\partial_0|_m, \partial_1|_m, \partial_2|_m, \partial_3|_m)$.

Potom $\hat\sigma(m) := (m,1)$ definuje globální řez $S(M)$ a $\sigma := \varphi \circ \hat\sigma$ odpovídá právě poli repérů $(\partial_\mu)_{\mu=0}^3$. Druhý řez odpovídající tomuto poli repérů je $\hat\sigma'(m) = (m,-1)$. Za metrickou afinní konexi ∇ můžeme zvolit Levi-Civitovu konexi odpovídající $\eta^{(1,3)}$. Taková má ale triviální Christoffelovy symboly vzhledem k souřadnicovému poli repérů $(\partial_\mu)_{\mu=0}^3$.

Dostáváme tedy očekávanou formulku pro Diracův operátor: $\not{D}\psi = \gamma^\mu \partial_\mu \psi$.

Nyní je již snadné vymyslet vhodný účinek pro spinorová pole ψ.

Tvrzení 8.5.5. *Nechť (W,ζ) je komplexní spinorová reprezentace $\mathrm{Spin}(p,q)$ na W. Nechť $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ je ζ-invariantní pseudoskalární součin na W. Označme g metriku signatury (p,q) definující fibraci $O^+(M)$ a $S(M)$.*

Nechť $\Psi_1, \Psi_2 \in \Omega^0_\zeta(S(M), W)$ jsou spinorová pole Zvolíme-li lokální kalibraci $\hat\sigma : U \to S(M)$, můžeme definovat $\psi_1 := \hat\sigma^*(\Psi_1)$ a $\psi_2 := \hat\sigma^*(\Psi_2)$ a funkci

$$(\!(\psi_1,\psi_2)\!)_W := \psi_1^\alpha \psi_2^\beta \langle E_\alpha, E_\beta\rangle_W, \tag{8.90}$$

kde $(E_\alpha)_{\alpha=1}^n$ je libovolná báze W. Potom $(\!(\psi_1,\psi_2)\!)_W$ je kalibračně invariantní a tedy definuje globální funkci, kterou můžeme vyintegrovat a dostat pseudoskalární součin:

$$\langle\!\langle \psi_1,\psi_2\rangle\!\rangle_W := \int_M (\!(\psi_1,\psi_2)\!)_W \cdot \omega_g. \tag{8.91}$$

Důkaz. Je-li $\hat\sigma' : U \to \mathrm{Spin}(p,q)$ jiná volba kalibrace, máme kalibrační transformaci $\mathbf{u} : U \cap U' \to \mathrm{Spin}(p,q)$ a vztahy $\psi_1' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})\psi_1$ a $\psi_2' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})\psi_2$. Protože je $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ podle předpokladu ζ-invariantní, snadno vidíme, že $(\!(\psi_1,\psi_2)\!)_W(m) = (\!(\psi_1',\psi_2')\!)_W(m)$ Pro všechny $m \in U \cap U'$. ■

Příklad 8.5.6. Uvažujme $W = \mathbb{C}^4$ a Diracovu spinorovou reprezentaci $\mathrm{Spin}(1,3)$ z příkladu (8.4.3). Potom na $\mathbb{C}^4$ existuje ζ-invariantní skalární součin definovaný pro $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}^4$ vztahem

$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle_W := \bar\psi_1\psi_2 = \psi_1^\dagger \gamma^0 \psi_2. \tag{8.92}$$

Pro hermitovské sdružení γ-matic platí relace $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$. Nechť $u \in \mathbb{R}^4$ je libovolný vektor normovaný na ±1, t.j. $\eta^{(1,3)}(u,u) = \pm1$. Z definice grupy $\mathrm{Spin}(1,3)$ stačí ukázat, že $\langle\zeta(u)\psi_1, \zeta(u)\psi_2)\rangle_W = \pm\langle\psi_1,\psi_2\rangle$. Píšeme-li $u = u_a e^a$, máme

$$\begin{aligned}\langle\zeta(u)\psi_1,\zeta(u)\psi_2\rangle_W &= u_a u_b \psi_1^\dagger (\gamma^a)^\dagger \gamma_0 \gamma^b \psi_2 = u_a u_b \psi_1^\dagger \gamma^0 \gamma^a (\gamma^0)^2 \gamma^b \psi_2 \\ &= u_a u_b \psi_1^\dagger \gamma^0 \gamma^a \gamma^b \psi_2.\end{aligned} \tag{8.93}$$

S použitím standardních relací mezi γ-maticemi můžeme psát

$$\gamma^a\gamma^b = \frac{1}{2}\{\gamma^a,\gamma^b\} + \frac{1}{2}[\gamma^a,\gamma^b] = \eta^{ab}1_W + \frac{1}{2}[\gamma^a,\gamma^b]. \tag{8.94}$$

Protože však vyscítáváme přes výraz $u^a u^b$ symetrický v indexech a a b, můžeme na komutátor zapomenout a dostáváme

$$\langle\zeta(u)\psi_1,\zeta(u)\psi_2\rangle_W = u_a u_b \eta^{ab} \psi_1^\dagger\gamma^0\psi_2 = \eta^{(1,3)}(u,u)\cdot\langle\psi_1,\psi_2\rangle_W = \pm\langle\psi_1,\psi_2\rangle_W. \tag{8.95}$$

Obecný element $\mathrm{Spin}(p,q)$ je součin $u_1 \cdots u_k$, kde $\eta^{(1,3)}(u_i,u_i) = \pm1$ a k je *sudé číslo*.

Literatura

[1] M. Fecko, *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. IRIS, 2008.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 2. Wiley New York, 1969.

[3] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.

[4] K. C. Mackenzie, *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, vol. 213 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[5] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.

02ALTO Algebraická topologie

Jan Vysoký

Obsah

Úvod **2**

1 Fundamentální grupa **3**

1.1 Relace homotopie 3

1.2 Fundamentální grupa 7

1.3 Fundamentální grupa kružnice 10

1.4 Indukovaná zobrazení a homotopická ekvivalence 13

1.5 Jazyk kategorií 16

2 Homologie **19**

2.1 Celulární komplexy 19

2.2 Δ-komplexy 23

2.3 Simpliciální homologie 25

2.4 Singulární homologie 28

2.5 Exaktní posloupnosti a vyříznutí 33

2.6 Singulární versus simpliciální 39

2.7 Nějaké aplikace 42

3 Kohomologie **44**

3.1 de Rhamova kohomologie 44

3.2 Mayer-Vietorisova posloupnost 46

3.3 Poincarého lemma 49

3.4 Čechova-de Rhamova kohomologie 51

3.5 Kohomologie Lieových algeber 58

3.6 Svazky a jejich Čechova kohomologie 63

Úvod

Toto jsou oficiální poznámky k přednášce vyučované na FJFI ČVUT v Praze.

Studium moderní matematické a teoretické fyziky klade na posluchače neustále se zvyšující nároky na znalost matematického aparátu. Hlavním úkolem tohoto kurzu je seznámit studenty se základními metodami užívanými v algebraické topologii, zejména s elementy teorie kategorií, homotopií, homologické algebry a kohomologie. Důležitým cílem je rozšíření matematického jazyka o pojmy vyskytující se univerzálně napříč disciplínami jako jsou diferenciální geometrie a abstraktní algebra.

Kapitoly o fundamentální grupě a homologii jsou založeny téměř výhradně na knížce A. Hatchera [4]. Její aktualizovaná verze je k dispozici přímo na jeho webových stránkách na adrese

`https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`

Kapitola o kohomologiích je výběrem ze slavné knihy [1]. Část o kohomologiích Lieových algeber lze včetně všech detailů nalézt v [3]. Více o Čechových kohomologiích předsvazků nalezne čtenář v poznámkách [2].

Děkuji studentům za užitečné připomínky.

Kapitola 1

Fundamentální grupa

V této kapitole si představíme jeden ze základních nástrojů algebraické topologie, tzv. fundamentální grupu. Víte, že topologický prostor je jednoduše souvislý, jde-li každou spojitou uzavřenou křivku spojitě stáhnout do bodu. Ukazuje se, že dva homeomorfní (tedy z hlediska topologie identické) topologické prostory vždy sdílí tuto vlastnost. Co když jednoduše souvislé nejsou? Existuje nějaká podrobnější charakteristika toho „nebýt jednoduše souvislý“ společná pro všechny reprezentanty jedné třídy homeomorfních prostorů?

1.1 Relace homotopie

Nejprve je dobré si pečlivě zavést koncept spojité deformace nejpřirozenějšího topologického objektu - spojitých zobrazení. Další modifikací této definice dostaneme potřebné nástroje. Pokud nebude řečeno jinak, I vždy označuje jednotkový *uzavřený* interval $I = [0, 1]$.

Definice 1.1.1. Nechť X a Y jsou dva topologické prostory, a nechť $f, g : X \to Y$ jsou spojitá zobrazení. Řekneme, že f a g jsou **homotopická**, pokud existuje spojité zobrazení $H : X \times I \to Y$ takové, že $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ pro všechny $x \in X$. Zobrazení H se nazývá **homotopie** zobrazení f a g. Píšeme $f \simeq g$.

Jelikož je H spojité, pro každé $t \in I$ nám předpis $f_t(x) = H(x, t)$ definuje spojité zobrazení $f_t : X \to Y$, takové že $f_0 = f$ a $f_1 = g$. Dvě homotopická zobrazení lze tedy „spojitě“ transformovat jedno na druhé změnou parametru t, přičemž každý mezikrok je spojité zobrazení.

Před důkazem klíčové vlastnosti pojmu homotopie si vyslovíme jedno technické lemma.

Lemma 1.1.2. *Nechť X, Y jsou libovolné topologické prostory a $C_1, C_2 \subseteq X$ dvě uzavřené množiny. Nechť $f : C_1 \cup C_2 \to Y$ je libovolné zobrazení. Potom f je spojité, právě tehdy když jeho restrikce na C_1 i C_2 je spojité zobrazení.*

Důkaz. Nechť je f spojité zobrazení. Ukážeme, že jeho restrikce $f_1 : C_1 \to Y$ je spojitá. Nechť $V \subseteq Y$ je otevřená množina. Z definice je $f^{-1}(V) \subseteq C_1 \cup C_2$ otevřená. Existuje tedy otevřená množina $U \subseteq X$, že $f^{-1}(V) = (C_1 \cup C_2) \cap U$. To ale můžeme přepsat jako

$$f^{-1}(V) = (C_1 \cup C_2) \cap U = (C_1 \cap U) \cup (C_2 \cap U). \tag{1.1}$$

Máme ukázat, že $f_1^{-1}(V)$ je otevřená. Zřejmě $f_1^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap C_1$. Z předchozího potom s využitím standardních vlastností sjednocení a průniků dostáváme jednoduše

$$f_1^{-1}(V) = C_1 \cap U \tag{1.2}$$

To je otevřená množina v C_1 a tedy $f_1 : C_1 \to Y$ je spojité. Důkaz pro restrikci na C_2 je analogický. Vidíme, že pro tento směr není podstatné, že C_1 a C_2 jsou uzavřené.

Pro opačný směr, ukážeme, že vzor každé uzavřené množiny vzhledem k f je uzavřená množina. Nechť $V \subseteq Y$ je libovolná uzavřená množina. Nechť f_1 a f_2 označuje příslušné restrikce. Z předpokladu je množina $U_1 = f_1^{-1}(V) \subseteq C_1$ uzavřená v C_1. Ale C_1 je uzavřená a tedy je U_1 uzavřená i v X. Ze stejného důvodu je $U_2 = f_2^{-1}(V) \subseteq C_2$ uzavřená v X. Potom ale

$$f^{-1}(V) = U_1 \cup U_2 \subseteq C_1 \cup C_2 \tag{1.3}$$

je množina uzavřená v X, speciálně tedy i v $C_1 \cup C_2$. ■

Poznámka 1.1.3. Analogické lemma platí pro zobrazení definované na sjednocení dvou otevřených podmnožin.

Toto lemma nám dává jednoduchou možnost jak vyrábět spojitá zobrazení. Můžeme vzít dvě libovolná spojitá zobrazení $f_1 : C_1 \to Y$ a $f_2 : C_2 \to Y$. Tato jsou restrikcí unikátního zobrazení $f : C_1 \cup C_2 \to Y$, právě tehdy když se f_1 a f_2 shodují na průniku $C_1 \cap C_2$. Z předchozího tvrzení plyne, že takové f je automaticky spojité.

Tvrzení 1.1.4. *Nechť X, Y jsou dva topologické prostory. Symbolem $\mathbf{Top}(X, Y)$ označme prostor všech spojitých zobrazení. Potom „být homotopická“ je relací ekvivalence na $\mathbf{Top}(X, Y)$, příslušné třídy ekvivalence se nazývají **homotopické třídy**.*

Důkaz. Musíme ukázat, že relace $f \simeq g$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

1. (**Reflexivita**) $f \simeq f$ pro každé $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$: Zobrazení $H(x, t) = f(x)$ je zjevně spojité v obou parametrech a definuje homotopii f s f.

2. (**Symetrie**) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$: Nechť H je homotopie f a g, tj. $H(x, 0) = f(x)$ a $H(x, 1) = g(x)$. Můžeme definovat $H'(x, t) = H(x, 1 - t)$. Zjevně H' je homotopie g a f, tj. $g \simeq f$.

3. (**Tranzitivita**) $(f \simeq g) \wedge (g \simeq h) \Rightarrow f \simeq h$: Nechť H_1 je homotopie f a g, H_2 homotopie g a h. Definujeme $H : X \times I \to Y$ vztahem

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{když } (x, t) \in X \times [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2t - 1) & \text{když } (x, t) \in X \times [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.4}$$

   Zjevně $H(x, 0) = H_1(x, 0) = f(x)$ a $H(x, 1) = H_2(x, 1) = h(x)$. Spojitost plyne z poznámky pod Lemma 1.1.2, protože H je definováno pomocí dvou spojitých zobrazení $H_1(x, 2t)$ na $C_1 = X \times [0, \frac{1}{2}]$ a $H_2(x, 2t - 1)$ na $C_2 = X \times [\frac{1}{2}, 1]$, které splývají na $C_1 \cap C_2 = X \times \{\frac{1}{2}\}$.

A máme dokázáno. ■

Někdy je třeba více restriktivní a omezit množinu přípustných homologií, například chceme-li aby homotopie dvou funkcí splývajících na nějaké podmnožině $A \subseteq X$ byla pomocí funkcí které rovněž všechny splývají na A. To vede k následující definici:

Definice 1.1.5. Nechť $f, g \in \mathbf{Top}(X, Y)$. Nechť $A \subseteq X$ je libovolná podmnožina. Řekneme, že f a g jsou **homotopické relativně k** A existuje-li jejich homotopie $H : X \times I \to Y$, taková, že pro všechny $a \in A$ je $H(a, t)$ funkce nezávislá na t. Označujeme $f \simeq_A g$.

Poznámka 1.1.6. Z důkazu předchozího tvrzení je zřejmé, že homotopie relativní vzhledem k A je opět relace ekvivalence, která má pro $A \neq \emptyset$ více tříd ekvivalence než homotopie absolutní. Zejména platí, že když je $f \simeq_A g$, tak pro všechny $a \in A$ musí platit $f(a) = H(a, 0) = H(a, 1) = g(a)$, tj. dvě zobrazení homotopická relativně k A musí na A splývat.

Na závěr této sekce si připomeňme dvě obvyklé definice, které lze pomocí (relativní) homotopie formulovat velmi efektivně.

Definice 1.1.7. Nechť X a Y jsou libovolné topologické prostory. Zobrazení $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$ se nazývá **homotopická ekvivalence**, existuje-li zobrazení $g \in \mathbf{Top}(Y, X)$, takové že

$$g \circ f \simeq \mathbf{1}_X, \quad f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y. \tag{1.5}$$

Existuje-li mezi dvěma prostory nějaká homotopická ekvivalence, řekneme, že mají **stejný homotopický typ**.

Příklad 1.1.8. Má-li topologický prostor X stejný homotopický typ jako bod $\{*\}$, řekneme, že X je **stáhnutelný do bodu** (nebo také kontraktibilní).

Ukažme si, že toto pojmenování má své opodstatnění. Podle definice tedy existuje homotopická ekvivalence $f : X \to \{*\}$. Zřejmě existuje jedno jediné spojité zobrazení $f : X \to \{*\}$. Příslušné zobrazení $g : \{*\} \to X$ můžeme ztotožnit s výběrem fixního bodu $x_0 = g(*) \in X$. Podmínka $f \circ g \simeq \mathbf{1}_{\{*\}}$ je triviálně splněná pro každé X i volbu g. Uvažujme tedy druhou z podmínek $g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$. Z definice existuje spojité zobrazení $H : X \times I \to X$, které splňuje:

$$H(0, x) = \mathbf{1}_X(x) = x, \quad H(1, x) = (g \circ f)(x) = g(*) = x_0. \tag{1.6}$$

Pro každé $t \in I$ tedy dostáváme zobrazení $f_t \in \mathbf{Top}(X, X)$, kde f_0 je identita na X a f_1 zobrazuje celé X do bodu x_0. Na $t \mapsto f_t(x)$ se také můžeme dívat jako na spojitou křivku spojující x s x_0.

Tvrzení 1.1.9. *Mít stejný homotopický typ je relace ekvivalence.*

Důkaz. Identita $\mathbf{1}_X : X \to X$ je zjevně homotopická ekvivalence, a tedy relace je reflexivní. Pokud $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$ je homotopická ekvivalence, máme příslušné $g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$. Je zjevné, že g je homotopická ekvivalence. To ukazuje, že relace je symetrická.

Konečně, nechť $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$ a $f' \in \mathbf{Top}(Y, Z)$ jsou homotopické ekvivalence. Ukážeme, že $f' \circ f \in \mathbf{Top}(X, Z)$ je homotopická ekvivalence. Z definice máme $g \in \mathbf{Top}(Y, X)$ a $g' \in \mathbf{Top}(Z, X)$, že $g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$, $f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y$, $g' \circ f' \simeq \mathbf{1}_Y$ a $f' \circ g' \simeq \mathbf{1}_Z$.

Ukažme si nejprve následující obecnější trvzení. Nechť $f, g :\in \mathbf{Top}(X, Y)$. Potom pro každé $h \in \mathbf{Top}(Y, Z)$ a $k \in \mathbf{Top}(S, X)$ platí

$$f \simeq g \Rightarrow h \circ f \simeq h \circ g, \quad f \simeq g \Rightarrow f \circ k \simeq g \circ k. \tag{1.7}$$

Nechť $H : X \times I \to Y$ je homotopie f a g. Snadno se ověří, že $H' := h \circ H$ je homotopie $h \circ f$ a $h \circ g$. Podobně, zobrazení $H''(s, t) := H(k(s), t)$ definuje homotopii $f \circ k$ a $g \circ k$.

Nyní se již můžeme vrátit k dokazovanému tvrzení a máme

$$(f' \circ f) \circ (g \circ g') = f' \circ (f \circ g) \circ g' \simeq f' \circ \mathbf{1}_Y \circ g' = f' \circ g' \simeq \mathbf{1}_Z. \tag{1.8}$$

Druhá z požadovaných identit se ukáže úplně stejně. Tím jsme dokázali tranzitivitu. ∎

Definice 1.1.10. Nechť $A \subseteq X$ je podmnožina topologického prostoru X. Řekneme, že A je **deformační retrakt** X, pokud existuje $r \in \mathbf{Top}(X, X)$, takové $r(X) = A$ a platí $1_X \simeq_A r$.

Z poznámky 1.1.6 plyne, že nutně $r(a) = 1_X(a) = a$ pro všechny $a \in A$. Takové r se nazývá **retrakce** X na A. Homotopie relativní k A nám ale navíc dává množinu zobrazení $r_t \in \mathbf{Top}(X, X)$, kde $r_0 = \mathbf{1}_X$, $r_1 = r$ a každé ze zobrazení splňuje $r_t(a) = a$ pro každé $a \in A$.

Tvrzení 1.1.11. *Je-li A deformační retrakt na X, mají X a A stejný homotopický typ.*

Důkaz. r můžeme díky podmínce $r(X) = A$ považovat za spojité zobrazení $r : X \to A$. Nechť $i : A \to X$ je inkluze podmnožiny. Z definice podmnožinové topologie $i \in \mathbf{Top}(A, X)$. Ukažme, že r je homotopická ekvivalence. Z předchozí poznámky $r \circ i = \mathbf{1}_A$. Ukážeme, že $i \circ r \simeq \mathbf{1}_X$. Z definice ale máme homotopii $H : X \times I \to X$, která splňuje $H(\cdot, 0) = \mathbf{1}_X$ a $H(\cdot, 1) = i \circ r$. ■

Příklad 1.1.12. $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ je deformační retrakcí $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Retrakci r definujeme jednoduše jako $r(x) := \|x\|^{-1}x$, což je zjevně spojité zobrazení z X to X splňující $r(X) = A$. Třídu zobrazení $r_t : X \to X$ sestrojíme následovně. Můžeme chtít, aby $r_t(x)$ byl bod na spojnici mezi $r(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ a x. To jsou ale přesně konvexní lineární kombinace těchto bodů. Tedy navrhujeme

$$r_t(x) := tr(x) + (1 - t)x. \tag{1.9}$$

To je zjevně spojité zobrazení, $r_0 = \mathbf{1}_X$, $r_1 = r$ a pro všechny $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ platí $r(a) = a$ a proto $r_t(a) = tr(a) + (1 - t)a = ta + (1 - t)a = a$, jak jsme požadovali.

Příklad 1.1.13. Nechť $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$. Uvažujme topologický prostor

$$M_f := \{(X \times I) \sqcup Y\}/\sim, \tag{1.10}$$

kde $(x, 0) \sim f(x)$. Co se tím míní? Vezmeme dvě množiny $X \times I$ a Y a ztotožníme každý bod $(x, 0)$ z první s $f(x)$ z druhé. Lze si představovat jako „přilepení“.

Jak se na takovém prostoru zavádí topologie? Máme přirozené „faktorové zobrazení“ $q : (X \times I) \sqcup Y \to M_f$, které každému bodu z původních dvou množin přiřadí odpovídající bod v slepeném prostoru. q není injektivní, protože $(x, 0) \in X \times I$ a $f(x) \in Y$ zobrazí na stejný bod. Řekneme, že $U \in M_f$ je otevřená, pokud $q^{-1}(U)$ je otevřená v $(X \times I) \sqcup Y$.

M_f s touto topologií se nazývá **zobrazovací válec** f. Ukažme, $Y \subseteq M_f$ je deformační retrakt M_f. Pro každé $t \in I$ musíme sestrojit $r_t : M_f \to M_f$. Pro každé $t \in [0, 1]$ sestrojíme spojité $\hat{r}_t : (X \times I) \sqcup Y \to M_f$ vztahem

$$\hat{r}_t(x, s) := (x, t \cdot s), \quad \hat{r}_t(y) := y. \tag{1.11}$$

Snadno se ověří, že potom existuje jednoznačné zobrazení $r_t : M_f \to M_f$ takové, $r_t \circ q = \hat{r}_t$. Takové zobrazení je z definice topologie vždycky spojité. Zjevně $r_1 = \mathbf{1}_{M_f}$. Definujeme $r := r_0$. Také $r_t(y) = y$ pro všechny $y \in Y$.

Dá se ukázat, že podmnožina $X \times \{1\} \cong X$ je deformační retrakt M_f, právě tehdy když $f : X \to Y$ je homotopická ekvivalence.

1.2 Fundamentální grupa

Nyní se specializujeme na spojitá zobrazení $\mathbf{Top}(I, X)$ pro fixní topologický prostor X. Každým jeho elementem je spojité zobrazení $f : I \to X$, kterému říkáme **spojitá křivka v prostoru** X. Na prostoru $\mathbf{Top}(I, X)$ máme dle Tvrzení 1.1.4 relaci ekvivalence $\simeq$ jejíž třídy jsou homotopické křivky. Zvolíme-li si podmnožinu $A = \{0, 1\} \subset I$, můžeme uvažovat homotopii relativní vzhledem k A. To je dle poznámky 1.1.6 též relace ekvivalence.

Shrňme si, co nám dává informace $f \simeq_A g$ pro $f, g \in \mathbf{Top}(I, X)$. Pro každé $t \in I$ dostáváme křivku $f_t \in \mathbf{Top}(I, X)$, takovou že $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = g(x)$. Relativita vůči $A = \{0, 1\}$ zaručí, že $f_t(0) \equiv f(0) = g(0)$ a $f_t(1) \equiv f(1) = g(1)$, tedy že všechny zúčastněné křivky *začínají i končí ve stejném bodě*.

Definice 1.2.1. Pokud pro $f, g \in \mathbf{Top}(I, X)$ platí $f \simeq_A g$, řekneme, že příslušná homotopie je **homotopie křivek s pevnými konci**. V následujícím textu budeme uvažovat *výhradně* tento typ homotopie a psát pouze $f \simeq g$ bez spodního indexu A.

Je zjevné, že dvě křivky nemůžou být homotopické s pevnými konci, pokud jejich počáteční a koncový bod nesplývají. Třídu ekvivalence dané křivky f budeme označovat $[f]$ a nazývat **třídou homotopie** křivky f. Jinými slovy $[f] = [f']$, právě tehdy když $f \simeq f'$. Je třeba si uvědomit, že pod slovem křivka se vždy myslí spojité zobrazení $f \in \mathbf{Top}(I, X)$, nikoliv pouze obraz (stopa) $f(I) \subseteq X$. Intuice nám ale říká, že pojem homotopie by měl být do jisté míry nezávislý na konkrétní parametrizaci křivky. Přesné tvrzení nám poskytuje následující lemma:

Lemma 1.2.2. *Nechť $f \in \mathbf{Top}(I, X)$. **Reparametrizací křivky** f rozumíme křivku $f \circ \varphi$, kde $\varphi : I \to I$ je libovolné spojité zobrazení splňující $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(1) = 1$. Potom platí $[f] = [f \circ \varphi]$, tedy reparametrizace nemění třídu homotopie.*

Důkaz. Pro každé $(s, t) \in I \times I$ definujeme hledanou homotopii jako

$$H(s, t) = f((1 - t)\varphi(s) + ts). \tag{1.12}$$

Zřejmě je o spojité zobrazení, platí $H(s, 0) = f(\varphi(s))$, $H(s, 1) = f(s)$, konvexnost intervalu I zaručí, že $(1 - t)\varphi(s) + ts \in I$, a homotopie fixuje koncové body protože

$$H(0, t) = f((1 - t)\varphi(0) + t \cdot 0) = f(0), \quad H(1, t) = f((1 - t)\varphi(1) + t \cdot 1) = f(1). \tag{1.13}$$

Zjišťujeme tedy, že $f \simeq f \circ \varphi$, jak bylo dokázati. ■

Definice 1.2.3. Nechť $f, g \in \mathbf{Top}(I, X)$ jsou dvě křivky takové, že $f(1) = g(0)$. **Napojením křivek** f a g myslíme křivku $f * g$ definovanou vztahem

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.14}$$

Z poznámky pod Lemma 1.1.2 je $f * g$ spojitá křivka, která splňuje $(f * g)(0) = f(0)$ a $(f * g)(1) = g(1)$. Intuice: v první půlce I projedeme f, v druhé půlce projedeme g.

Je jasné, že ne každé dvě křivky lze napojit. Při libovolném následujícím výroku obsahujícím operaci $*$ budeme *implicitně předpokládat*, že dané křivky napojit lze. Případné ověření, že všechny výrazy mají smysl přenecháme čtenáři. Napojení křivek má jednu význačnou vlastnost, kterou shrnujeme v následujícím lemma:

Lemma 1.2.4. *Operace napojení křivek se chová přirozeně vzhledem k homotopiím, tj. pokud pro* $f, f', g, g' \in \mathbf{Top}(I, X)$ *platí* $f \simeq f'$ *a* $g \simeq g'$*, potom* $f * g \simeq f' * g'$*.*

Důkaz. Ukážeme pouze, že za daných předpokladů platí $f * g \simeq f' * g$. Druhý speciální případ se ukáže analogicky a zbytek plyne z tranzitivity relace ekvivalence. Nechť $H : I \times I \to X$ je příslušná homotopie. Homotopii H' křivek $f * g$ a $f' * g$ definujeme pro $(t, s) \in I \times I$ jako

$$H'(t, s) = (f_s * g)(t), \tag{1.15}$$

kde $f_s \in \mathbf{Top}(I, X)$ jsou křivky definované homotopií H, tj. $f_s(t) = H(t, s)$. Snadno se ověří, že H' je spojité zobrazení a navíc $H'(0, s) = (f * g)(0)$, $H'(1, s) = (f * g)(1)$, $H'(t, 0) = (f * g)(t)$ a $H'(t, 1) = (f' * g)(t)$. Dostáváme tedy $f * g \simeq f' * g$, což bylo dokázati. ■

Definice 1.2.5 (Částečná binární operace na homotopiích). Na třídách homotopie křivek můžeme zavést částečnou binární operaci $*$ vztahem $[f] * [g] = [f * g]$.

Tvrzení 1.2.6. *Operace* $*$ *má vlastnosti velmi podobné těm grupovým:*

*(i) (**Násobení jednotkou**) Pro libovolnou konstantní křivku* $e_{x_0}(t) = x_0$ *platí rovnice*

$$[f] * [e_{x_0}] = [f], \quad [e_{x_0}] * [g] = [g], \tag{1.16}$$

pro všechny $f, g \in \mathbf{Top}(I, X)$*, pro které má operace* $*$ *smysl.*

*(ii) (**Inverze**) Pro každou křivku* $f \in \mathbf{Top}(I, X)$ *existuje křivka* $f^{-1} \in \mathbf{Top}(I, X)$*, taková, že*

$$[f] * [f^{-1}] = [e_{f(0)}], \quad [f^{-1}] * [f] = [e_{f(1)}]. \tag{1.17}$$

*(iii) (**Asociativita**) Pro každou trojici křivek* $f, g, h \in \mathbf{Top}(I, X)$ *platí asociativní zákon:*

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]. \tag{1.18}$$

Důkaz. Ad (i): Ukážeme první z možnosti. Máme tedy $f(1) = x_0$. Snadno se nahlédne, že $f * e_{x_0} = f \circ \varphi$ pro spojitou funkci jejíž graf lomenou čarou zadanou body

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\frac{1}{2}) = 1, \quad \varphi(1) = 1. \tag{1.19}$$

Z Lemma 1.2.2 pak plyne $[f] * [e_{x_0}] = [f * e_{x_0}] = [f \circ \varphi] = [f]$.

Ad (ii): Nechť $f \in \mathbf{Top}(I, X)$ je libovolná křivka. Definujeme $f^{-1} \in \mathbf{Top}(I, X)$ vztahem $f^{-1}(t) = f(1 - t)$ pro $t \in I$. Ověříme, že $f * f^{-1} \simeq e_{f(0)}$, druhá rovnost se dokáže analogicky. Homotopii $H : I \times I \to X$ definujeme vztahem

$$H(t, s) = \begin{cases} f((1 - s)2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ f^{-1}((1 - s)(2t - 1) + s) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.20}$$

Tento složitý předpis má jednoduchou interpretaci. Pro dané $s \in I$ běžíme pro $t \in [0, \frac{1}{2}]$ podél křivky f až do bodu $f(1 - s)$, pak pro $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ běžíme opačně podél křivky f^{-1} z bodu $f^{-1}(s) = f(1 - s)$ do bodu $f^{-1}(1) = f(0)$. Vidíme, že $H(t, 0) = f * f^{-1}$, $H(t, 1) = e_{f(0)}(t)$ a $H(0, s) = H(1, s) = f(0)$. Tedy $f * f^{-1} \simeq e$.

Ad (iii): Snadno se nahlédne, že obě křivky $f * (g * h)$ a $(f * g) * h$ se liší pouze parametrizací, tj $(f * g) * h = (f * (g * h)) \circ \varphi$, kde graf φ je lomená čára zadaná body

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}, \quad \varphi(1) = 1. \tag{1.21}$$

Odtud již plyne asociativita $([f] * [g]) * [h] = [(f * g) * h] = [f * (g * h)] = [f] * ([g] * [h])$. ■

Vidíme, že jedinou překážkou pro definici grupy je fakt, že $*$ není definovaná pro každé dvě křivky. To se dá velmi snadno obejít uvažováním speciální podmnožiny $\mathbf{Top}(I, X)$.

Definice 1.2.7. Nechť $x_0 \in X$ je libovolný bod. **Prostorem smyček s počátkem v bodě** x_0 myslíme podmnožinu $\Omega(X, x_0) \subseteq \mathbf{Top}(I, X)$ definovanou jako

$$\Omega(X, x_0) = \{f \in \mathbf{Top}(I, X) \mid f(0) = f(1) = x_0\}. \tag{1.22}$$

Jelikož dvě homotopické křivky musí mít stejný počáteční i koncový bod, leží každá třída homotopie celá v $\Omega(X, x_0)$, nebo s ní má prázdný průnik. Následující definice má tedy dobrý smysl.

Definice 1.2.8. Fundamentální grupou $\pi_1(X, x_0)$ **prostoru** X **v bodě** x_0 myslíme množinu tříd homotopie smyček v $\Omega(X, x_0)$, tedy

$$\pi_1(X, x_0) = \{[f] \mid f \in \Omega(X, x_0)\} \equiv \Omega(X, x_0)/\simeq . \tag{1.23}$$

Vidíme, že součin $*$ je nyní poctivá binární operace na prostoru $\pi_1(X, x_0)$. S pomocí Tvrzení 1.2.6) je již důkaz následujícího pozorování triviální.

Tvrzení 1.2.9 (**Fundamentální grupa je grupa**). *Operace $*$ definovaná v Definici 1.2.5 omezená na podmnožinu $\pi_1(X, x_0)$ homotopických tříd smyček s počátkem v bodě x_0 je grupový součin.*

Důkaz. Jediná konstantní smyčka je $e \equiv e_{x_0}$ je podle (1.16) jednotkou grupy. Třída $[f]^{-1} \equiv [f^{-1}]$ tvoří podle (1.17) inverzní prvek. Konečně, podle (1.18) je operace $*$ asociativní. ■

V definici velmi explicitně vystupuje bázový bod x_0. Ukážeme si, pro dva body spojené křivkou se příslušné fundamentální grupy příliš neliší - jsou izomorfní.

Tvrzení 1.2.10. *Nechť x_0 a y_0 jsou dva bodu prostoru X v jedné komponentě lineární souvislosti. Potom existuje isomorfismus grup $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(X, y_0)$.*

Důkaz. Jsou-li x_0 a y_0 v jedné komponentě lineární souvislosti, existuje křivka $h \in \mathbf{Top}(I, X)$, taková že $h(0) = x_0$ a $h(1) = y_0$. Nechť $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Definujeme $\beta_h : \pi_1(X, x_0) \to \pi_2(X, y_0)$ vztahem $\beta_h[f] = [h^{-1}] * [f] * [h]$. Vidíme, že β_h nezávisí na volbě reprezentanta třídy $[f]$. Může však explicitně záviset na třídě homotopie $[h]$ a β_h tedy není izomorfismus kanonický. Dále máme

$$\beta_h[e_{x_0}] = [h^{-1}] * [e_{x_0}] * [h] = [h^{-1}] * [h] = [e_{y_0}], \tag{1.24}$$

kde jsme použili (1.16) a (1.17). Podobně, pro všechny $[f], [g] \in \Omega(X, x_0)$ dostáváme

$$\beta_h([f] * [g]) = [h^{-1}] * [f * g] * [h] = [h^{-1}] * [f] * [h] * [h]^{-1} * [g] * [h] = \beta_h[f] * \beta_h[g]. \tag{1.25}$$

Vidíme, že β_h je homomorfismus grup. Inverzní zobrazení se definuje záměnou rolí h a h^{-1}. ■

Poznámka 1.2.11. V lineárně souvislých prostorech se z důvodu předcházejícího tvrzení často vynechává explicitní zmínka počátečního bodu x_0 a fundamentální grupa (libovolná z nich) se označuje jednoduše jako $\pi_1(X)$. Často se píše $\pi_1(X) = 0$.

Definice 1.2.12. Nechť X je lineárně souvislý topologický prostor. Řekneme, že X je **jednoduše souvislý**, je-li fundamentální grupa $\pi_1(X)$ triviální.

Tvrzení 1.2.13. *Topologický prostor je jednoduše souvislý, existuje-li pro každé dva body $x, y \in X$ právě jedna kohomologická třída $[h]$, taková, že $h(0) = x$ a $h(1) = y$.*

Důkaz. Nechť $x, y \in X$. Je-li X jednoduše souvislý, je lineárně souvislý a tedy existuje spojitá křivka $h \in \mathbf{Top}(I, X)$, taková že $h(0) = x$ a $h(1) = y$. Nechť $h' \in \mathbf{Top}(I, X)$ je jiná taková křivka. Potom ale

$$[h] = [h] * [e_y] = [h] * ([h'^{-1}] * [h']) = ([h] * [h'^{-1}]) * [h'] = [e_x] * [h'] = [h'], \tag{1.26}$$

kde jsme použili $[h] * [h'^{-1}] = [e_x]$ z předpokladu $\pi_1(X) = 0$. Důkaz opačného tvrzení je jednoduchý. Z předpokladu vždy existuje nějaká křivka spojující libovolné dva body a tedy X je lineárně souvislý. Navíc každá smyčka $f \in \Omega(X, x_0)$ spojuje x_0 a x_0. Musí být tedy homotopická konstantní křivce, $[f] = [e_{x_0}]$. Odtud $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$, a tedy $\pi_1(X) = 0$. ■

Příklad 1.2.14 (**Vektorové prostory jsou jednoduše souvislé**)**.** Nechť V je vektorový prostor s běžnou eukleidovskou topologií indukovanou volbou nějaké báze V. Každý vektor $v \in V$ lze spojit přímkou $h(t) = t \cdot v$ s nulovým vektorem $0 \in V$, a tedy V je lineárně souvislý. Stačí spočítat $\pi_1(V, 0)$. Je-li $f \in \Omega(V, 0)$, definujeme homotopii H s konstantní křivkou $e(t) = 0$ vztahem

$$H(t, s) = (1 - s) \cdot f(t). \tag{1.27}$$

Zřejmě $H(t, 0) = f(t)$, $H(t, 1) = e(t) = 0$ a $H(0, s) = H(1, s) = 0$. Tedy $[f] = [e]$ a uzavřeme, že $\pi_1(V) = 0$, tj. V je jednoduše souvislý topologický prostor.

1.3 Fundamentální grupa kružnice

V této sekci si ukážeme nejjednodušší příklad topologického prostoru s netriviální fundamentální grupou. Budeme zkoumat kružnici, označovanou v topologických kruzích jako $\mathbb{S}^1$. Výsledek si vyslovíme jako větu, kterou pak postupně dokážeme.

Věta 1.3.1 (**Fundamentální grupa kružnice**)**.** $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ *je nekonečná cyklická grupa generovaná třídou homotopie smyčky* $\omega \in \Omega(\mathbb{S}^1, (1, 0))$*, kde* $\omega(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Zřejmě $[\omega]^n = [\omega_n]$, kde $\omega_n(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$. Musíme ukázat, že každá smyčka s počátkem v $(1, 0)$ je homotopická ω_n pro unikátní $n \in \mathbb{Z}$.

Základní idea je následující. Definujeme zobrazení $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ vztahem $p(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$. Vizualizace tohoto zobrazení je následovná - $\mathbb{R}$ lze vnořit do $\mathbb{R}^3$ jako **šroubovici** $s \mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), s)$. Potom p je restrikce projekce $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^2$ na tuto šroubovici. Všimneme si, že $\omega_n = p \circ \widetilde{\omega}_n$, kde $\widetilde{\omega}_n \in \mathbf{Top}(I, \mathbb{R})$ je definovaná vztahem $\widetilde{\omega}_n(t) = n \cdot t$. Říkáme, že $\widetilde{\omega}_n$ je **zdvih** smyčky ω_n. Důkaz věty se provede studiem zdvihů *obecných smyček* v $\mathbb{S}^1$. To se opírá o následující obecný koncept.

Definice 1.3.2. Nechť X je topologický prostor. **Nakrytí** X je topologický prostor $\widetilde{X}$ a $p \in \mathbf{Top}(\widetilde{X}, X)$, takové, že pro každý bod $x_0 \in X$ existuje jeho okolí $U \subseteq X$, takové, že $p^{-1}(U)$ je disjunktní sjednocení otevřených podmnožin, kde každou z nich p zobrazuje homeomorfně na U.

Řekneme, že U je **stejnoměrně nakryté**.

Příklad 1.3.3. Zobrazení $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ představené výše definuje nakrytí $\mathbb{S}^1$. Každý otevřený oblouk $U \subset \mathbb{S}^1$ je stejnoměrně nakrytý.

K důkazu Věty 1.3.1 využijeme užitečných vlastností nakrytí.

Tvrzení 1.3.4. *Nechť $p : \widetilde{X} \to X$ je nakrytí. Potom platí*

(i) Pro každou křivku $f \in \mathbf{Top}(I, X)$ s počátkem v bodě $x_0 \in X$ a každé $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existuje unikátní zdvih $\widetilde{f} \in \mathbf{Top}(I, \widetilde{X})$ s počátkem v bodě $\widetilde{x}_0$.

(ii) Je-li H homotopie křivek s počátkem v bodě x_0 (tj. musí nutně fixovat oba koncové body), existuje unikátní homotopie $\widetilde{H}$ příslušných zdvihů s počátkem v bodě $\widetilde{x}_0$.

Než si tvrzení dokážeme, ukažme si, jak z jeho pomocí dokázat Větu 1.3.1.

Důkaz věty 1.3.1. Nechť $f \in \Omega(\mathbb{S}^1, x_0)$ reprezentuje třídu $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$, kde $x_0 = (1, 0)$. Protože $0 \in \pi^{-1}(x_0)$, existuje podle 1.3.4 její unikátní zdvih $\widetilde{f} \in \mathbf{Top}(I, \mathbb{R})$ s počátkem v bodě 0. Tato křivka nutně končí v nějakém celočíselném bodě $n \in \mathbb{Z}$, protože $\widetilde{f}(1) \in \pi^{-1}(f(0)) = \pi^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$. Protože $\widetilde{f}$ a $\widetilde{\omega}_n$ mají stejné koncové body, existuje jejich lineární homotopie

$$\widetilde{H}(t, s) = (1 - s) \cdot \widetilde{f}(t) + s \cdot \widetilde{\omega}_n(t). \tag{1.28}$$

Snadno vidíme, že $H = p \circ \widetilde{H}$ je homotopie (fixující počáteční i koncový bod) smyček ω_n a f, tedy $[f] = [\omega_n]$. Musíme ukázat, že takové $n \in \mathbb{Z}$ je jednoznačně určené $[f]$.

Nechť $[f] \simeq [\omega_n]$ a $[f] \simeq [\omega_m]$. Potom taky $[\omega_m] \simeq [\omega_n]$. Nechť H je příslušná homotopie, tj. $H(t, 0) = \omega_n$ a $H(t, 1) = \omega_m$ (s počátkem v x_0). Podle tvrzení 1.3.4 existuje unikátní homotopie $\widetilde{H}$ zdvihů křivek ω_n a ω_m. To jsou z jednoznačnosti křivky $\widetilde{\omega}_n$ a $\widetilde{\omega}_m$. Ale potom $n = \widetilde{\omega}_n(1) = \widetilde{H}(1, 0) = \widetilde{H}(1, 1) = \widetilde{\omega}_m(1) = m$. ■

Zbývá dokázat Tvrzení 1.3.4. Ukažme si, že obě jeho části plynou z obecnější vlastnosti topologických nakrytí:

Lemma 1.3.5. *Pro každé zobrazení $F \in \mathbf{Top}(Y \times I, X)$ a $\widetilde{F} \in \mathbf{Top}(Y \times \{0\}, \widetilde{X})$, které je zdvihem $F|_{Y \times \{0\}} \in \mathbf{Top}(Y \times \{0\}, X)$, tj. $p \circ \widetilde{F} = F|_{Y \times \{0\}}$, existuje unikátní zdvih celého F, tj. $\widetilde{F} \in \mathbf{Top}(Y \times I, \widetilde{X})$, takové že $p \circ \widetilde{F} = F$.*

Důkaz tvrzení 1.3.4. (i) je speciálním případem Lemma 1.3.5 pro $Y = \{y_0\}$. (ii) je následující aplikaci Lemma 1.3.5 pro $Y = I$. Nechť $H : I \times I \to X$ je homotopie dvou křivek $f_0 = H(\cdot, 0)$ a $f_1 = H(\cdot, 1)$ s pevnými konci $x_0 = H(0, s)$ a $x_1 = H(1, s)$. Zobrazení $H|_{I \times \{0\}} = f_0$ má podle Tvrzení 1.3.4 a již dokázaného (i) unikátní zdvih $\widetilde{H} \in \mathbf{Top}(I \times \{0\}, \widetilde{X})$, takový že $\widetilde{H}(0, 0) = \widetilde{x}_0$. Podle Lemma 1.3.5 nyní existuje *jednoznačný zdvih* $\widetilde{H} \in \mathbf{Top}(I \times I, \widetilde{X})$, takový, že $p \circ \widetilde{H} = H$. Musíme ověřit, že $\widetilde{H}$ je křivková homotopie zdvihů $\widetilde{f}_0$ a $\widetilde{f}_1$ s počátkem v $\widetilde{x}_0$.

Z konstrukce $p \circ \widetilde{H}(t, 0) = H(t, 0) = f_0(t)$ a $\widetilde{H}(0, 0) = \widetilde{x}_0$. Z jednoznačnosti v Tvrzení 1.3.4 (i) musí tedy být $\widetilde{H}(t, 0) = \widetilde{f}_0(t)$.

Musíme ukázat, že křivky $\widetilde{H}(0, s)$ a $\widetilde{H}(1, s)$ jsou konstantní v s (tj. $\widetilde{H}$ je homotopie křivek). Ale $p \circ \widetilde{H}(0, s) = H(0, s) \equiv x_0$ a $s \mapsto \widetilde{H}(0, s)$ je tedy zdvih konstantní křivky s počátkem v bodě $\widetilde{H}(0, 0) = \widetilde{x}_0$. Ale konstantní křivka $e_{\widetilde{x}_0}$ je zdvih do stejného bodu a tedy $\widetilde{H}(0, s) = e_{\widetilde{x}_0}(s) \equiv \widetilde{x}_0$. Podobně se dokáže, že $\widetilde{H}(1, s) \equiv \widetilde{H}(1, 0) = \widetilde{f}_0(1)$.

Konečně, $p \circ \widetilde{H}(t, 1) = H(t, 1) = f_1(t)$ a $\widetilde{H}(0, 1) = \widetilde{H}(0, 0) = \widetilde{x}_0$, tj. $\widetilde{H}(t, 1)$ je zdvihem křivky f_1 s počátkem v $\widetilde{x}_0$. Z jednoznačnosti $\widetilde{H}(t, 1) = \widetilde{f}_1$ a $\widetilde{H}$ je tedy homotopie (křivková) obou příslušných zdvihů $\widetilde{f}_0$ a $\widetilde{f}_1$. ■

Zbývá tedy dokázat Lemma 1.3.5. Tento důkaz je přehlídkou typických topologických argumentů a proto si ho pořádně uděláme.

Důkaz Lemma 1.3.5. Nechť $y_0 \in Y$ je fixní. Nejprve sestrojíme zdvih $\widetilde{F} : N \times I \to \widetilde{X}$ pro nějaké okolí $N \ni y_0$. Pro každé $t \in I$ můžeme najít součinové okolí $N_t \times [a_t, b_t] \subset N \times I$ bodu (y_0, t), takové, že $F(N_t \times [a_t, b_t])$ je nějakém rovnoměrně nakrytém okolí U bodu $F(y_0, t)$.

Systém okolí $N_t \times [a_t, b_t]$ tedy tvoří pokrytí kompaktní množiny $\{y_0\} \times I$. Můžeme tedy vybrat rozdělení $0 = t_0 < \cdots < t_m = 1$ a okolí $N \ni y_0$, že celý obraz $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ je je obsažený v nějakém rovnoměrně nakrytém okolí $U_i \subseteq X$, a to pro každé $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Pro indukci předpokládejme, že již máme $\widetilde{F}$ definované na množině $N \times [0, t_i]$ pro *nějaké* okolí N bodu y_0, přičemž nultý krok indukce odpovídá zadanému $\widetilde{F} : N \times \{0\} \to \widetilde{X}$.

Z konstrukce je $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$. Existuje tedy otevřená množina $\widetilde{U}_i \subseteq \widetilde{X}$, kterou p zobrazuje homeomorfně na U_i a obsahuje bod $\widetilde{F}(y_0, t_i)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\widetilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \widetilde{U}_i$, protože si místo N můžeme vzít libovolné menší okolí $N' = (N \times \{t_i\}) \cap \widetilde{F}^{-1}(\widetilde{U}_i)$. Pro $(y, t) \in N \times [t_i, t_{i+1}]$ můžeme definovat

$$\widetilde{F}(y, t) = (p^{-1} \circ F)(y, t). \tag{1.29}$$

Zjevně $p \circ \widetilde{F}(y, t) = F(y, t)$ a $\widetilde{F}$ je spojité. Podle indukčního předpokladu dostáváme $\widetilde{F} \in N \times [0, t_{i+1}]$. Po konečném počtu kroků dostáváme spojitý zdvih $\widetilde{F} : N \times I \to \widetilde{X}$.

Nyní ukážeme unikátnost zdvihu v Lemma 1.3.5 pro speciální případ $Y = \{y_0\}$. Potlačíme explicitní notaci jednobodové množiny. Máme tedy zadanou křivku $F \in \mathbf{Top}(I, X)$ a spojité zobrazení $\widetilde{F} \in \mathbf{Top}(\{0\}, \widetilde{X})$ zdvihající $F|_{\{0\}}$, tj. zvolený bod $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, kde $x_0 = F(0)$. Předpokládejme, že máme dva zdvihy $\widetilde{F}, \widetilde{F}' : \mathbf{Top}(I, \widetilde{X})$, takové, že $\widetilde{F}(0) = \widetilde{F}'(0) = \widetilde{x}_0$. Opět můžeme najít rozdělení $0 = t_0 < \cdots < t_m = 1$, takové, že $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ pro nějaké rovnoměrně nakryté *souvislé* okolí $U_i \subseteq X$. Pro indukci předpokládejme, že již víme $\widetilde{F}|_{[0,t_i]} = \widetilde{F}'|_{[0,t_i]}$. Protože $[t_i, t_{i+1}]$ je souvislá množina, musí být i $\widetilde{F}([t_i, t_{i+1}])$. Musí tedy ležet celá v jedné z otevřených množin $\widetilde{U}_i \subseteq \widetilde{X}$, která je homeomorfní U_i. Protože $\widetilde{F}(t_i) = \widetilde{F}'(t_i)$, musí být i $\widetilde{F}'([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \widetilde{U}_i$. Ale $p|_{\widetilde{U}_i}$ je homeomorfismus a tedy $p \circ \widetilde{F} = p' \circ \widetilde{F}$ na $[t_i, t_{i+1}]$ implikuje $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ na $[t_i, t_{i+1}]$. A tedy $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ na $[0, t_{i+1}]$.

Konečně, máme-li zdvih $\widetilde{F}$ definovaný na $N \times I$ a $\widetilde{F}'$ definovaný na $N' \times I$, máme pro každé $y \in N \cap N'$ jejich restrikcí i dva zdvihy $F|_{\{y\} \times I}$ na $\{y\} \times I$. Podle předchozího odstavce $\widetilde{F}$ a $\widetilde{F}'$ musí být stejné na $\{y\} \times Y$, a tedy i na celém průniku. Dostáváme tedy zdvih $\widetilde{F} : Y \times I \to \widetilde{X}$. Protože každé dva takové splývají na $\{y\} \times I$ pro každé $y \in Y$, je $\widetilde{F}$ podle předchozího odstavce unikátní. ∎

Poznámka 1.3.6. Snadno vidíme, že $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$, kde izomorfismus je definovaný jako (jednoznačné) rozšíření $[\omega] \mapsto 1 \in \mathbb{Z}$. Často se tedy setkáme se značením $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Věta 1.3.7 (Základní věta algebry). *Každý nekonstantní polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.*

Důkaz. Stačí uvažovat polynom p ve tvaru $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Předpokládejme, že $p(z) \neq 0$ pro všechny $z \in \mathbb{C}$. Pro každé $r \geq 0$ můžeme sestrojit smyčku

$$f_r(t) = \frac{p(re^{2\pi it})/p(r)}{|p(re^{2\pi it})/p(r)|}, \tag{1.30}$$

která leží na jednotkové kružnici $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ a má počátek v bodě $1 \in \mathbb{C}$. Spojitou změnou parametru r můžeme přejít ke konstantní křivce $f_0(t) \equiv 1$. To ale znamená, že pro každé $r \geq 0$ je $[f_r] = [e] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Nyní zafixujme r, tak aby $r > \max\{|a_1| + \cdots + |a_n|, 1\}$. Pro libovolné $z \in \mathbb{C}$, takové, že $|z| = |r|$ nyní platí nerovnost $|z^n| = |z||z|^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|)|z|^{n-1} > |a_1 z^{n-1}| + \cdots + |a_n| \geq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$. To ale znamená, že polynom $p_s(z) = z^n + s(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ nemá žádné kořeny na kružnici $|z| = r$ pro žádné $s \in [0, 1]$. To by totiž implikovalo, že obě komplexní čísla tvořící $p_s(z)$ mají stejný modul: $|z|^n = s|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n| \leq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$, což je v rozporu s předchozí nerovností.

Záměnou p za p_s v (1.30) dostáváme pro (fixní a dost velké) r a každé $s \in [0, 1]$ smyčku $f_r^s(t)$, přičemž $f_r^1(t) = f_r(t)$ a $f_r^0(t) = e^{2\pi nt} = \omega_n(t)$. Zjevně $H(t, s) = f_r^s(t)$ je homotopie smyček f_r a ω_n, což dokazuje, že $[f_r] = [\omega_n] = [\omega]^n$. Dostáváme tedy rovnost $[\omega]^n = [e]$, což nastává pouze pro $n = 0$, což odpovídá konstantnímu polynomu p. ■

Věta 1.3.8 (**Brouwerova věta o pevném bodě v dimenzi** 2)**.** *Nechť $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřený jednotkový disk, t.j. $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Potom pro každé $h \in \mathbf{Top}(D^2, D^2)$ existuje $x_0 \in D^2$, takové, že $h(x_0) = x_0$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $h(x) \neq x$ pro všechny $x \in D^2$. Můžeme tedy definovat spojité zobrazení $r \in \mathbf{Top}(D^2, \mathbb{S}^1)$ tak, že každému bodu $x \in D^2$ přiřadíme bod $r(x) \in \mathbb{S}^1 = \partial D^2$ kde polopřímka (dobře definovaná) z bodu $h(x)$ skrz x protíná hranici kruhu. Spojitost r je intuitivně zřejmá (změníme-li o kousek x, změní se o kousek $h(x)$ a tedy i polopřímka a její průnik s hranicí). Z definice rovněž $r(x) = x$ pro $x \in \mathbb{S}^1$.

To dokazuje, že $r : D^2 \to \mathbb{S}^1$ je **retrakce** D^2 na $\mathbb{S}^1$. Ukážeme si, že taková retrakce nemůže existovat. Nechť $f_0 \in \Omega(\mathbb{S}^1, x_0)$ je libovolná smyčka v $\mathbb{S}^1$. Zároveň f_0 je smyčka která je v D^2 homotopická konstantní křivce, kde $H(t, s) = (1 - s) \cdot f_0(t) + s \cdot x_0$. Potom ale $H' = r \circ H$ je homotopie v $\mathbb{S}^1$ křivky $r \circ f_0 = f_0$ a konstantní křivky v x_0. To je ale ve sporu s $\pi_1(\mathbb{S}^1) \neq 0$. ■

1.4 Indukovaná zobrazení a homotopická ekvivalence

Koncept fundamentální grupy jsme od začátku zamýšleli jako topologický invariant. Je tedy třeba ověřit, že tomu tak skutečně je.

Tvrzení 1.4.1. *Nechť $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ je spojité zobrazení. Potom předpisem*

$$\varphi_*[f] = [\varphi \circ f] \tag{1.31}$$

pro všechny $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ definujeme homomorfismus grup $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$. Pokud $\psi \in \mathbf{Top}(Y, Z)$, platí pravidla

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*, \quad \mathbf{1}_* = \mathbf{1}. \tag{1.32}$$

Zejména je-li φ homeomorfismus, je φ_* izomorfismus fundamentálních grup.

Důkaz. Nejprve musíme ukázat, že φ_* je dobře definované. Je-li $[f] = [f']$ a H je příslušná homotopie, zjevně $H' = \varphi \circ H$ je homotopie smyček $\varphi \circ f$ a $\varphi \circ f'$. Evidentně $\varphi_*([e]) = [e]$ a z definice napojení křivek rovněž snadno

$$\varphi_*[f * g] = [\varphi \circ (f * g)] = [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] = \varphi_*[f] * \varphi_*[g]. \tag{1.33}$$

To dokazuje, že φ_* je grupový homomorfismus. Důkaz kompozičních pravidel je zřejmý, stejně jako tvrzení o izomorfismu. ■

Poznámka 1.4.2. Rozhodně neplatí opačné tvrzení. Jsou-li X a Y jednoduše souvislé, můžeme vzít libovolné konstantní zobrazení $\varphi(x) = y_0$ pro všechny $x \in X$. Zjevně φ_* je izomorfismus (triviálních) fundamentálních grup $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$, ale ne každé jednoduše souvislé topologické prostory jsou homeomorfní.

Toto tvrzení můžeme použít v důkazu následující věty, která ukazuje, že $\mathbb{S}^0$ a $\mathbb{S}^1$ jsou jedinými příklady n-rozměrných sfér, které nejsou jednoduše souvislé.

Věta 1.4.3 (**Vícerozměrné sféry jsou jednoduše souvislé**). *Pro každé $n \geq 2$ je $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$.*

Důkaz se opírá o následující dvě obecné lemma:

Lemma 1.4.4. *Pro libovolné dva topologické prostory je $\pi_1(X \times Y)$ je izomorfní $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ kdykoliv jsou X a Y křivkově souvislé.*

Důkaz. Produktová topologie na $X \times Y$ je plně charakterizovaná vlastností, že $f : Z \to X \times Y$ je spojité, právě tehdy když zobrazení $g : Z \to X$ a $h : Z \to Y$ definovaná vztahem $f(z) = (g(z), h(z))$ jsou obě spojitá. Každá smyčka $f \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$ je tedy ekvivalentní dvojici smyček $g \in \Omega(X, x_0)$ a $h \in \Omega(Y, y_0)$. Ze stejného důvodu je homotopie $H \in \mathbf{Top}(I \times I, X \times Y)$ ekvivalentní zadání dvojice homotopií v X a Y. Dostáváme tedy bijekci

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \approx \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \tag{1.34}$$

o které se snadno dokáže, že jde o grupový isomorfismus. Křivkovou souvislost předpokládáme čistě abychom nemuseli psát body ve kterých π_1 počítáme. ■

Lemma 1.4.5. *Nechť X je sjednocení kolekce otevřených podmnožin A_α, kde každá z nich obsahuje x_0 a každý průnik $A_\alpha \cap A_\beta$ je křivkově souvislý.*

Potom každá smyčka v $\Omega(X, x_0)$ je homotopická součinu smyček, kde každá z nich je celá obsažená v nějakém A_α.

Důkaz. Nechť $f \in \Omega^1(X, x_0)$ je daná smyčka. Protože f je spojité, pro každé $t \in I$ existuje okolí $V_t \subseteq I$, takové, že $f(V_t) \subseteq A_\alpha$. Můžeme V_t vybrat jako otevřený interval, jehož uzávěr se zobrazí celý do A_α. Z kompaktnosti můžu vybrat konečné podpokrytí těmito intervaly. Dostáváme tedy rozdělení $0 = t_0 < \cdots < t_m = 1$, takové, že $f([t_i, t_{i+1}]) \subseteq A_{\alpha_i}$ pro každé $i \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Označme f_i restrikci f na $[t_i, t_{i+1}]$ reparametrizovanou tak, aby šlo o zobrazení z I. Potom $f = f_0 * f_1 \cdots * f_m$, a $f_i \in \mathbf{Top}(I, A_{\alpha_i})$. Protože $A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_{i+1}}$ je křivkově souvislé, existuje křivka $g_i \in \mathbf{Top}(I, A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_{i+1}})$ spojující x_0 a bod $f(t_i) \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_{i+1}}$. pro každé $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Potom můžeme psát třídu $[f]$ jako kompozici

$$[f] = [f_0 * g_1^{-1}] * [g_1 * f_2 * g_2^{-1}] * \ldots [g_{m-1} * f_n]. \tag{1.35}$$

A lemma je dokázáno. ■

Důkaz věty 1.4.3. Můžeme psát $\mathbb{S}^n = A_1 \cup A_2$, kde A_1 je například $\mathbb{S}^n$ bez „severního pólu“ $(1, 0, \ldots, 0)$ a A_2 je $\mathbb{S}^n$ bez „jižního pólu“ $(-1, 0, \ldots, 0)$. Pomocí stereografické projekce snadno vidíme, že $A_1, A_2 \approx \mathbb{R}^n$. Každý bod $A_1 \cap A_2$ můžeme zobrazit na „rovník“ $\mathbb{S}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = 0\} \approx \mathbb{S}^{n-1}$, a poznamenat si jeho souřadnici $x^1 \in (-1, 1)$. A tedy $A_1 \cap A_2 \approx \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Pro $n \geq 2$ je prostor $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ křivkově souvislý (protože $\mathbb{S}^{n-1}$ i $\mathbb{R}$ jsou). Můžeme tedy použít předchozí lemma. Nechť $x_0 \in A_1 \cap A_2$. Potom každou $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$ můžeme psát jako $[f] = [f_0] * [f_1] \cdots * [f_m]$, kde $f_i \in \Omega(A_{1,2}, x_0)$. Oba prostory A_1 i A_2 jsou jednoduše souvislé a tedy $[f_i] = [e]$ pro každé $i \in \{0, \ldots, m\}$. Máme tedy $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = 0$. To dokazuje, že $\mathbb{S}^n$ je jednoduše souvislá množina. ■

Důsledek 1.4.6. *Prostory $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^n$ jsou homeomorfní pouze pro $n = 2$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ je homeomorfismus. Pro libovolný bod $x \in \mathbb{R}^2$ je potom i jeho restrikce $f' \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}, \mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\})$ homeomorfismus. Máme také homeomorfismus

$$\mathbb{R}^n \setminus \{y\} \approx \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, \tag{1.36}$$

pro každé $y \in \mathbb{R}^n$, který lze snadno ukázat například volbou vícerozměrných sférických souřadnic s počátkem v bodě y. f' tedy indukuje homeomorfismus $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Pro $n = 1$ dostáváme spor, protože $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}$ není křivkově souvislá množina a $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ je. Pro $n > 2$ dostáváme spor, protože $\pi_1(\mathbb{S} \times \mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{S}) \times \pi_1(\mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}$ a zároveň $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$. ■

Tvrzení 1.4.1 má spoustu aplikací. Hodí se zejména při porovnávání fundamentálních grup prostorů, kde jeden je retrakcí druhého.

Tvrzení 1.4.7. *Nechť $r \in \mathbf{Top}(X, A)$ je retrakce, $A \subseteq X$. Potom inkluze $i \in \mathbf{Top}(A, X)$ indukuje monomorfismus $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ pro všechny $x_0 \in A$. Je-li r deformační retrakt, je zobrazení i_* izomorfismus.*

Důkaz. Definice retrakce je ekvivalentní identitě $r \circ i = \mathbf{1}_A$. Dle Tvrzení 1.4.1 máme tedy $r_* \circ i_* = \mathbf{1}$. To ale může nastat jen v případě, že je i_* monomorfismus. Je-li r deformační retrakt, máme $r_t \in \mathbf{Top}(X, X)$, kde $r_0 = 1_X$, $r_1 = r$ a $r_t(a) = a$ pro všechny $a \in A$. Nechť $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Potom ale $H(t, s) = (r_s \circ f)(t)$ zadává homotopii a $[f] = [r \circ f]$. Ale $r \circ f \in \Omega(A, x_0)$ a můžeme tedy psát $[f] = [i \circ r \circ f] = i_*[r \circ f]$. To dokazuje, že i_* je surjektivní. ■

Nyní si vyslovíme větu zásadní pro aplikace a explicitní výpočet fundamentální grupy.

Věta 1.4.8. *Nechť X a Y jsou libovolné topologické prostory a $\varphi : X \to Y$ je homotopická ekvivalence. Potom $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ je izomorfismus.*

Teorém je jednoduchým důsledkem následujícího tvrzení:

Lemma 1.4.9. *Nechť $H : X \times I \to Y$ je homotopie zobrazení $\mu_0 = H(\cdot, 0)$ a $\mu_1 = H(\cdot, 1)$. Definujme křivku $h \in \mathbf{Top}(I, Y)$ jako obrazy bodu x_0 homotopií H, t.j. $h(t) = H(x_0, t)$. Potom následující diagram je komutativní:*

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mu_{1*}} & \pi_1(Y, \mu_1(x_0)) \\ \pi_1(X, x_0) & & \downarrow \beta_h \\ & \xrightarrow{\mu_{0*}} & \pi_1(Y, \mu_0(x_0)), \end{array} \tag{1.37}$$

kde β_h je izomorfismus generovaný křivkou h.

Důkaz. Připomeňme, že β_h je definovaný jako $\beta_h[g] = [h]^{-1} * [g] * [h]$ pro všechny $[g] \in \pi_1(Y, \mu_1(x_0))$. Nechť $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Máme tedy ukázat, že $\mu_{0*}[f] = (\beta_h \circ \mu_{1*})[f]$. Explicitně

$$[\mu_0 \circ f] = [h^{-1} * (\mu_1 \circ f) * h] \tag{1.38}$$

Sestrojíme třídu křivek $h_s(t) = h(st)$, tj. $h_0(t) \equiv h(0) = \mu_0(x_0)$ a $h_1(t) = h(t)$. Definujeme

$$\widetilde{H}(t, s) = (h_s^{-1} * (\mu_s \circ f) * h_s)(t), \tag{1.39}$$

kde $\mu_s = H(\cdot, s)$. Nejprve si člověk musí rozmyslet, že má kompozice smysl. $h_s(1) = h(s) = \mu_s(x_0)$. To je ale přesně bod, kde má počátek smyčka $\mu_s \circ f$. Máme $\widetilde{H}(t, 0) = \mu_0 \circ f$, $\widetilde{H}(t, 1) = h^{-1} * (\mu_1 \circ f) * h$ a konečně $\widetilde{H}(0, s) = \widetilde{H}(1, s) \equiv \mu_0(x_0)$. $\widetilde{H}$ je tedy homotopie smyček $\mu_0 \circ f$ a $h^{-1} * (\mu_1 \circ f) * h$, což bylo dokázati. ■

Důkaz věty 1.4.8. Nechť $\psi \in \mathbf{Top}(Y, X)$ je homotopická inverze φ, tj $\psi \circ \varphi \simeq \mathbf{1}_X$ a $\varphi \circ \psi \simeq \mathbf{1}_Y$. Uvažujme následující posloupnost homomorfismů:

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0))) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x_0)))) \tag{1.40}$$

Nejprve aplikujeme předchozí lemma na homotopii spojitých zobrazení $\psi \circ \varphi$ a $\mathbf{1}_X$ která existuje z předpokladu. Máme tedy $\mu_0 = \psi \circ \varphi$, $\mu_1 = \mathbf{1}_X$ a izomorfismus $\beta_h : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0))$, takový že $\psi_* \circ \varphi_* = \mu_{0*} = \beta_h \circ \mu_{1*} = \beta_{h*}$. Odtud vidíme, že $\psi_* \circ \varphi_*$ je izomorfismus. To dokazuje, že φ_* je injektivní zobrazení.

Nyní aplikujeme předchozí lemma obdobně na homotopii $\varphi \circ \psi$ a $\mathbf{1}_Y$ abychom dokázali, že $\varphi_* \circ \psi_*$ je isomorfismus a tedy ψ_* v posloupnosti nahoře musí být injektivní. Jelikož $\psi_* \circ \varphi_*$ je isomorfismus, musí být φ_* také surjektivní. Vskutku, pro každé $[g] \in \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ existuje právě jedno $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ takové, že $\psi_*(\varphi_*[f]) = \psi_*[g]$ a z injektivity ψ_* tedy $[g] = \varphi_*[f]$. ■

Poznámka 1.4.10. Všimněte si, že homotopická inverze φ nemusí nutně generovat grupovou inverzi φ_*, t.j. neplatí $\psi_* \circ \varphi_* = \mathbf{1}$.

1.5 Jazyk kategorií

V algebraické topologii se velmi často objevují přiřazení algebraických objektů každému topologickému prostoru. Například každé dvojici (X, x_0), kde X je topologický prostor a $x_0 \in X$ přiřazujeme fundamentální grupu $\pi_1(X, x_0)$ a to způsobem, který v jistém smyslu respektuje zobrazení mezi různými topologickými prostory.

Tento „jistý smysl“ bývá velmi podobný napříč celým oborem, je proto výhodné nalézt obecný rámec do kterého tato „přiřazení“ přirozeně zapadají. Ukazuje se, že odpovědí je tzv. **teorie kategorií**. Nyní si ukážeme její naprosto elementární základy. Nejprve si musíme vysvětlit, co kategorie je a uvést si některé příklady.

(C1) Základem každé **kategorie C** je třída jejích **objektů** $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Třídou se myslí abstraktní pojem z teorie množin, nahrazující problematický pojem „množina“ (viz. Russellův paradox). Například pro $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ je $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ třída všech množin.

Často se zjednodušuje notace a píše se $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$.

(C2) Pro každé dva objekty $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ existuje třída **morfismů** $\mathbf{C}(a, b)$. Tohle už obvykle bývá obyčejná množina. Například, pro každé $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ je $\mathbf{Set}(A, B)$ množina všech zobrazení $f : A \to B$.

(C3) Pro každé tři objekty $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ existuje operace **skládání** $*$, zobrazení $* : \mathbf{C}(a, b) \times \mathbf{C}(b, c) \to \mathbf{C}(a, c)$. Obvykle se značí $*(f, g) \equiv g * f$.

(C4) Pro každý objekt $a \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ existuje význačný morfismus $1_a \in \mathbf{C}(a, a)$, kterému se říká **identita v** a.

(C5) Naloží se několik axiomů, které zajistí, že operace skládání je asociativní operace, a identity fungují jako identity.

Poznámka 1.5.1. Úplně stejným argumentem jako v teorii grup se ukáže, že pro dané $a \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ je právě jedna identita 1_a.

Příklad 1.5.2. Nejdůležitějším příkladem kategorie pro algebraickou topologii je $\mathbf{Top}_*$, **kategorie topologických prostorů s význačným bodem**.

Objekty $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}_*)$ jsou dvojice (X, x_0), kde X je topologický prostor a $x_0 \in X$ jeho význačný bod. Pro každé (X, x_0) a (Y, y_0) definujeme množinu morfismů jako

$$\mathbf{Top}_*((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f \in \mathbf{Top}(X, Y) \mid f(x_0) = y_0\}, \tag{1.41}$$

tj. všechna spojitá zobrazení zachovávající význačný bod. Operace $*$ je se zavede jako opravdové skládání spojitých zobrazení.

Příklad 1.5.3. Kategorií grup Grp myslíme kategorii, jejímiž objekty je třída všech grup a morfismy jsou grupové homomorfismy.

Příklad 1.5.4. Každý graf $G = (V, E)$ definuje kategorii $\mathbf{C}$. Vezmu $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) = V$. A pro každé $v, w \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ definujeme $\mathbf{C}(v, v')$ jako množinu všech hranových cest z v do v'. Potom $\mathbf{C}(v, v)$ jsou přesně cykly v grafu G a jednotkovým prvkem je triviální cyklus (prázdná hranová cesta). Skládání je napojování hranových cest.

Příklad 1.5.5. V obecné kategorii nemusí existovat „inverzní šipka“. Pokud pro každý morfismus $f \in \mathbf{C}(a, b)$ existuje $f^{-1} \in \mathbf{C}(b, a)$, takový, že $f * f^{-1} = 1_b$ a $f^{-1} * f = 1_a$, nazveme tuto kategorii **grupoidem**.

V této kapitole jsme ve zkonstruovali **fundamentální grupoid** $\Pi_1(X)$ **prostoru** X, kde $\mathrm{Ob}(\Pi_1(X)) = X$ a pro každou dvojici $x, y \in X$ máme

$$\Pi_1(X)(x, y) = \{[f] \mid f \in \mathbf{Top}(I, X),\ f(0) = x,\ f(1) = y\}. \tag{1.42}$$

Skládání je indukované napojováním křivek, identity jsou třídy konstantních smyček. Zřejmě máme $\Pi_1(X)(x, x) \equiv \pi_1(X, x)$ pro všechny $x \in X$.

My se však na fundamentální grupu podíváme ještě zcela jiným způsobem.

Definice 1.5.6. Nechť $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ jsou dvě kategorie. **Funktor** $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ je následující kombinace:

(i) Zobrazení na objektech, tj. přiřazení $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \ni a \mapsto F(a) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$.

(ii) Zobrazení na morfismech, pro každé $f \in \mathbf{C}(a, b)$ máme morfismus $f_* \in \mathbf{D}(F(a), F(b))$.

(iii) Zobrazení na morfismech respektuje skládání v obou kategoriích, t.j. platí

$$(g * f)_* = g_* * f_*, \;\; (1_a)_* = 1_{F(a)} \tag{1.43}$$

pro všechny $f \in \mathbf{C}(a, b)$, $g \in \mathbf{C}(b, c)$ a všechny objekty $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Příklad 1.5.7. Nechť $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$ a $\mathbf{D} = \mathbf{Set}$. Každý topologický prostor je množina a spojité zobrazení je zobrazení množin. Na toto se můžeme dívat jako na funktor $\square : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, kterému se říká **zapomnětlivý funktor**.

Tvrzení 1.5.8. *Fundamentální grupu lze interpretovat jako funktor z* $\mathbf{Top}_*$ *do* $\mathbf{Grp}$.

Důkaz. Pro každý objekt $(X, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}_*)$ definujeme $F(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Grp})$. Nechť $\varphi \in \mathbf{Top}_*((X, x_0), (Y, y_0))$. Potom definujeme $\varphi_* \in \mathbf{Grp}(F(X, x_0), F(Y, y_0))$ přesně jako v Tvrzení 1.4.1. Z (1.32) plyne, že jsme právě definovali funktor. ■

Kapitola 2

Homologie

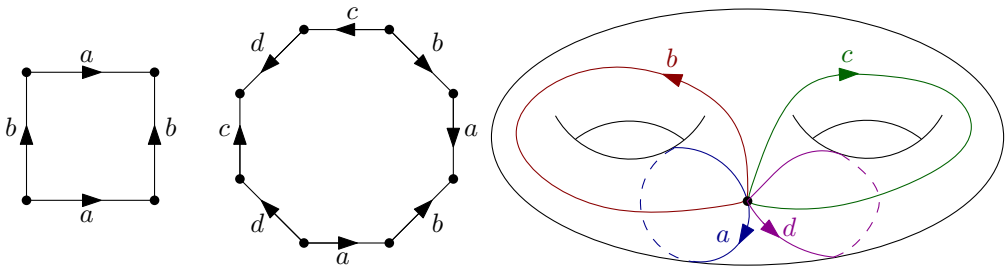
Fundamentální grupa je užitečným nástrojem. Ve své podstatě však používá pouze 1-rozměrné objekty - spojité smyčky. Intuitivně tak tušíme, že není vhodná k analýze „vícerozměrných“ topologických prostorů. Již jsme například ukázali, že pro $n \geq 2$ je $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$, a tedy navzájem nerozlišíme vícerozměrné sféry. Ze stejného důvodu nerozeznáme (jako topologické prostory) vektorové prostory různé dimenze.

Ideu fundamentální grupy lze snadno rozšířit - prostor smyček můžeme ztotožnit s prostorem $\mathbf{Top}_*((\mathbb{S}^1, *), (X, x_0))$, a definujeme $\pi_1(X, x_0)$ jako homotopické třídy těchto zobrazení. **Vyšší homotopické grupy** $\pi_n(X, x_0)$ lze pak definovat jako třídy homotopie zobrazení v $\mathbf{Top}_*((\mathbb{S}^n, *), (X, x_0))$. Problémem je jejich skutečný výpočet. Například $\pi_s(S^n)$ se obecně zná jen pro $s \leq n$, pro $s > n$ existují jen tabulky pro speciální případy, obecná formulka neexistuje.

Je proto důležité vyrobit výpočetně jednodušší způsoby. V této kapitole si představíme metodu která využívá toho, že velkou třídu známých topologických prostorů lze „slepit“ z konečně mnoha elementárních objektů jako jsou úsečky, trojúhelníky, čtyřstěny, atd... Způsob jakým jsou slepeny lze zachytit algebraicky, pomocí tzv. homologických grup.

2.1 Celulární komplexy

Anglicky „cell complexes“, též CW komplexy. Nejprve si ukažme jednoduchý příklad konstrukce toru $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Ten lze psát jako čtverec, ve kterém identifikujeme hrany:



Podobně, jak vidno na druhém obrázku, můžeme zapsat „nafouknutou ležatou osmičku“ jako osmiúhelník, kde slepíme hrany podle obrázku. Obecně lze libovolnou orientovanou plochu genusu

g psát jako jako pravidelný $4g$-úhelník, jehož hrany (po identifikaci) tvoří $2g$ kružnic protínajícím se v jednom jediném bodě (všechny tlusté tečky na obrázcích).

Na celý proces se díváme následovně - vezmeme dvourozměrný otevřený disk, neboli 2**-celu** a přilepíme ho hranicí (tj. kružnicí) k sjednocení $2g$ kružnic protínajících se v jednom bodě. Každá z těchto kružnic je otevřený interval, neboli 1**-cela**, který se svojí hranicí (2 koncové body) přilepí k jednomu bodu, neboli 0**-cele**. Orientovanou plochu s genusem g tedy můžeme vyrobit induktivním procesem - k 0-celám přilepím 1-cely, k tomu nakonec přidělám 2-celu. Tento postup můžeme vzít jako základ následující definice.

Definice 2.1.1. Uvažujme následující induktivní sekvenci kroků:

(1) Začneme s diskrétní množinou X^0, jejíž body považujeme za 0**-cely**;

(2) Vyrobíme takzvanou n**-kostru** X^n z X^{n-1} přilepením množiny n**-cel** e^n_α pomocí spojitých zobrazení $\varphi_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$. Přesněji, X^n je faktorprostor disjunktního sjednocení

$$X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha \tag{2.1}$$

množiny X^{n-1} s kolekcí n-rozměrných disků D^n_α, kde každé $x \in \partial D^n_\alpha \cong \mathbb{S}^{n-1}$ identifikujeme s $\varphi_\alpha(x) \in X^{n-1}$, t.j. $x \sim \varphi_\alpha(x)$. Množinově tedy

$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_\alpha e^n_\alpha, \tag{2.2}$$

kde každá n-cela e^n_α je otevřený n-rozměrný disk, na který se faktor-zobrazením homeomorfně zobrazí $D^n_\alpha \setminus \partial D^n_\alpha$.

(3) Definujeme $X = \bigcup_{n=0}^\infty X^n$, kde X je vybaveno tzv. „slabou topologií“, kde $A \subset X$ je otevřená (resp. uzavřená), je-li $A \cap X^n$ otevřená (resp. uzavřená) v X^n pro každé $n \geq 0$.

Takto zkonstruovaný topologický prostor X se nazývá **celulární komplex (nebo také CW komplex)**. Je-li $X = X^n$ pro nějaké $n \geq 0$, řekneme, že X je **konečněrozměrný** a nejmenší takové n je jeho **dimenze**.

Příklad 2.1.2. Vezměme $X^0 = \{e^0\}$ tvořený jedním bodem, tj. máme právě jednu 0-celu. Poté nebudeme mít žádné n-cely pro $1 \leq n \leq k-1$, tj. $X^{k-1} = X^{k-1} = \cdots = X^0$. Budeme uvažovat právě jednu k-celu e^k, a příslušné zobrazení $\varphi : \mathbb{S}^{k-1} \to X^{k-1} = \{e^0\}$ musí být logicky konstantní zobrazení $\varphi(x) = e^0$ pro všechny $x \in \mathbb{S}^{k-1}$. Tedy

$$X^k = (\{e^0\} \sqcup D^k)/\sim, \tag{2.3}$$

kde ztotožníme ∂D^k s bodem e^0. Snadno nahlédneme, že $X^k = e^1 \cong \mathbb{S}^k$, a to včetně topologie. Další cely nepřidáváme a tedy $X = X^k = \mathbb{S}^k$. Vidíme, že vícerozměrné sféry lze psát jako celulární komplexy.

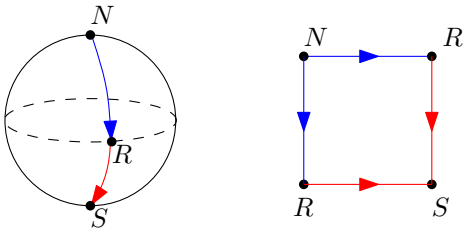
Příklad 2.1.3. Uvažujme topologický prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, prostor přímek skrz počátek v $\mathbb{R}^{n+1}$. Topologicky se zavede jako faktorprostor $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ relací ekvivalence $\lambda \cdot x \sim x$ pro nějaké nenulové $\lambda \in \mathbb{R}$, nebo zcela ekvivalentně jako faktorprostor $\mathbb{S}^n$ identifikací antipodálních bodů x a $-x$ pro každé $x \in \mathbb{S}^n$.

To je ale totéž jak uvažovat pouze (uzavřenou) horní hemisféru $\mathbb{S}^n_+ = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x^1 \geq 0\}$, která homeomorfní disku D^n (třeba pomocí stereografických souřadnic), kde body na rovníku

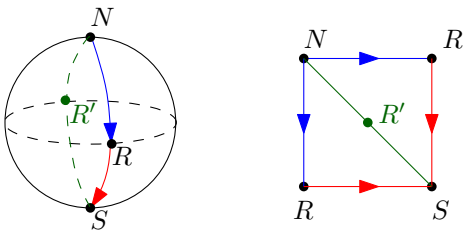
$\partial S^n_+ \cong \mathbb{S}^{n-1}$ jsou antipodálně identifikovány. Ale $\mathbb{S}^{n-1}$ s antipodální identifikací je právě prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Projektivní prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ tedy vyrobíme přilepením jedné n-cely k $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, kde faktorzobrazení $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ je naše zobrazení v celulárních komplexech.

$X = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ lze tedy opět interpretovat jako celulární n-rozměrný komplex s právě s jednou k-celou pro každé $0 \leq k \leq n$, tj. $X = e^0 \sqcup e^1 \sqcup \cdots \sqcup e^n$.

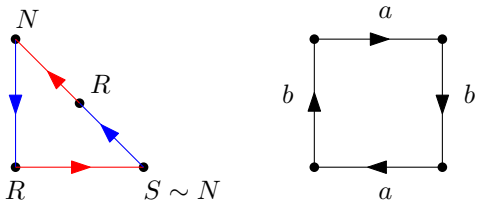
Poznámka 2.1.4. Jeden topologický prostor může mít mnoho struktur celulárních komplexů. Uvažujme například následující identifikaci prostoru $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \mathbb{S}^2/\{x \sim -x\}$. Nejprve si na sféře zvolme trojici bodů $\{N, S, R\}$, kde N a S jsou póly a R libovolný bod na rovníku. Potom $\mathbb{S}^2$ můžeme interpretovat jako čtverec s identifikací:



Obrazem trojice bodu (N, S, R) vzhledem k antipodálnímu zobrazení je (S, N, R'), kde R' je bod „u protinožců“ od R. Úhlopříčka čtverce pak odpovídá protilehlému poledníku:



Potom trojúhelník „pod úhlopříčkou“ odpovídá hemisféře ne východ od R, přičemž antipodální zobrazení ji celou zobrazí na hemisféru na západ od R. Kvocient $\mathbb{S}^2$ vzhledem k antipodálnímu zobrazení je tedy to samé co tento dolní trojúhelník s příslušným ztotožněním na jeho přeponě:



To je ale prostor ekvivalentní čtverci s identifikací hran tak jako na druhém obrázku. To nám dává úplně jinou strukturu celulárního komplexu na $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, který má dvě 0-cely, dvě 1-cely a jednu 2-celu, slepených jak je zobrazeno výše.

Ke každé n-cele e^n_α můžeme přiřadit její **charakteristické zobrazení** $\phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$, definované jako rozšíření $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1} \subset X$. Přesněji můžeme ϕ_α definovat komutativním diagramem

$$\begin{array}{ccccccc} D^n_\alpha & \hookrightarrow & X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha & \xrightarrow{q} & X^n & \hookrightarrow & X, \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & & \phi_\alpha & & & \end{array} \tag{2.4}$$

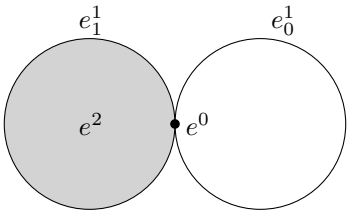
kde q je faktor-zobrazení definující X^n, ostatní šipky jsou inkluze. Snadno se uvidí, že na hranici ∂D^n_α je to opravdu φ_α, a zobrazuje $\mathrm{int}(D^n_\alpha) \equiv e^n_\alpha$ na jeho homeomorfní kopii v X^n.

Příklad 2.1.5. Uvažujme standardní celulární komplex na $\mathbb{S}^n$. Potom $\phi : D^k \to \mathbb{S}^k$ je zobrazení co identifikuje celou hranici disku ∂D^k s jedním bodem v $\mathbb{S}^k$, 0-celou e^0.

Popis topologických prostorů pomocí celulárních komplexů umí být velmi užitečným nástrojem. Zejména proto, že se chová velmi přirozeně vzhledem k obvyklým operacím na topologických prostorech. **Podkomplex** A celulárního komplexu je podmnožina, která je sjednocením cel X, taková, že každá cela z A má svůj uzávěr obsažený v A. Každé lepící zobrazení φ_α příslušné cele z A má tedy celý obraz obsažený v A a A samo o sobě je tím pádem celulárním komplexem, jehož topologie je identická jako podmnožinová v $A \subseteq X$. Dvojice (X, A) se nazývá **CW pár**.

Indukcí lze snadno ukázat, že libovolná n-kostra $X^n \subseteq X$ je vždy podkomplex X.

Příklad 2.1.6. Uvažujme dvourozměrný celulární komplex $X = e^0 \sqcup (e^1_0 \sqcup e^1_1) \sqcup e^2$ na obrázku:



Kromě koster $X^0 = e^0$, $X^1 = e^0 \sqcup e^1_0 \sqcup e^1_1$ a $X^2 = X^1 \sqcup e^2$ má X podsimplexy $e^0 \sqcup e^1_0$, $e^0 \sqcup e^1_1$ a $e^0 \sqcup e^1_1 \sqcup e^2$. Zbývající podmnožiny, například $e^2 \sqcup e^1_0$ podsimplexy nejsou.

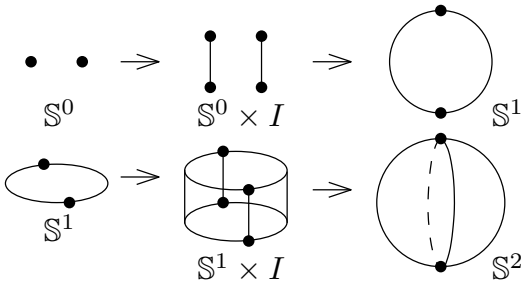
Poznámka 2.1.7. Nyní se dá ukázat, že platí následující:

1. Jsou-li X a Y celulární komplexy, je i $X \times Y$ celulární komplex. Mají-li X a Y spočetně mnoho cel, sedí to i topologicky.

2. Pro každý CW pár (X, A) je i kvocient X/A celulární komplex, jehož cely jsou cely doplňku $X \setminus A$ a jedna nová 0-cela odpovídající obrazu množiny A v X/A. Uděláme-li například v příkladu výše kvocient 1-kostrou $X^1 \subseteq X$, zbude nám 2-cela e^2 přidělaná na jednu 0-celu, tj. topologický prostor $\mathbb{S}^2$.

3. Velice důležitou operací v algebraické topologii je **suspenze** $S(X)$ **prostoru** X, definovaná jako kvocient „válce“ $X \times I$ relací ekvivalence $\sim$, definované jako $(x, 0) \sim (x', 0)$ a $(x, 1) \sim (x', 1)$ pro všechny $x, x' \in X$. Tedy $S(X) = X/\sim$ s obvyklou topologií.

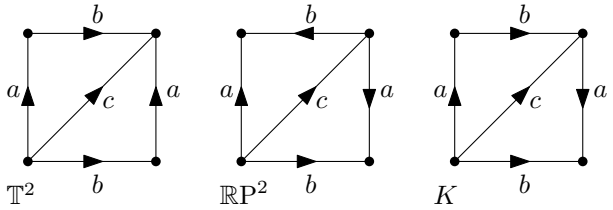
   Struktura celulárního komplexu se zavede přirozeně, tj. vezmu součinový celulární komplex na $X \times I$. Z obou podkomplexů $X \times \{0\}$ a $X \times \{1\}$ udělám dvě 0-cely a přilepím k ním zbytek. Dá se ukázat, že $S(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^{n+1}$. Tímhle způsobem můžeme induktivně dostat celulární komplex na $\mathbb{S}^n$, který ovšem není ten z příkladu. Stačí se podívat na následující sekvence obrázků:



Vidíme, že $\mathbb{S}^1$ a $\mathbb{S}^2$ zkonstruované tímto indukčním procesem mají vždy dva kousky od každé k-cely, pro každé $0 \leq k \leq n$.

2.2 Δ-komplexy

Jak ukazuje následující obrázek, torus $\mathbb{T}^2$, projektivní rovinu $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ i Kleinovu lahev K lze ve psát (kreslit) jako sjednocení trojúhelníků s identifikovanými stěnami:



Snadno lze nalézt podobné rozdělení pro libovolný pravidelný n-úhelník. Každou orientovanou plochu s genusem g lze tedy tímto způsobem tzv. **triangulovat**.

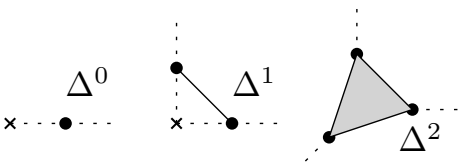
Idea Δ-komplexů je zobecnit tento náhled pro libovolnou dimenzi. Nejprve je potřeba zavést n-rozměrný analog trojúhelníku. Uvažujme afinně nezávislý soubor $n+1$ vektorů $(v_0, \ldots, v_n)$ v prostoru $\mathbb{R}^m$, tj. $(v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0)$ je lineárně nezávislý[1] soubor v $\mathbb{R}^m$. Potom **n-simplex** je *komplexní obal* souboru $(v_0, \ldots, v_n)$.

Vektory v_i se nazývají **vrcholy simplexu** a samotný simplex budeme značit jako $[v_0, \ldots, v_n]$. Je důležité, že uvažujeme vrcholy jako soubor, tj. včetně pořadí.

Příklad 2.2.1. Modelovým příkladem je **standardní simplex v** $\mathbb{R}^{n+1}$, definovaný jako

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}, \tag{2.5}$$

t.j. $\Delta^n = [e_0, \ldots, e_n]$, kde $\{e_i\}_{i=0}^n$ je standardní báze $\mathbb{R}^{n+1}$. Každý simplex $[v_0, \ldots, v_n]$ je homeomorfní Δ^n, kde homeomorfismus definovaný jako $(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^n t_i v_i$ se nazývá **barycentrické souřadnice**.



[1] Nutně tedy $n \leq m$.

Z daného n-simplexu $[v_0, \dots, v_n]$ můžeme „vymazat“ vrchol a dostaneme $(n-1)$-simplex tvořený zbývajícími vrcholy, t.j. $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, nazývaný **stěna simplexu** protilehlá vrcholu v_i. Pořadí vrcholů stěny, případně libovolného podsimplexu (komplexní obal na podmnožině jeho vrcholů) je určováno jejich pořadí v původním souboru. Máme tedy například orientaci **hran**, 1-simplexů ve tvaru $[v_i, v_j]$ pro $0 \leq i < j \leq n$.

Sjednocení stěn standardního n-simplexu se nazývá **hranice** Δ^n, značíme $\partial\Delta^n$. Otevřený n-simplex $\mathring{\Delta}^n$ je definovaný jako vnitřek (topologický) n-simplexu, t.j. $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$. Formalizace a zároveň zobecnění pojmu triangulace shrnuje následující definice:

Definice 2.2.2. Struktura **Δ-komplexu na prostoru** X je kolekce zobrazení $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$, kde n závisí na indexu α, taková, že platí následující:

(i) Restrikce $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ je injektivní a každý bod X je v obrazu právě jedné této restrikce.

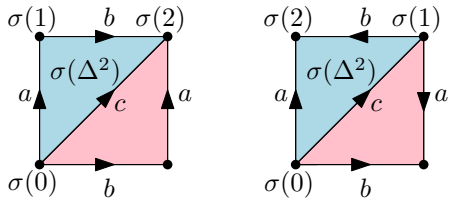
(ii) Restrikce $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ na libovolnou hranu dává jiné zobrazení $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$ z kolekce.

Striktně vzato musíme používat homeomorfismus, který ztotožňuje hranu Δ^n se standardním $(n-1)$-simplexem Δ^{n-1} a zachovává pořadí vrcholů.

(iii) Množina $A \subseteq X$ je otevřená, právě tehdy když její vzor $\sigma_\alpha^{-1}(A) \subseteq \Delta^n$ je množina otevřená v Δ^n pro každé ze zobrazení σ_α.

Příklad 2.2.3. Všechny tři obrázky triangulovaných prostorů výše zadávají strukturu Δ-komplexu. Δ-komplexy příslušné $\mathbb{T}^2$ a K mají jeden 0-simplex, tři 1-simplexy a dva 2-simplexy, zatímco $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ má navíc jeden 0-simplex.

Orientace jednotlivých hran v obrázku jednoznačně určí kam budou σ_α zobrazovat které vrcholy standardních simplexů. Porovnejme například následující situace:



$\mathbb{T}^2$ $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$

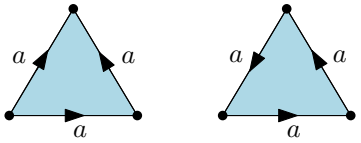
V obou případech jsou modré trojúhelníky (včetně hran a vrcholů) obrazem standardního 2-simplexu. Šipky na hranách nejprve určí jak se na ně zobrazí odpovídající standardní 1- simplexy. Je výhodné vrcholy standardního simplexu označovat pouze čísly, t.j. např. $\Delta^2 = [0, 1, 2]$ má hrany $[0, 1], [1, 2]$ a $[0, 2]$.

Je-li nyní např. $\sigma : \Delta^2 \to \mathbb{T}^2$ zobrazení na modrý trojúhelník, musí být jeho restrikce na jednotlivé hrany ve shodě s již zadanými zobrazeními 1-simplexů, a to včetně orientace. To určí obrazy souboru vrcholů $(0, 1, 2)$ jednoznačně. Pro $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ se situace liší, viz. obrázek.

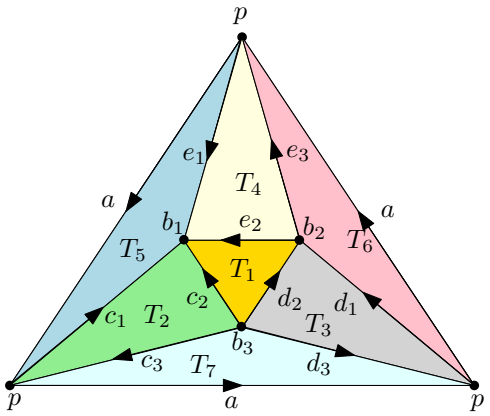
Poznámka 2.2.4. Na prostor X můžeme nahlížet jako na kvocient disjunktního sjednocení simplexů Δ^n_α, přičemž ztotožníme každou hranu každého Δ^n_α se simplexem Δ^{n-1}_β, kde β je určený vlastností (ii) v definici Δ-komplexu. Stejně jako celulární komplexy, můžeme Δ-komplexy budovat induktivně - k diskrétní množině 0-simplexů přiděláme 1-simplexy a vytvoříme graf, atd.

Poznámka 2.2.5. Zřejmě $\Delta^n \cong D^n$, $\partial\Delta^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Definujeme-li **otevřené n-simplexy** $e^n_\alpha = \sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)$, definují nám σ_α charakteristická zobrazení a X je celulární komplex s n-celami e^n_α. Zejména tedy $X = \bigsqcup_\alpha e^n_\alpha$. Lepící zobrazení (restrikce σ_α na $\partial\Delta^n$) jsou ovšem velmi speciální.

Příklad 2.2.6. První z obrázků představuje podivuhodný Δ-komplex nazývaný **hlupákův klobouk** (anglicky dunce hat). Má jeden 0-simplex, jeden 1-simplex a jeden 2-simplex.



Druhý obrázek zdánlivě vypadá jako krásný Δ-komplex, ale ve skutečnosti jím není. Ne každý obrázek s trojúhelníky a šipkami je Δ-komplex. Triangulace dotyčného prostoru je ve skutečnosti poměrně komplikovaná (čtyři 0-simplexy, deset 1-simplexů, sedm 2-simplexů):



2.3 Simpliciální homologie

Každý Δ-komplex je ve skutečnosti jen snůškou kombinatorických dat. Říkáme z jakých simplexů je udělaný, přičemž je podstatné jen to, která hrana kterého simplexu se přilepí kam - přičemž lepení (jako spojité zobrazení) je již jednoznačně určené. Ukazuje se, že těmto datům můžeme přiřadit algebraický objekt, který bude navíc do jisté míry nezávislý na volbě „triangulace“, t.j. je jedno jak X ze simplexů slepíme.

Definujeme $\Delta_n(X)$ jako volnou abelovskou grupu generovanou zobrazeními $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$. Každý element $\Delta_n(X)$ je tedy formální lineární kombinace $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, kde $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ jsou celočíselné koeficienty, a *jen konečně mnoho z nich je různých od nuly.* Grupovou operaci budeme psát v aditivní notaci, přičemž.

$$(\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha) + (\sum_\alpha m_\alpha \sigma_\alpha) := \sum_\alpha (n_\alpha + m_\alpha)\sigma_\alpha \tag{2.6}$$

Inverze a jednotka jsou zřejmé. $\Delta_n(X)$ se nazývá prostor **n-řetězců**.

Nechť $\Delta^n = [0, 1, \ldots, n]$. Standardní n-simplex má $(n+1)$ stěn, které označíme jako

$$\Delta^n_{(i)} \equiv [0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n], \tag{2.7}$$

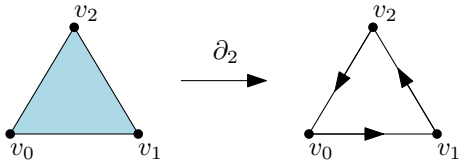
kde jsme v $\Delta^n_{(i)}$ jednoduše vynechali i-tý vrchol. Z definice je restrikce každého σ_α na $\Delta^n_{(i)}$ nějaký $(n-1)$-simplex $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$. Má tedy dobrý smysl definovat **operátor hranice**

$\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ pomocí jeho hodnoty na generátory:

$$\partial_n \sigma_\alpha = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(i)}}. \tag{2.8}$$

Poznámka 2.3.1. Operátor hranice si lze vizualizovat následovně. Každý ze simplexů $\Delta^n_\alpha = \sigma_\alpha(\Delta^n)$ je tvořený vrcholy $(v_0, \ldots, v_n)$, t.j. $\Delta^n_\alpha = [v_0, \ldots, v_n]$. Potom element $\partial_n \sigma_\alpha \in \Delta_{n-1}(X)$ je celočíselná (formální) kombinace zobrazení, jejímiž obrazy jsou právě stěny $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ simplexu Δ^n_α. Můžeme tedy psát $\partial_n[v_0, \ldots, v_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$.

Jako příklad máme $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$. Přiřadili jsme 2-simplexu $[v_0, v_1, v_2]$ sekvenci (1-řetězec) jeho hran, přičemž znaménko lze interpretovat jako „otočení šipky“ tak abychom dostali orientovaný graf hran:



(2.9)

Co se stane když aplikujeme ∂_1 na výsledek ∂_2? Dostáváme

$$\partial_1([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) = [v_2] - [v_1] - [v_2] + [v_0] + [v_1] - [v_0] = 0. \tag{2.10}$$

Dostáváme tedy $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. Jelikož jsme o simplexu $[v_0, v_1, v_2]$ nepředpokládali vůbec nic, vypadá to na obecné pravidlo.

Tvrzení 2.3.2. *Pro každý Δ-komplex X platí $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Zavádí se konvence $\Delta_n(X) = 0$ pro $n < 0$. Jinými slovy* $\mathrm{im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$.

Důkaz. Označme $\Delta^n_{(ij)} = [0, \ldots, \hat{i}, \ldots, \hat{j}, \ldots, n]$. Pro každé $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ máme

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n \sigma_\alpha) &= \partial_{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^j \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(j)}}\Big) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \partial_{n-1}(\sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(j)}}) \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(ij)}} + \sum_{i>j} (-1)^{i+j-1} \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(ji)}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

V druhé sumě můžeme zaměnit sčítací indexy i a j, a zjistíme, že výsledek se liší právě o znaménko, takže se obě části odečtou a máme $\partial_{n-1}(\partial_n \sigma_\alpha) = 0$. ∎

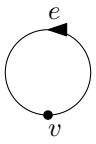
Definice 2.3.3. Nechť $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost abelovských grup společně s homomorfismy $\{\partial_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ splňují $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Tato struktura se nazývá **řetězcový komplex**, značíme $(C_\bullet, \partial_\bullet)$. Index n se často u ∂ nepíše.

Grupě C_n se říká n**-řetězce**. Můžeme definovat dvě její podgrupy. Podgrupa n**-cyklů** $Z_n = \ker(\partial_n)$ a podgrupa n**-hranic** $B_n = \mathrm{im}(\partial_{n+1})$. Zjevně $B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$. Má tedy smysl definovat n**-tou grupu homologie** $H_n = Z_n / B_n$. Elementy H_n se nazývají **homologické třídy**. Pokud dva cykly $\omega, \omega' \in Z_n$ reprezentují stejnou homologickou třídu, řekneme, že ω a ω' **jsou homologické**. Dva cykly jsou homologické, liší-li se o hranici: $\omega' = \omega + \partial\beta$.

Tvrzení 2.3.4. *Nechť X je Δ-komplex. Potom $C_n = \Delta_n(X)$ spolu s operátorem hranice (2.8) tvoří řetězcový komplex. Příslušnou homologickou grupu značíme $H_n^\Delta(X)$ a nazýváme n-tou* ***simpliciální grupou homologie****.*

Poznámka 2.3.5. Všimněte si, že je-li v X maximální dimenze simplexů n, máme $B_n = 0$ a tedy $H_n^\Delta(X) = Z_n$. Zřejmě také $H_i^\Delta(X) = 0$ pro $i > n$. Podobně $Z_0 = C_0$ a tedy $H_0^\Delta(X) = \Delta_0(X)/B_0$.

Příklad 2.3.6. Uvažujme jednoduchý Δ-simplex definovaný jako na obrázku:



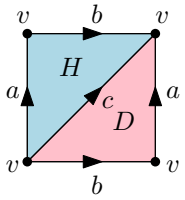
Je tvořený jedním 0-simplexem $v = \sigma_v(\Delta^0)$ a jedním 1-simplexem $e = \sigma_e(\Delta^1)$. Máme $\Delta_0(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_v\}$ a $\Delta_1(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_e\}$. Operátor hranice $\partial_1 : \Delta_1(X) \to \Delta_0(X)$ má tvar

$$\partial_1(\sigma_e) = \sigma_e|_{\Delta_0^1} - \sigma_e|_{\Delta_1^1} = \sigma_v - \sigma_v = 0. \tag{2.12}$$

Odtud vidíme, že $H_1^\Delta(X) = Z_1 = \Delta_1(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_e\} \cong \mathbb{Z}$. Zároveň $B_0 = 0$ a tedy $H_0^\Delta(X) = \Delta_0(X)/B_0 = \Delta_0(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_v\} \cong \mathbb{Z}$. Dokázali jsme následující:

$$H_n^\Delta(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{pro } n \geq 2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Příklad 2.3.7. Uvažujme torus $\mathbb{T}^2$ s následující strukturou Δ-komplexu:



V následujícím ztotožníme zobrazení σ s jejich obrazy v X. Máme tedy $\Delta_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{v\}$, $\Delta_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{a,b,c\}$ a $\Delta_2(\mathbb{T}^2) = \{H, D\}$. Začněme operátorem hranice. Máme

$$\partial_2 H = H|_{\Delta_0^2} - H|_{\Delta_1^2} + H|_{\Delta_2^2}. \tag{2.14}$$

Ale vrcholy trojúhelníku H jsou obrazem vrcholů Δ^2 jako na obrázku v příkladu 2.2.3. Odtud

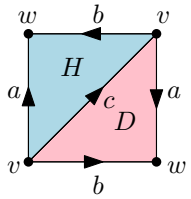
$$\partial_2 H = b - c + a, \tag{2.15}$$
$$\partial_2 D = a - c + b, \tag{2.16}$$

kde hodnotu na D jsme vypočítali analogicky. Protože všechny 1-simplexy končí na stejném vrcholu, 0-simplexu v, máme zřejmě $\partial_1 = 0$. Jdeme počítat podgrupy cyklů.

Abychom vypočítali Z_2, stačí si všimnout, že $\partial_2(H - D) = 0$, a tedy $Z_2 = \mathbb{Z}\{H - D\} \cong \mathbb{Z}$. Dále zřejmě $Z_1 = \Delta_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{a,b,c\}$ a $Z_0 = \Delta_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{v\}$. Konečně, podgrupa B_1 je generovaná prvkem $a + b - c$. Tento stačí doplnit na bázi Z_1, stačí zřejmě soubor $(a, b, a + b - c)$. Vidíme, že $H_2^\Delta(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{a, b, a + b - c\}/\mathbb{Z}\{a + b - c\} = \mathbb{Z}\{a, b\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Dostáváme tedy

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{pro } n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{pro } n = 2, \\ 0 & \text{pro } n \geq 3. \end{cases} \tag{2.17}$$

Příklad 2.3.8. Uvažujme projektivní prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ s následující strukturou Δ-komplexu:



Máme tedy $\Delta_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \mathbb{Z}\{v, w\}$, $\Delta_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \mathbb{Z}\{a, b, c\}$ a $\Delta_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \{H, D\}$. Máme

$$\partial_2 H = b - a + c, \tag{2.18}$$
$$\partial_2 D = a - b + c. \tag{2.19}$$

Vidíme, že už ∂_2 se liší od $\mathbb{T}^2$. O mnoho zajímavější je navíc ∂_1. Máme:

$$\partial_1 a = w - v, \quad \partial_1 b = w - v, \quad \partial_1 c = 0. \tag{2.20}$$

Začněme opět hledáním 2-cyklů, neboli řešením rovnice $\partial_2(\lambda_1 H + \lambda_2 D) = 0$. To vede na rovnici

$$(\lambda_2 - \lambda_1)a + (\lambda_1 - \lambda_2)b + (\lambda_1 + \lambda_2)c = 0. \tag{2.21}$$

Ta má zřejmě pouze triviální řešení a tedy $H_2^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = Z_2 = 0$. Pokračujme hledáním prostoru 1-cyklů, tedy jádra homomorfismu ∂_1. Rovnice $\partial_1(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c) = 0$ vede na

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(w - v) = 0. \tag{2.22}$$

Nutně tedy $\lambda_2 + \lambda_1 = 0$ a vidíme, že $Z_1 = \mathbb{Z}\{b - a, c\}$. Je výhodné psát $Z_1 = \mathbb{Z}\{b - a + c, c\}$. Protože $B_1 = \mathrm{im}(\partial_2)$ je obraz injektivního zobrazení, je generovaný obrazy libovolné báze $\Delta_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$, například $B_1 = \{\partial_2(H), \partial_2(H + D)\} = \mathbb{Z}\{b - a + c, 2c\}$. Odtud snadno vidíme, že

$$H_1^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \mathbb{Z}\{b - a + c, c\}/\mathbb{Z}\{b - a + c, 2c\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}_2. \tag{2.23}$$

Konečně, snadno vidíme, že $B_0 = \mathbb{Z}\{w - v\}$. V $Z_0 = \Delta_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ si můžeme zvolit bázi $Z_0 = \mathbb{Z}\{w - v, v\}$ a tedy $H_0^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}$. Souhrnně tedy

$$H_n^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n > 1. \end{cases} \tag{2.24}$$

2.4 Singulární homologie

Ukázali jsme, že pokud je topologický prostor X vybaven strukturou Δ-komplexu, je v principu snadné spočítat příslušnou simpliciální homologii $H_\bullet^\Delta(X)$. Abychom však těmto algebraickým datům mohli přiřadit jakýkoliv význam, potřebujeme ukázat, že ve grupy ve skutečnosti nezávisí na konkrétní „triangulaci“ prostoru X. Jak je v matematice běžné, na problém se zaútočí z úplně jiné strany. Klíčovým trikem je zavést výrazně obecnější a výpočetně absurdně složitou homologickou teorii, která se však velmi předvídatelně chová vzhledem ke spojitým zobrazením topologických prostorů. Konečně, s použitím (již převážně algebraických) triků se ukáže, že grupy této tzv. **singulární homologie** jsou izomorfní těm pocházející ze simpliciální homologie. Tím

získáme nejen užitečný nástroj na jejich výpočet, ale automaticky i nezávislost těch simpliciálních na konkrétním Δ-komplexu (a mnoho dalšího).

Singulárním n-simplexem nazveme libovolné *spojité zobrazení* $\sigma : \Delta^n \to X$. Grupa **singulárních n-řetězců** $C_n(X)$ je volná abelovská grupa na singulárních n-simplexech, tedy množina konečných formálních sum $\sum_i n_i\sigma_i$, kde $n_i \in \mathbb{Z}$ a $\sigma_i : \Delta^n \to X$. **Operátor hranice** se definuje naprosto analogicky jako pro Δ-komplex, tedy

$$\partial_n\sigma = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\ \sigma|_{\Delta^n_{(i)}}, \tag{2.25}$$

kde $\Delta^n_{(i)} \cong \Delta^{n-1}$ je hrana standardního n-simplexu Δ^n protilehlá vrcholu n. Úplně analogicky se dokáže, že $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ a tedy $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ tvoří řetězcový komplex. Potom $H_n(X) = \ker(\partial_n)/\operatorname{im}(\partial_{n+1})$ se nazývá **singulární n-tou grupou homologie**.

Je zřejmé, že výpočet $H_n(X)$ je téměř nemožným úkolem, jelikož i pro hodně jednoduché X je $C_n(X)$ nespočetná množina. Není vůbec zřejmé, že by $H_n(X)$ měla být nějaká hezká abelovská grupa typu $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{Z}_n$. Než si ukážeme nejdůležitější vlastnost singulární homologie, zavedeme si následující pojem:

Definice 2.4.1. Nechť $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ a $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ jsou dva řetězcové komplexy. Homomorfismus[2] $\varphi : C_\bullet \to C'_\bullet$ se nazývá **řetězcové zobrazení**, pokud zachovává stupeň, t.j. $\varphi(C_n) \subseteq C'_n$ a komutuje s operátory hranice, t.j. platí $\partial'_n \circ \varphi = \varphi \circ \partial_n$ pro každé $n \geq 0$. Snadno se rozmyslí, že řetězcové komplexy společně s řetězcovými zobrazeními tvoří **kategorii řetězcových komplexů Ch**.

Lemma 2.4.2. *Přiřazení $(C_\bullet, \partial_\bullet) \mapsto H_\bullet$ je funktor z* **Ch** *do kategorie abelovských grup* **Ab**.

Důkaz. Na objektech máme funktor definovaný. Musíme ukázat, že pro každé řetězcové zobrazení $\varphi : C_\bullet \to C'_\bullet$ máme indukovaný homomorfismus abelovských grup $\varphi_* \in \mathbf{Ab}(H_\bullet, H'_\bullet)$. Nechť $[\sigma] \in H_n$ je třída reprezentovaná n-cyklem $\sigma \in C_n$. Definujeme

$$\varphi_*[\sigma] = [\varphi(\sigma)]. \tag{2.26}$$

Musí se ověřit, že je φ_* dobře definované. Zaprvé musí být $\varphi(\sigma)$ opět n-cyklus. Ale $\partial'_n(\varphi(\sigma)) = \varphi(\partial_n\sigma) = 0$, kde jsme využili toho, že φ je řetězcové zobrazení. Dál nesmí záviset na výběru reprezentanta. Pokud $[\sigma] = [\sigma']$, máme $\sigma' = \sigma + \partial_{n+1}\lambda$ a tedy $\varphi(\sigma') = \varphi(\sigma) + \partial'_{n+1}(\varphi(\lambda))$. Obrazy se tedy opět liší jen o hranici a φ_* je dobře definované zobrazení.

Zjevně jde o morfismus abelovských grup (protože φ jím z definice je) a na skládání se chová jak má. To dokazuje, že $(C_\bullet, \partial_\bullet) \mapsto H_\bullet$ je funktor. ∎

Lemma 2.4.3. *Přiřazení $X \mapsto H_\bullet(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n(X)$ je funktor z kategorie* **Top** *do* **Ab**.

Důkaz. Stačí ukázat, že přiřazení $X \mapsto (C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ je funktor z **Top** do **Ch**. Každému spojitému zobrazení $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ musíme přiřadit řetězcové zobrazení $\hat{\varphi} : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$. Jelikož $C_n(X)$ je volná abelovská grupa na n-simplexech, stačí definovat $\hat{\varphi}$ na n-simplexech $\sigma : \Delta^n \to X$. To je ale jednoduché, protože $\hat{\varphi}(\sigma) := \varphi \circ \sigma$ definuje spojité zobrazení z Δ^n do Y, tedy jeden z generátorů $C_n(Y)$. Musí se ukázat, že komutuje z hranicí. Ale to je triviální:

$$\partial_n(\hat{\varphi}(\sigma)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\hat{\varphi}[\sigma]|_{\Delta^n_{(i)}} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\varphi\circ\sigma)|_{\Delta^n_{(i)}} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varphi\circ(\sigma|_{\Delta^n_{(i)}}) = \hat{\varphi}(\partial_n\sigma). \tag{2.27}$$

[2] Na $C_\bullet$ se díváme jako na abelovskou grupu $C_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$.

Je triviální uvidět, že $\hat{\mathbf{1}}_X = \mathbf{1}$ a $\varphi \hat{\circ} \psi = \hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$, což dokazuje, že jsme právě definovali funktor z **Top** do **Ch**. Funktor z tvrzení je potom složení dvou funktorů $X \mapsto (C_\bullet(X), \partial_\bullet) \mapsto H_\bullet(X)$ a tedy automaticky funktor. Explicitně pro každé spojité zobrazení $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ definujeme morfismus $\varphi_* \in \mathbf{Ab}(H_\bullet(X), H_\bullet(Y)$ jako $\varphi_*[\sigma] = [\hat{\varphi}(\sigma)] = [\varphi \circ \sigma]$. ■

Důsledek 2.4.4. *Je-li $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ homeomorfismus, je $\varphi_* : H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$ izomorfismus abelovských grup. Singulární homologie je tedy topologický invariant!*

Singulární homologii můžeme počítat pro každou komponentu křivkové souvislosti X zvlášť, protože platí následující pozorování:

Lemma 2.4.5. *Každý topologický prostor je disjunktním sjednocením svých komponent křivkové souvislosti, $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$. Potom $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý, pokud si člověk uvědomí, že pro každý n-simplex σ je $\sigma(\Delta^n) \subseteq X_\alpha$ pro nějaké α ze spojitosti zobrazení σ. Navíc $\partial_n \sigma$ je rovněž kombinace simplexů z podgrupy $C_{n-1}(X_\alpha)$ a výpočet $H_n(X)$ lze tedy dělat „po komponentách“. ■

Důsledek 2.4.6. *Je-li $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, kde X_α jsou komponenty křivkové souvislosti X, máme $H_0(X) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$. Nultá singulární homologie tedy „počítá“ komponenty křivkové souvislosti X.*

Důkaz. Podle předchozího lemmatu stačí ukázat, že pro (neprázdný) křivkově souvislý prostor X máme $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Grupa $C_0(X)$ je volná abelovská grupa na spojitých zobrazeních z jednobodové množiny Δ^0 do X. Tedy $C_0(X) = \mathbb{Z}X$ a 0-řetězce jsou konečné celočíselné kombinace bodů z X. 1-simplexy jsou spojitá zobrazení z Δ^1 do X, neboli spojité křivky z $\mathbf{Top}(I, X)$, a 1-řetězce $C_1(X)$ jsou jejich formální celočíselné kombinace.

Nechť $x_0 \in X$ je fixní význačný bod. Označme σ_x 0-simplex odpovídající bodu $x \in X$. Jelikož X je křivkově souvislý, existuje křivka $f \in \mathbf{Top}(I, X)$, taková, že $f(0) = x_0$ a $f(1) = x$. Nechť $\sigma_f \in C_1(X)$ je odpovídající 1-simplex. Snadno vidíme, že

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + (\sigma_x - \sigma_{x_0}) = \sigma_{x_0} + \partial_1 \sigma_f. \tag{2.28}$$

Odtud $[\sigma_x] = [\sigma_{x_0}]$ a celá grupa $H_0(X)$ je generovaná $[\sigma_{x_0}]$, neboli $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. ■

Žádná podobná snadná interpretace neexistuje pro vyšší singulární homologické grupy. Nenajdeme mnoho příkladů, kde lze ty vyšší z definice spočítat. Jeden bychom však měli.

Příklad 2.4.7. Je-li X jednobodová množina, máme $H_0(X) = \mathbb{Z}$ a $H_n(X) = 0$ pro $n > 0$.

Zřejmě $C_n(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_n\}$, kde $\sigma_n : \Delta^n \to X$ je jediný možný n-simplex zobrazující Δ^n do jednoho bodu. Operátor hranice ∂_n má tvar

$$\partial_n \sigma_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{n-1} = (\sum_{i=0}^{n} (-1)^i) \cdot \sigma_{n-1} = \begin{cases} \sigma_{n-1} & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ 0 & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases} \tag{2.29}$$

Náš řetězcový komplex je tedy posloupnost grup a zobrazení

$$\cdots \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \tag{2.30}$$

Odtud hned vidíme, že (ve shodě s předchozím tvrzením) $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Pro $k \geq 1$ pak

$$H_{2k}(X) = \ker(\mathbf{1}) / \operatorname{im}(0) = 0/0 = 0, \tag{2.31}$$

$$H_{2k-1}(X) = \ker(0) / \operatorname{im}(\mathbf{1}) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0. \tag{2.32}$$

Poznámka 2.4.8. První singulární homologická grupa $H_1(X)$ souvisí velmi úzce s fundamentální grupou $\pi_1(X)$, předpokládáme-li křivkovou souvislost X. Skutečně, lze ukázat, že $H_1(X)$ je tzv. **abelizací grupy** $\pi_1(X)$.

Pro libovolnou grupu G lze sestrojit **komutátorovou podgrupu** $[G,G] \subseteq G$, definovanou jako nejmenší podgrupu obsahující všechny komutátory $[g,h] \equiv g^{-1}h^{-1}gh$. Je snadné ukázat, že $[G,G]$ je normální podgrupa a tedy má smysl definovat **abelizaci** G **jako**

$$G_{\mathbf{Ab}} = G/[G,G]. \tag{2.33}$$

Snadno se ukáže, že $G_{\mathbf{Ab}}$ je abelovská grupa a $G \mapsto G_{\mathbf{Ab}}$ je funktor z **Grp** do **Ab**. Toto pozorování může být užitečné. Například

$$\mathbb{Z}_2 = H_1^{\Delta}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)_{\mathbf{Ab}}, \tag{2.34}$$

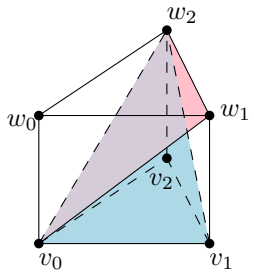
odkud hned vidíme, že $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \neq 0$ a prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ není jednoduše souvislý. Ve skutečnosti se dá dokázat, že pro libovolnou topologickou křivkově souvislou varietu X je $\pi_1(X)$ automaticky abelovská a potom rovnou $\pi_1(X) \cong H_1(X)$.

Pro každé spojité zobrazení $\varphi \in \mathbf{Top}(X,Y)$ máme homomorfismus $\varphi_* : H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$. Ukazuje se, že tento nezávisí na výběru reprezentanta příslušné třídy homotopických zobrazení:

Věta 2.4.9. *Nechť $\varphi, \varphi' \in \mathbf{Top}(X,Y)$ jsou homotopická zobrazení. Potom $\varphi_* = \varphi'_*$.*

Důsledek 2.4.10. *Je-li $\varphi \in \mathbf{Top}(X,Y)$ homotopická ekvivalence, je φ_* izomorfismus.*

Důkaz věty 2.4.9. Základem důkazu je si správně „triangulovat“ prostor $\Delta^n \times I$. Označme $[v_0,\ldots,v_n]$ a $[w_0,\ldots,w_n]$ n-simplexy odpovídající krajům $\Delta^n \times \{0\}$ a $\Delta^n \times \{1\}$, přičemž v_i a w_i mají stejný obraz v Δ^n vzhledem k projekcím, t.j. leží „proti sobě“.



Vyrobíme nyní posloupnost n-simplexů tím, že vždy přesuneme jeden z vrcholů v_i po úsečce $[v_i,w_i]$ do vrcholu w_i a začneme pro $i=n$. Nejprve tedy z $[v_0,\ldots,v_n]$ vyrobíme $[v_0,\ldots,v_{n-1},w_n]$, potom $[v_0,\ldots,v_{n-2},w_{n-1},w_n]$, atd. Celkem dostaneme n nových n-simplexů. V příkladu pro $n=2$ na obrázku jsou to postupně $[v_0,v_1,w_2]$ (modrý) a $[v_0,w_1,w_2]$ (červený).

Typický krok tento konstrukce vyrábí z $[v_0,\ldots,v_i,w_{i+1},\ldots,w_n]$ přesunutím v_i do w_i simplex $[v_0,\ldots,w_i,w_{i+1},\ldots,w_n]$. Oba dva n-simplexy jsou stěnou $(n+1)$-simplexu $[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,v_n]$. V příkladu nahoře jsou 2-simplexy $[v_0,v_1,w_2]$ (modrý) a $[v_0,w_1,w_2]$ (červený) stěnami 3-simplexu (čtyřstěnu) $[v_0,v_1,w_1,w_2]$. Snadno si rozmyslíme, že $\Delta^n \times I$ lze psát jako sjednocení $n+1$ právě takto sestrojených $(n+1)$-simplexů $\Delta_{[i]} \equiv [v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]$. Podstatné je, že $\Delta_{[i]}$ a $\Delta_{[i+1]}$ spolu sousedí vždy právě jednou stěnou, a to n-simplexem $[v_0,\ldots,v_i,w_{i+1},\ldots,w_n]$.

Nechť $H : X \times I \to Y$ je homotopie zobrazení φ a φ'. Pro libovolný singulární simplex $\sigma : \Delta^n \to X$ můžeme sestrojit zobrazení $H \circ (\sigma \times \mathbf{1}) : \Delta^n \times I \to Y$. Pomocí něj a konstrukce výše můžeme sestrojit tzv. **hranolový operátor** $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ jako

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{\Delta_{[i]}} \tag{2.35}$$

Všimněte si, že tento operátor zdvihá stupeň řetězce z singulárním komplexu o 1. Je klíčové si rozmyslet, jak se P chová vzhledem k operátoru hranice. Ukážeme si, že platí rovnost

$$\partial_{n+1} \circ P = \hat{\varphi}' - \hat{\varphi} - P \circ \partial_n, \tag{2.36}$$

kde $\hat{\varphi}[\sigma] = \varphi \circ \sigma$ je řetězcové zobrazení obou komplexů, podobně pro $\hat{\varphi}'$. Slovem **hranol** se typicky označuje $\Delta^n \times I$. Tuto rovnici si lze (intuitivně) představit jako tvrzení, že hranice hranolu $P(\sigma)$ je tvořena dvěma podstavami $\hat{\varphi}'(\sigma)$ a $\hat{\varphi}(\sigma)$ a hranolem vyrobeným z hranice, t.j. $P(\partial_n \sigma)$, přičemž znaménka jen zaručují správnou orientaci. Prostým dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} P(\sigma) = & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_{n+1} (\{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]}) \\ = & \sum_{j \le i} (-1)^{i+j} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]} \\ & + \sum_{j \ge i} (-1)^{i+j+1} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_n]}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Členy, kde $i = j$ tvoří jednoduchou sumu

$$\sum_{i=1}^{n} \big((-1)^{2i} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0,\dots,v_{i-1},w_i,\dots,w_n]} + (-1)^{2i+1} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0,\dots,v_i,w_{i+1},\dots,w_n]} \big). \tag{2.38}$$

Vidíme, že se členy po dvojicích odečtou až na dva krajní odpovídající $i \in \{0, n\}$:

$$(-1)^0 \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[w_0,\dots,w_n]} = \varphi' \circ \sigma, \quad (-1)^{2n+1} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0,\dots,v_n]} = -\varphi \circ \sigma. \tag{2.39}$$

Sčítance s $i = j$ tedy dávají přesně rozdíl obou podstav $\hat{\varphi}'(\sigma) - \hat{\varphi}(\sigma)$. Zbývající členy jsou přesně opak $P(\partial_n \sigma)$, protože $\partial_n \sigma = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_n]}$ a Teda

$$\begin{aligned} P(\partial_n \sigma) = & \sum_{j<i} (-1)^{j+i-1} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]} \\ & + \sum_{j>i} (-1)^{j+i} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0,\dots v_i,w_i,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_n]}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Tím jsme dokázali rovnici (2.36). Zbytek důkazu je nyní velice jednoduchý. Nechť $\sigma \in C_n(X)$ je libovolný n-cyklus. Máme ukázat, že $\varphi'_*[\sigma] = \varphi_*[\sigma]$. Ale

$$(\varphi'_* - \varphi_*)[\sigma] = [(\hat{\varphi}' - \hat{\varphi})(\sigma)] = [\partial_{n+1}(P(\sigma)) + P(\partial_n \sigma)] = [\partial_{n+1}(P(\sigma)) + P(0)] = 0. \tag{2.41}$$

Tímto můžeme považovat větu za dokázanou. ■

Důkaz je typickou ukázkou velmi obvyklé konstrukce v algebraické topologii. Chtěli jsme ukázat, že dvě řetězcová zobrazení $\hat{\varphi}$ a $\hat{\varphi}'$ z $C_n(X)$ do $C_n(Y)$ indukují stejné zobrazení $\varphi_* = \varphi'_*$

mezi příslušnými homotopiemi $H_n(X)$ a $H_n(Y)$. Sestrojili jsme zobrazení $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$, které splňuje rovnici $\hat{\varphi}' - \hat{\varphi} = \partial_{n+1} \circ P + P \circ \partial_n$.

Takovému zobrazení P se říká **řetězcová homotopie** a řetězcová zobrazení $\hat{\varphi}'$ a $\hat{\varphi}$ jsou **řetězcově homotopická**. Jde o algebraický analog pojmu homotopie, člověk si snadno rozmyslí, že být řetězcově homotopický definuje relaci ekvivalence na prostoru $\mathbf{Ch}((C_\bullet, \partial_\bullet), (C'_\bullet, \partial'_\bullet))$ pro libovolné dva řetězcové komplexy $(C_\bullet, \partial_\bullet), (C'_\bullet, \partial'_\bullet)$.

Příklad 2.4.11. Nechť X je kontraktibilní prostor. Z definice má X homotopický typ bodu a existuje tedy homotopická ekvivalence $\varphi : X \to \{*\}$. Podle příkladu 2.4.7 a důsledku 2.4.10 tedy

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \geq 1. \end{cases} \tag{2.42}$$

2.5 Exaktní posloupnosti a vyříznutí

Je-li X topologický prostor a $A \subseteq X$ jeho uzavřená podmnožina, je přirozené se ptát, jak souvisí homologické grupy $H_n(A)$, $H_n(X/A)$ a $H_n(X)$. V ideálním světě by platilo, že $H_n(X/A) \cong H_n(X)/H_n(A)$, což by ale při obecné platnosti tohoto tvrzení vedlo k trivialitě celé homologické teorie. Z technických důvodů je vhodné si zavést následující mírnou modifikaci:

Definice 2.5.1. Pro libovolný *neprázdný* topologický prostor X definujeme $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ vztahem $\epsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i$. Pro libovolný 1-simplex σ je $\epsilon(\partial_1\sigma) = \epsilon(\sigma|_{\Delta^1_{(0)}} - \sigma|_{\Delta^1_{(1)}}) = 1-1 = 0$. Můžeme tedy uvažovat **augmentovaný singulární komplex**:

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{2.43}$$

Příslušná homologie $\widetilde{H}_n(X)$ se nazývá **redukovaná singulární homologie**. Zjevně $\widetilde{H}_n(X) = H_n(X)$ pro $n > 0$ a $\widetilde{H}_{-1}(X) = 0$. $\hat{\epsilon}[\sigma] = \epsilon(\sigma)$ je dobře definovaný epimorfismus z $H_0(X)$ do $\mathbb{Z}$ a $\widetilde{H}_0(X) \subseteq H_0(X)$ je jeho jádro. Tedy $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Je-li $\varphi : X \to Y$ spojité zobrazení, indukované zobrazení $\varphi_* : \widetilde{H}_0(X) \to \widetilde{H}_0(Y)$ můžeme definovat stejným předpisem, protože pokud $\sigma \in C_0(X)$ splňuje $\epsilon(\sigma) = 0$, pak $\epsilon'(\varphi \circ \sigma) = 0$.

Příklad 2.5.2. Pro křivkově souvislý topologický prostor je $\widetilde{H}_0(X) = 0$. Ukázali jsme totiž, že $H_0(X) = \mathbb{Z}[\sigma_{x_0}]$, kde $x_0 \in X$ je libovolný fixní bod. Potom $\hat{\epsilon}[\sigma_{x_0}] = 1$ je zjevně izomorfismus a má tedy triviální jádro $\widetilde{H}_0(X)$.

Velmi užitečným konceptem v algebraické topologii je exaktnost posloupností homomorfismů grup. Často umožní jednoduše formulovat několik předpokladů najednou.

Definice 2.5.3. Uvažujme posloupnost grup a homomorfismů

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{2.44}$$

Řekneme, že jde o **exaktní posloupnost**, pokud $\ker(\varphi_n) = \mathrm{im}(\varphi_{n+1})$ pro každé n.

Příklad 2.5.4. Platí následující tvrzení:

(i) Posloupnost $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B$ je exaktní, právě tehdy když je φ injektivní.

(ii) Posloupnost $A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ je exaktní, právě tehdy když je φ surjektivní.

(iii) Posloupnost $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ je exaktní, právě tehdy když je φ izomorfismus.

(iv) Posloupnost $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ je exaktní, právě tehdy když je φ injektivní, ψ surjektivní a $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$. Tento speciální případ se nazývá **krátká exaktní posloupnost**.

Věta 2.5.5. *Nechť X je topologický prostor a A jeho uzavřená podmnožina. Dále A musí být deformační retrakt nějakého okolí $U \subseteq X$. Dvojice (X, A) se nazývá **dobrý pár**. Potom existuje následující exaktní posloupnost redukovaných homologických grup:*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} \widetilde{H}_n(X/A) \\ \xrightarrow{\quad\delta\quad} \\ \widetilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{q_*} \widetilde{H}_{n-1}(X/A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \widetilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.45}$$

kde $i \in \mathbf{Top}(A, X)$ je vnoření a $q \in \mathbf{Top}(X, X/A)$ faktor-zobrazení.

Homomorfismus δ je definovaný následovně: Pro každé $[\sigma] \in H_n(X/A)$ najdu $\hat{\sigma} : \Delta^n \to X$ splňující $q \circ \hat{\sigma} = \sigma$. Protože $\partial\sigma = 0$, bude nutně $\partial\hat{\sigma} \in C_{n-1}(A)$ a můžu definovat $\delta[\sigma] = [\partial\hat{\sigma}]$. To že to jde a je to nezávislé na volbách je netriviální.

Poznámka 2.5.6. Příkladem dobrého páru je například každý CW pár (X, A), t.j. celulární komplex X společně s jeho libovolným podkomplexem A.

Důsledek 2.5.7 (**Redukovaná homologie sfér**). *Platí $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ a $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = 0$ pro $i \neq n$.*

Důkaz. Stačí si vzít $(X, A) = (D^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Zjevně se jedná o dobrý pár a $X/A = \mathbb{S}^n$. Protože D^n je kontraktibilní prostor, máme $\widetilde{H}_i(D^n) = 0$ pro všechny i. V exaktní posloupnosti (2.45) se pro každé $i > 0$ vyskytuje úsek

$$\cdots \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{q_*} \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{q_*} \cdots, \tag{2.46}$$

jehož exaktnost okamžitě implikuje, že $\delta : \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \to \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ je izomorfismus. Odtud indukcí okamžitě plyne, že $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \cdots \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}$. Pro $i < n$ je $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^{n-i}) = 0$, protože $\mathbb{S}^{n-i}$ je křivkově souvislá. Pro $i > n$ je $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = \widetilde{H}_{i-n}(\mathbb{S}^0) = 0$, protože $\mathbb{S}^0$ je disjunktní sjednocení dvou bodů. ■

Důsledek 2.5.8 (**Brouwerova věta o pevném bodě v dimenzi** n). *Každé spojité zobrazení $\varphi : D^n \to D^n$ má pevný bod.*

Důkaz. V důkazu pro $n = 2$ jsme argumentovali, že stačí ukázat, že neexistuje retrakce $r : D^n \to \partial D^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Pokud by existovala, máme $r \circ i = 1$ a tedy

$$\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \tag{2.47}$$

definuje automorfismus grupy $\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Ale prostřední člen $\widetilde{H}_{n-1}(D^n)$ je triviální grupa a tedy nutně i_* a r_* jsou triviální zobrazení, což vede ke sporu. ■

Větu 2.5.5 si podrobně nedokážeme, protože vynecháme nejtěžší část. Nejprve si ukážeme, že podobná dlouhá exaktní posloupnost existuje, když homologie X/A nahradíme jinou grupou, tzv. relativní homologií.

Definice 2.5.9. Pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$ můžeme sestrojit faktorgrupu **relativních n-řetězců** $C_n(X,A) = C_n(X)/C_n(A)$. Protože $\partial_n(C_n(A)) \subseteq C_{n-1}(A)$, můžu přirozeně indukovat operátor **relativní hranice** $\partial_n : C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$. Dostávám řetězcový komplex

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X,A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \ , \tag{2.48}$$

a příslušné $H_n(X,A) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$ se nazývají **grupy relativní homologie**.

Označme $q : C_n(X) \to C_n(X,A)$ přirozené faktor-zobrazení z definice relativních n-řetězců. Rovněž z definice dostáváme pro každé n komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{q} & C_n(X,A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{q} & C_{n-1}(X,A) & \longrightarrow & 0 \end{array} \ , \tag{2.49}$$

kde už dál nebudeme explicitně psát stupeň ∂. Oba řádky tvoří krátkou exaktní posloupnost. Označme $A_n = C_n(A)$, $B_n = C_n(X)$ a $C_n = C_n(X,A)$. Jelikož tohle platí pro každé n, můžeme vyrobit komutativní „superdiagram“:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{2.50}$$

Stojí za povšimnutí, že i a q lze interpretovat jako řetězcová zobrazení. Přirozeně tedy indukují zobrazení příslušných homologií $i_* : H_\bullet(A) \to H_\bullet(B)$ a $q_* : H_\bullet(B) \to H_\bullet(C)$. Klíčové je následující obecně platné pozorování:

Tvrzení 2.5.10 (**Hadí lemma**). *Uvažujme scénář jako v diagramu (2.50). Potom pro každé n existuje tzv.* ***spojující homomorfismus*** *$\delta : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ takový, že*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & & H_{n+1}(A) & & H_n(A) & & H_{n-1}(A) & & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \\ \cdots & & H_{n+1}(B) & \overset{\delta}{\nearrow} & H_n(B) & \overset{\delta}{\nearrow} & H_{n-1}(B) & & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \\ \cdots & & H_{n+1}(C) & & H_n(C) & & H_{n-1}(C) & & \cdots \end{array} \tag{2.51}$$

je dlouhá exaktní posloupnost.

Důkaz. Sestrojíme zobrazení $\delta : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$. Uvažujme tedy $[c] \in H_n(C)$ pro nějaké $c \in C_n$. Z předpokladu je q surjektivní a tedy $c = q(b)$ pro nějaké $b \in B_n$. Potom ale $q(\partial b) = \partial(q(b)) = \partial c = 0$, protože c je n-cyklus. Z exaktnosti $\partial b \in \ker(q) = \mathrm{im}(i)$ a tedy nutně existuje (právě jedno) $a \in A_{n-1}$ splňující $\partial b = i(a)$. Definujeme $\delta[c] = [a]$.

V průběhu jsme činili několik voleb, musíme ukázat, že definice δ je na nich nezávislá. Nechť $b' \in B_n$ také splňuje $q(b') = c$. Protože $q(b' - b) = 0$, existuje z exaktnosti (právě jedno) $k \in A_n$, že $b' = b + i(k)$. Stejně jako předtím máme $\partial b' = i(a')$ pro unikátní $a' \in A_{n-1}$. Potom ale

$$i(a') = \partial(b') = \partial(b + i(k)) = i(a + \partial k), \tag{2.52}$$

protože i komutuje s hranicí. Jelikož je z exaktnosti i prosté, máme $a' = a + \partial k$, tedy $[a'] = [a]$.

Dál musíme vyřešit závislost na výběru reprezentanta třídy $[c]$. Nechť $[c'] = [c]$, neboli $c' = c + \partial n$ pro $n \in C_{n+1}$. Protože q je surjektivní, existuje $m \in B_{n+1}$ splňující $q(m) = n$. Můžeme tedy psát $c' = c + \partial n = c + \partial(q(m)) = c + q(\partial m)$. Je-li $c = q(b)$, máme tedy $c' = q(b + \partial m)$. Podle konstrukce popsané výše najdeme a' řešící rovnici $i(a') = \partial(b + \partial m) = \partial b = i(a)$. Z injektivity i ale $a' = a$. Zobrazení δ je tedy dobře definované. Ve zbytku důkazu je třeba objasnit exaktnost sekvence výše. Musíme ukázat trojici vlastností

(i) $\ker(q_*) = \mathrm{im}(i_*)$: Jelikož $q \circ i = 0$ a tedy $q_* \circ i_* = 0$, jedna inkluze je zřejmá. Opačně, nechť $q_*[b] = 0$, což implikuje $q(b) = \partial k$ pro $k \in C_{n+1}$. Protože je q surjektivní, existuje $m \in B_{n+1}$ splňující $k = q(m)$. Potom ale $q(b - \partial m) = 0$. Z exaktnosti máme $a \in A_n$ splňující rovnici $b - \partial m = i(a)$. Ověříme, že a je cyklus. Máme $i(\partial a) = \partial(i(a))\partial(b - \partial m) = \partial b = 0$, protože b reprezentuje třídu homologie. Z injektivity i je $\partial a = 0$. Konečně, $[b] = [i(a) + \partial m] = [i(a)] = i_*[a]$. To dokazuje druhou inkluzi.

(ii) $\ker(\delta) = \mathrm{im}(q_*)$: Nejprve ukážeme, že $\delta \circ q_* = 0$. Nechť $[c] = q_*[b]$ pro $b \in B_n$. Jelikož b reprezentuje homologickou třídu, máme $\partial b = 0$. Ale a v definici δ bylo unikátní řešení rovnice $\partial b = i(a)$. Nutně tedy $a = 0$ a $\delta[c] = [a] = 0$. Opačně, nechť $\delta[c] = 0 = [\partial x]$ pro nějaké $x \in A_n$. Ale ∂x je jednoznačné řešení rovnice $\partial b = i(\partial x)$ pro nějaké $b \in B_n$ splňující $q(b) = c$. Odtud $\partial(b - i(x)) = 0$. Potom $q_*[b - i(x)] = [q(b - i(x))] = [c]$. Tím jsme dokázali opačnou inkluzi $\ker(\delta) \subseteq \mathrm{im}(q_*)$.

(iii) $\mathrm{im}(\delta) = \ker(i_*)$: Rovnice $i_* \circ \delta = 0$ je opět jednoduchá, protože $i_*(\delta[c]) = i_*[a] = [i(a)] = [\partial b] = 0$. Naopak, nechť $i_*[a] = 0$ pro nějaký cyklus $a \in A_{n-1}$. To ale znamená, že $i(a) = \partial b$ pro nějaké $b \in B_n$. Dostáváme $\partial(q(b)) = q(\partial b) = q(i(a)) = 0$. Vidíme, že $q(b)$ může reprezentovat třídu $[q(b)]$. Z konstrukce zřejmě $\delta[q(b)] = [a]$ a opačná inkluze je dokázána.

Nalezli jsme hada a jsme hotovi. ■

Důsledek 2.5.11. *Pro každý topologický prostor X a jeho libovolnou podmnožinu A dostáváme dlouhou exaktní posloupnost homologických grup*

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X, A) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\delta}{\swarrow} \\ H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{q_*} H_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0, \end{array} \tag{2.53}$$

kde $i \in \mathbf{Top}(A, X)$ je inkluze a q_* je indukované zobrazením $q : C_n(X) \to C_n(X, A)$.

Poznámka 2.5.12. Pro $A \neq \emptyset$ můžeme úplně stejně odvodit dlouhou exaktní sekvenci redukovaných homologií, kde se ve stupni -1 přidá krátká exaktní sekvence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0. \tag{2.54}$$

Zejména platí $\widetilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$ pro *každé* n. Konečně, pro libovolné neprázdné podmnožiny $B \subseteq A \subseteq X$ můžeme uvažovat krátkou exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow C_n(A, B) \xrightarrow{i} C_n(X, B) \xrightarrow{q} C_n(X, A) \longrightarrow 0, \tag{2.55}$$

a pomocí hadího lemmatu dostáváme dlouhou exaktní posloupnost s relativními homologickými grupami $H_n(A, B)$, $H_n(X, B)$ a $H_n(X, A)$. Pro $B = \{a\} \subseteq A$ dostaneme dlouhou posloupnost redukovaných homologií.

Příklad 2.5.13. Pro libovolný bod $x_0 \in X$ můžeme uvažovat dlouhou exaktní sekvenci redukovaných homologických grup pro dvojici (X, x_0). Protože $\widetilde{H}_n(x_0) = 0$ pro všechny n, dostáváme exaktní úseky ve tvaru

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X, x_0) \longrightarrow 0, \tag{2.56}$$

což dokazuje, že $H_n(X, x_0) \cong \widetilde{H}_n(X)$.

Důkaz věty 2.5.5 využívá následující klíčovou vlastnost singulární homologie, jejíž důkaz je dalece nad rámec této přednášky. Poznamenejme, že podobně jako pro singulární homologie, každé zobrazení $\varphi : X \to Y$ které splňuje $\varphi(A) \subseteq B$ pro nějaké podmnožiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$, indukuje homomorfismus $\varphi_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

Věta 2.5.14 (**Věta o vyříznutí**). *Pro libovolné množiny $Z \subseteq A \subseteq X$, kde uzávěr Z je ve vnitřku A. Potom vnoření $(X - Z, A - Z) \mapsto (X, A)$ indukuje izomorfismus relativních homologických grup $H_n(X - Z, A - Z) \mapsto H_n(X, A)$ pro každé $n \geq 0$.*

Abychom dokázali větu 2.5.5, zbývá ukázat, že relativní grupy $H_n(X, A)$ a a redukované grupy $\widetilde{H}_n(X/A)$ jsou pro dobrý pár (X, A) izomorfní.

Tvrzení 2.5.15. *Pro dobrý pár (X, A) zobrazení $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ indukuje izomorfismus grup $q_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$.*

Důkaz. Nechť $U \subseteq X$ je okolí uzavřené podmnožiny A která je jeho deformačním retraktem. Můžeme uvažovat komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, U) & \longleftarrow & H_n(X - A, U - A) \\ \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} \\ H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, U/A) & \longleftarrow & H_n(X/A - A/A, U/A - A/A) \end{array} \tag{2.57}$$

Celý problém je v tom, že větu o vyříznutí nemůžeme použít přímo, ale musíme umět „obalit“ množinu A otevřeným okolím, které se na ni dokáže spojitě „smrsknout“. Ukážeme, že všechny horizontální šipky jsou izomorfismy, a nejpravější q_* také. Komutativita zajistí, že homomorfismus označený přerušovaně je izomorfismus.

Levá horní horizontální šipka je izomorfismus protože trojice (A, U, X) dle poznámky 2.5.12 indukuje dlouhou exaktní posloupnost

$$\cdots \longrightarrow H_n(U, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, U) \longrightarrow H_{n-1}(U, A) \longrightarrow \cdots . \quad (2.58)$$

Deformační retrakce U na A indukuje homotopickou ekvivalenci dvojic[3] (U, A) a (A, A). Stejně jako pro singulární grupy platí $H_n(U, A) \cong H_n(A, A) = 0$. Krajní členy v posloupnosti výše jsou tedy triviální a prostřední šipka je isomorfismus. Protože U/A je zjevně deformačním retraktem A/A, stejný argument lze použít na levou dolní horizontální šipku.

Obě pravé horizontální šipky nejsou nic jiného než izomorfismy z věty o vyříznutí. Konečně, nejpravější q_* je izomorfismus, protože restrikce q na $X - A$ je homeomorfismus topologických prostorů $X - A$ a $X/A - A/A$. Tím máme tvrzení dokázané. ■

Věta 2.5.16 (**Věta o invariance dimenze, Brouwer cca 1910**). *Jsou-li $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ dvě homeomorfní otevřené množiny, je $m = n$.*

Důkaz. nechť $x \in U$. Potom $H_k(U, U - \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$ podle věty o vyříznutí. Z dlouhé exaktní posloupnosti (2.53) pro dvojici $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$ dostáváme $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, kde jsme využili, že $\mathbb{S}^{n-1}$ je deformační retrakt $\mathbb{R}^n - \{x\}$. Podle důsledku 2.5.7 tedy $H_n(U, U - \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ a všechny ostatní jsou nula.

Libovolný homeomorfismus $\varphi : U \to V$ ale indukuje izomorfismus relativních homologických grup $H_k(U, U - \{x\})$ a $H_k(V, V - \{\varphi(x)\})$. Odtud snadno vidíme, že nutně $m = n$. ■

Na závěr této sekce si spočítáme ještě dva příklady, které budeme potřebovat v sekci následující.

Příklad 2.5.17. Ukažme si relativní singulární homologii páru $H_i(D^n, \partial D^n)$. Tvrdíme, že

$$H_n(D^n, \partial D^n) = \mathbb{Z}, \quad H_i(D^n, \partial D^n) = 0 \text{ pro } i \neq n. \quad (2.59)$$

Toto se nejjednodušeji dokáže z dlouhé exaktní sekvence pro redukované homologie. Dostáváme tam exaktní úseky ve tvaru

$$\widetilde{H}_i(\partial D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_i(D^n) \longrightarrow H_i(D^n, \partial D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_{i-1}(\partial D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_{i-1}(D^n) \quad (2.60)$$

Pro $i = n$ využijeme toho, že $\widetilde{H}_{n-1}(\partial D^n) = \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$ a dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow H_n(D^n, \partial D^n) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad (2.61)$$

z které plyne první tvrzení. Pro $i \neq n$ je místo $\mathbb{Z}$ nula, z čehož plyne druhé tvrzení.

Příklad 2.5.18. Spočítali jsme, že $H_n(D^n, \partial D^n)$ je netriviální grupa izomorfní $\mathbb{Z}$, t.j. jsou volně generované jednou homologickou třídou. Někdy je užitečné nalézt explicitní předpis pro n-cyklus který ji reprezentuje.

Dvojici $(D^n, \partial D^n)$ je užitečné nahradit ekvivalentní (homeomorfní) dvojicí $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. V singulárním komplexu $C_n(\Delta^n)$ vždy máme n-simplex $\mathbf{1}_n : \Delta^n \to \Delta^n$. Z definice mají všechny simplexy tvořící hranici $\partial\mathbf{1}_n$ hodnoty v $\partial\Delta^n$, z čehož plyne, že $\mathbf{1}_n$ reprezentuje relativní n-cyklus v $C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, označme ho jako $\mathbf{1}'_n$. Tvrdíme, že $[\mathbf{1}'_n] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ je generátor.

[3] Homotopická ekvivalence prostorů, kde homotopie pro každé t zachovávají podmnožiny.

To se ukáže indukcí podle n. Pro $n = 0$ lze tvrzení snadno vidět přímo z definice. Uvažujme tedy $n > 0$ libovolné. Symbolem Λ označme podmnožinu $\partial\Delta^n$ tvořenou všemi stěnami Δ^n kromě jedné. Tvrdíme, že šipky v následujícím diagramu jsou izomorfismy:

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longleftarrow H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \tag{2.62}$$

Levá šipka je spojující homomorfismus v dlouhé exaktní posloupnosti pro trojici $\Lambda \subset \partial\Delta^n \subset \Delta^n$:

$$H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \tag{2.63}$$

Dá se snadno uvidět, že Λ je deformační retrakt Δ^n, odtud ale $H_i(\Delta^n, \Lambda) \cong H_i(\Lambda, \Lambda) = 0$. To mi dává dvě nuly v posloupnosti výše a ukazuje, že spojující homomorfismus je izomorfismus.

Druhá šipka je indukovaná inkluzí stěny $i : \Delta^{n-1} \to \partial\Delta^n$ kterou jsme vynechali v definici Λ. Potom $i(\partial\Delta^{n-1}) \subseteq \Lambda$, máme zobrazení párů a tedy i indukovaný homomorfismus relativních homologií $i_* : H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$. Pro $n = 1$ platí izomorfismus už na úrovni řetězcových komplexů $C_0(\Delta^0) \to C_0(\partial\Delta^1, \Lambda)$, stačí uvažovat $n > 1$. Potom ale $(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ a $(\partial\Delta^n, \Lambda)$ jsou dobré páry. Dostáváme tedy komutativní diagram

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}) & \dashrightarrow & H_{n-1}(\partial\Delta^n/\Lambda), \end{array} \tag{2.64}$$

kde přerušovaná šipka je indukovaná zobrazením $\hat{i} : \Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \to \partial\Delta^n/\Lambda$, které pochází z injektivního vnoření Δ^{n-1} do $\partial\Delta^n$. Snadno je vidět, že $\hat{i}$ je homeomorfismus, což ihned implikuje, že přerušovaná šipka v diagramu nahoře je izomorfismus.

Zbytek důkazu je jednoduchou aplikací indukčního předpokladu. Homologická třída $[\mathbf{1}'_n]$ se spojujícím *izomorfismem* zobrazí na třídu (viz. důkaz hadího lemma) $[\partial\mathbf{1}'_n] \in H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$. V závislosti na tom, kterou přesně stěnu jsme vyndali při definici Λ je ale tato třída rovná $\pm[\mathbf{1}'_{n-1}]$, které podle indukčního předpokladu generují $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ a tedy i $H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$. Vidíme, že $[\mathbf{1}'_n]$ je izomorfním obrazem (až na znaménko) generátoru, a tedy rovněž generátor.

2.6 Singulární versus simpliciální

V předchozí sekci jsme si připravili půdu pro důkaz klíčového tvrzení této kapitoly. Uvažujme nejprve Δ-komplex X a jeho podkomplex A. Podkomplexem rozumíme sjednocení nějakých simplexů z X rovněž tvořící Δ-komplex. Z logiky věci (simpliciální homologie funguje stejně jako singulární, jen používá méně simplexů) můžeme definovat **relativní simpliciální homologii** $H_n^\Delta(X, A)$ jako homologii řetězcového komplexu $\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$. Naprosto analogicky pak můžeme sestavit příslušné krátké exaktní posloupnosti a použít hadí lemma na získání dlouhé exaktní sekvence s grupami $H_n^\Delta(A)$, $H_n^\Delta(X)$ a $H_n^\Delta(X, A)$.

Jelikož každý n-simplex $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ v Δ-komplexu X je z definice singulární simplex v X, snadno dostáváme kanonické řetězcové zobrazení $\Delta_n(X, A) \to C_n(X, A)$, které indukuje homomorfismus grup $H_n^\Delta(X, A) \to H_n(X, A)$. Nyní si ukážeme, že toto zobrazení je izomorfismus. Volbou $A = \emptyset$ pak snadno dostaneme tvrzení pro absolutní homologie.

Věta 2.6.1. *Homomorfismy $H_n^\Delta(X, A) \to H_n(X, A)$ jsou izomorfismy pro libovolné n a všechny dvojice Δ-komplexů (X, A).*

Důkaz. Důkaz si ukážeme pouze pro konečněrozměrný Δ-komplex X, t.j. $X = X^m$ pro nějaké $m \geq 0$. Tvrzení platí obecně, jen se musí trošku více pracovat s topologií celulárních komplexů. Uvažujme nejprve $A = \emptyset$. Indukcí podle k dokážeme, že zobrazení $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ je izomorfismus. Pro $k = 0$ je tvrzení zřejmé, protože izomorfní už jsou i grupy 0-řetězců $\Delta_n(X^0)$ a $C_n(X^0)$. Tím je hotový nultý krok indukce.

Nechť tedy $k > 0$ a tvrzení platí pro všechny nižší kostry. $X^{k-1} \subseteq X^k$ je podkomplex a dostáváme komutativní diagram exaktních posloupností:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}). \end{array} \tag{2.65}$$

Ukážeme, že všechny vertikální šipky kromě té prostřední jsou izomorfismy. Druhá a pátá šipka jsou izomorfismy z indukčního předpokladu. Ukažme si, že první a čtvrtá šipka jsou izomorfismy.

Nejprve je třeba si uvědomit, že grupa relativních n-řetězců $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ je triviální pro $n \neq k$ a $\Delta_k(X^k, X^{k-1})$ je volná abelovská grupa na k-simplexech tvořících Δ-komplex X. Totéž ale musí platit pro simpliciální homologické grupy $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$.

Singulární relativní homologie $H_n(X^k, X^{k-1})$ můžeme vypočítat následujícím trikem. Uvažujme spojité zobrazení $\Phi : \bigsqcup_\alpha (\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) \to (X^k, X^{k-1})$ které je poskládané z k-simplexů $\sigma_\alpha : \Delta^k \to X$ tvořících Δ-komplex X. To zřejmě indukuje homomorfismus grup a komutativní diagram

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_\alpha H_n(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(X^k, \partial X^k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(\Delta_\alpha^k/\partial\Delta_\alpha^k) & \xrightarrow{\hat{\Phi}_*} & \widetilde{H}_n(X^k/X^{k-1}), \end{array} \tag{2.66}$$

kde $\hat{\Phi} : \bigsqcup_\alpha \Delta_\alpha^k/\partial\Delta_\alpha^k \to X^k/X^{k-1}$ je homeomorfismus (každý k-simplex $\sigma_\alpha : \Delta^k \to X$ je zobrazuje $\Delta^k - \partial\Delta^k$ homeomorfně do X). Potom ale $\hat{\Phi}_*$ je izomorfismus a obě vertikální šipky rovněž, jak plyne z tvrzení 2.5.15. To dokazuje, že Φ_* je izomorfismus.

To dokazuje, že $H_n(X^k, \partial X^k)$ je triviální pro $n \neq k$ a $H_k(X^k, \partial X^k)$ je generovaná Φ_*-obrazy generátorů grupy $\bigoplus_\alpha H_n(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k)$. Podle příkladu je každá kopie $H_n(X_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k)$ generovaná třídou $[\mathbf{1}_k']_\alpha$ reprezentovanou k-simplexem $\mathbf{1}_k : \Delta^k \to \Delta^k$. Potom ale

$$\Phi_*[\mathbf{1}_k']_\alpha = [\Phi \circ \mathbf{1}_k] = [\sigma_\alpha] \tag{2.67}$$

Ukázali jsme, že $H_k(X^k, \partial X^k)$ je grupa generovaná třídami $[\sigma_\alpha]$ reprezentovanými k-simplexy $\sigma_\alpha : \Delta^k \to X$ Δ-komplexu. To ale dokazuje, že indukované zobrazení z $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ do $H_n(X^k, X^{k-1})$ zobrazuje generátory na generátory, a tedy je izomorfismus.

Poslední krok je ukázat, že i prostřední krok je izomorfismus. To plyne z následujícího všeobecného tvrzení o morfismech exaktních posloupností:

Lemma 2.6.2 (O pěti izomorfismech). *Uvažujme následující komutativní diagram grup a jejich homomorfismů:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} & & \vdots{\scriptstyle \gamma_3} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_4} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_5} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}, \tag{2.68}$$

kde obě horizontální posloupnosti jsou exaktní a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4$ a γ_5 jsou izomorfismy.

Potom i γ_3 (vyznačený přerušovanou čarou) je izomorfismus.

Důkaz. Důkaz je klasickým „honěním diagramu“. Předpoklady lze trošku zjemnit:

(i) γ_3 je injektivní, je-li γ_2 a γ_4 injektivní a γ_1 surjektivní.

(ii) γ_3 je surjektivní, je-li γ_2 s γ_4 surjektivní a γ_5 injektivní.

Krajní zobrazení tedy nemusí být nutně izomorfismy. Pojďme si dokázat obě části.

Ad (i): Nechť $\gamma_3(a) = 0$. Odtud $(\beta_3 \circ \gamma_3)(a) = (\gamma_4 \circ \alpha_3)(a) = 0$. Protože je γ_4 injektivní, je nutně $\alpha_3(a) = 0$. Z exaktnosti posloupnosti vyplývá, že nutně existuje $k \in A_2$, takové že $a = \alpha_2(k)$. Potom $(\beta_2 \circ \gamma_2)(k) = (\gamma_3 \circ \alpha_2)(k) = 0$. Z exaktnosti dolní posloupnosti $\gamma_2(k) = \beta_1(b)$ pro nějaké $b \in B_1$. Ze surjektivity γ_1 nacházíme $m \in A_1$, že $\gamma_1(m) = b$. Potom $(\gamma_2 \circ \alpha_1)(m) = (\beta_1 \circ \gamma_1)(m) = \beta_1(b)$. Ale γ_2 je injektivní a tedy $\gamma_1(m) = k$. Konečně, dostáváme $a = \alpha_2(k) = \alpha_2(\alpha_1(m)) = 0$, kde jsme použili exaktnost horní sekvence.

Ad (ii): Nechť $b \in B_3$ je libovolné. Ze surjektivity γ_4 pak existuje $k \in A_4$, že $\gamma_4(k) = \beta_3(b)$. Potom ale $(\gamma_5 \circ \alpha_4)(k) = (\beta_4 \circ \gamma_4)(k) = (\beta_4 \circ \beta_3)(b) = 0$, kde jsme využili exaktnost dolní posloupnosti. Z injektivity γ_5 potom nutně $\alpha_4(k) = 0$. Z exaktnosti horní posloupnosti potom existuje $a' \in A_3$, že $k = \alpha_3(b')$. Odtud $(\beta_3 \circ \gamma_3)(a') = (\gamma_4 \circ \alpha_3)(a') = \beta_3(b)$. Vidíme, že $b - \gamma_3(a') \in \ker(\beta_3)$. Z exaktnosti dolní posloupnosti existuje $c \in B_2$, že $\beta(c) = b - \gamma_3(a')$. Konečně, ze surjektivity γ_2 plyne existence $m \in A_2$, že $\gamma_2(m) = c$. Definujeme $a = a' + \alpha_2(m)$. Máme $\gamma_3(a) = \gamma_3(a') + (\gamma_3 \circ \alpha_2)(m) = \gamma_3(a') + (\beta_2 \circ \gamma_2)(m) = \gamma_3(a') + b - \gamma_3(a') = b$. Našli jsme vzor b a jsme hotovi. ∎

Jednoduchou aplikací právě dokázaného lemmatu vidíme, že prostřední šipka v (2.65) je izomorfismus a indukční krok je dokončen. Pro konečněrozměrné X tedy máme zcela dokázán příklad $A = \emptyset$. Případ netriviálního A je ovšem triviální, stačí použít lemma o pěti homomorfismech na komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^\Delta(A) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X,A) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(A) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X,A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}, \tag{2.69}$$

kde všechny šipky až na prostřední jsou již izomorfismy. A máme hotovo. ∎

Důsledek 2.6.3. *Jako vedlejší produkt jsme ukázali, že $H_n(X)$ je **konečně generovaná abelovská grupa** kdykoliv má X konečně mnoho n-simplexů. Je známá věc, že každá konečně generovaná abelovská grupa G je izomorfní*

$$G \cong \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_m}, \tag{2.70}$$

kde $q \geq 0$ a $k_1, \ldots, k_m$ celá čísla ostře větší než 1 taková, že k_i vždy dělí k_{i+1}. Koeficient q se značí jako $\mathrm{rank}(G)$ *a pro $G = H_n(X)$ nazývá **n-té Bettiho číslo prostoru** X a značí jako $b_n(X)$. m-tice čísel $(k_1, \ldots, k_m)$ (uspořádané, s opakováním) celých čísel se nazývají **torzní koeficienty**.*

2.7 Nějaké aplikace

Nyní si můžeme ukázat nějaké známé využití homologické teorie. Umožňuje například zkoumat spojitá zobrazení na sféře.

Definice 2.7.1. Nechť $f \in \mathbf{Top}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n)$ pro $n > 0$. Dostáváme indukované zobrazení $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$. Ukázali jsme, že $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ a tedy $f_*(\alpha) = \deg(f) \cdot \alpha$ pro libovolný generátor $\alpha \in \mathbb{Z}$ a číslo $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, které závisí pouze na f, nazývané **stupeň** f. Z definice a funktoriality homologie snadno dostáváme spoustu vlastností $\deg(f)$:

(i) $\deg(\mathbf{1}) = 1$, protože $\mathbf{1}_* = \mathbf{1}$.

(ii) $\deg(f) = 0$ kdykoliv f není surjektivní. Je-li $x_0 \in \mathbb{S}^n - f(\mathbb{S}^n)$, můžeme f psát jako faktorizaci dvou zobrazení $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$. Jelikož $H_n(\mathbb{S}^n - \{x_0\}) = 0$ z kontraktibility, je nutně $f_* = 0$.

(iii) $\deg(fg) = \deg(f) \cdot \deg(g)$. Homeomorfismus má tedy stupeň ± 1.

(iv) Reflexe podle jedné roviny má stupeň -1, antipodální zobrazení $(-1)^{n+1}$.

(v) Pro $f \cong g$ platí $\deg(f) = \deg(g)$. Platí i opak!

(vi) Zobrazení f nemá žádné fixní body, právě tehdy když je homotopické antipodálnímu.

Věta 2.7.2. *Na sféře $\mathbb{S}^n$ existuje všude nenulové spojité vektorové pole právě tehdy, je-li n liché.*

Důkaz. Nechť $x \mapsto v(x)$ je spojité tečné vektorové pole. $v(x)$ můžeme interpretovat jako vektorové pole v $\mathbb{R}^{n+1}$ v počátku, kde $x \perp v(x)$ pro všechny $x \in \mathbb{S}^n$. Je-li $|v(x)| \neq 0$, můžeme ho normalizovat a uvažovat $|v(x)| = 1$. Potom $\cos(t) \cdot x + \sin(t) \cdot v(x)$ leží na jednotkové kružnici v rovině tvořené vektory x a $v(x)$. Potom

$$H(x,t) = \cos(t) \cdot x + \sin(t) \cdot v(x) \tag{2.71}$$

pro $t \in [0, \pi]$ definuje homotopii z identity do antipodálního zobrazení. Obě musí mí dle předchozí definice stejný stupeň a tedy $(-1)^{n+1} = 1$, tedy n musí být liché.

Naopak, pokud $n = 2k-1$, definujeme $v(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$. Zjevně $v(x) \perp x$ a $|v(x)| = 1$, tedy $x \mapsto v(x)$ je spojité všude nenulové vektorové pole na $\mathbb{S}^n$. ■

V historii topologie sehrála významnou roli tzv. **Eulerova charakteristika** mnohostěnů, definovaná jako $\chi(P) = \#V - \#E + \#F$, kde V, E a F jsou množiny vrcholů, hran a stěn tvořící P. Každý mnohostěn má přirozenou strukturu celulárního komplexu. Můžeme tedy definovat Eulerovu charakteristiku libovolného konečného celulárního komplexu X jako

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n c_n(X), \tag{2.72}$$

kde c_n je počet n-cel v X. Na první pohled není vůbec jasné, že by mělo toto číslo mít vypovídající hodnotu. Ukazuje se ovšem, že pro každý konečný celulární komplex X je $H_n(X)$ opět konečně generovaná a má tedy smysl definovat n-té Bettiho číslo $b_n(X)$. Platí formulka

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n b_n(X). \tag{2.73}$$

Na podrobný důkaz není dostatek prostoru. Podobně jako pro Δ-komplexy se dá přímo ukázat, že $H_k(X^n, X^{n-1})$ je triviální pro $n \neq k$ a volná abelovská s bází odpovídající k-celám pro $n = k$. Platí tedy $\operatorname{rank}(H_k(X^k, X^{k-1})) = c_k(X)$. Dále existuje řetězcový komplex $C_k^{CW} = H_k(X^k, X^{k-1})$ tvořený těmito operátory s jistým operátorem hranice $d_k : C_k^{CW} \to C_{k-1}^{CW}$. Příslušné homologické grupy H_k^{CW} definují tzv. **celulární homologii** X. Platí $H_k(X) \cong H_k^{CW}(X)$. Pro libovolný řetězcový komplex (C_k, d_k) můžeme sestrojit dvojici krátkých exaktních sekvencí

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Jsou-li všechny grupy konečně generované, hodnost prostřední grupy je součtem krajních. Dostáváme tedy rovnosti $\operatorname{rank}(Z_n) = \operatorname{rank}(B_n)+\operatorname{rank}(H_n)$ a $\operatorname{rank}(C_n) = \operatorname{rank}(Z_n)+\operatorname{rank}(B_{n-1})$. Dosazením první rovnice do druhé a střídavým součtem přes n potom

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(C_n) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(H_n). \tag{2.75}$$

Volbou $C_n = C_n^W$ ale dostáváme přesně rovnost (2.72) a (2.73).

Příklad 2.7.3. Eulerova charakteristika $\chi(X)$ je definovaná pro velké množství prostorů. Ihned například dostáváme následující tvrzení:

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 0, \;\; \chi(K) = 0, \;\; \chi(\mathbb{S}^n) = 1+(-1)^n, \;\; \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \frac{1}{2}(1+(-1)^n), \;\; \chi(M^g) = 2(1-g). \tag{2.76}$$

Kapitola 3

Kohomologie

V poslední kapitole této přednášky se budeme zaobírat matematickou teorií, která je v jistém smyslu plně duální k homologické teorie. Jinými slovy, budeme uvažovat **kořetězcové komplexy**

$$\ldots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \xrightarrow{d_n} C^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \ldots, \tag{3.1}$$

posloupnosti abelovských grup a jejich morfismů, přičemž platí $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pro každé n. d_n se nazývá **operátor kohranice** nebo též **diferenciál**[1]. Zcela analogicky definujeme n-kocykly $Z^n = \ker(d_n)$ a n-kohranice $B^n = \mathrm{im}(d_{n-1})$. Příslušná **$n$-tá kohomologie** je jejich faktorgrupa $H^n = Z^n/B^n$. Prvky H^n se nazývají **kohomologické třídy** a platí $[\alpha'] = [\alpha]$, pokud $\alpha' = \alpha + d_{n-1}\omega$, říkáme, že α a α' jsou **kohomologické**. Spousta tvrzení o kohomologiích je pouhou modifikací podobných nápadů pro homologie.

Příklad 3.0.1. Nechť $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ je řetězcový komplex, kde každá abelovská grupa n-řetězců tvoří $\mathbb{Z}$-modul. Máme tedy definovanou operaci násobení celým číslem, která se chová jak má (distributivní, kompatibilní se strukturou okruhu v $\mathbb{Z}$).

Definujeme $C^n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, \mathbb{Z})$, t.j. n-kořetězce jsou $\mathbb{Z}$-lineární zobrazení z C_n do $\mathbb{Z}$. Operátor kohranice d_n definujeme pomocí ∂_n. Nechť $\alpha \in C^n$ a $\sigma \in C_{n+1}$. Potom

$$(d_n\alpha)(\sigma) := \alpha(\partial_{n+1}\sigma). \tag{3.2}$$

Snadno se ověří, že $(C^\bullet, d_\bullet)$ je kořetězcový komplex.

3.1 de Rhamova kohomologie

My se však budeme zabývat zejména kohomologickou teorií, kterou lze přímo přiřadit nějakému geometrickému objektu. Těmi budou v této sekci hladké variety, velmi dobře vychované topologické prostory s extra (hladkou) strukturou.

Definice 3.1.1. Nechť M je hladká varieta. Potom dostáváme kořetězcový komplex

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{N-1}} \Omega^N(M) \xrightarrow{d_N} 0, \tag{3.3}$$

[1] Původ tohohle názvu bude záhy zřejmý.

kde $N = \dim(M)$, $\Omega^n(M)$ je prostor hladkých n-forem a d_n je operátor vnější derivace. O něm je známo že splňuje $d_{n+1} \circ d_n = 0$, a tedy $(\Omega^\bullet(M), d)$ definuje[2] kořetězcový **de Rhamův** komplex.

Podgrupu Z^n tvoří **uzavřené n-formy** a B^n **exaktní n-formy**. Příslušná kohomologie $H^n(M)$ se nazývá **de Rhamova kohomologie variety** M.

Příklad 3.1.2 (**Kohomologie přímky**)**.** Uvažujme $M = \mathbb{R}$. Máme $\Omega^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$. Pro $f \in \Omega^0(\mathbb{R})$ je $df = f'(x)dx$ a tedy Z^0 jsou konstantní funkce, $Z^0 = \mathbb{R}$. Navíc $B^0 = 0$ a tedy $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Jelikož $\dim(\mathbb{R}) = 1$, máme nutně $Z^1 = \Omega^1(\mathbb{R})$. Nechť $\alpha = \alpha(x)dx$ je libovolná (uzavřená) 1-forma. Definujeme $f(x) = \int_0^x \alpha(t)dt$. Potom $df = f'(x)dx = \alpha(x)dx$. Každá exaktní forma je uzavřená, odkud dostáváme tvrzení

$$H^n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Mírnou modifikací, která ovšem může mít zajímavé odlišnosti, je uvažovat pouze speciální n-formy na M. Připomeňme, že **funkce s kompaktním nosičem na** M jsou takové, že

$$\mathrm{Supp}(f) = \mathrm{Cl}\{x \in M \mid f(x) \neq 0\} \tag{3.5}$$

je kompaktní množina (nosič funkce f) v M. Analogicky lze definovat prostor **n-forem s kompaktním nosičem** $\Omega_c^n(M)$. Z vlastností derivací plyne, že $\mathrm{Supp}(d\alpha) \subseteq \mathrm{Supp}(\alpha)$. Uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní a restrikcí d tedy dostáváme **kompaktní de Rhamův komplex**

$$0 \longrightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{N-1}} \Omega_c^N(M) \xrightarrow{d_N} 0, \tag{3.6}$$

a příslušnou **kompaktní de Rhamovu kohomologii** $H_c^\bullet(M)$.

Příklad 3.1.3 (**Kompaktní kohomologie přímky**)**.** Tentokrát je Z^0 prostor konstantních funkcí *s kompaktním nosičem*, t.j. zřejmě $Z^0 = 0$. Protože ji $B^0 = 0$, máme $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$.

Můžeme definovat lineární zobrazení ψ z $\Omega_c^1(\mathbb{R})$ do $\mathbb{R}$ pomocí integrálu:

$$\psi[\alpha(x)dx] := \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)dx \tag{3.7}$$

Integrál konverguje z důvodu kompaktnosti nosiče α. Zobrazení je zjevně surjektivní. Ukážeme, že jeho jádro jsou právě exaktní 1-formy s kompaktním nosičem. Nechť tedy $\alpha(x) = f'(x)dx$ pro $f \in \Omega_c^0(\mathbb{R})$. Nosič f je kompaktní a tedy celý v nějakém otevřeném intervalu (a, b). Potom

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = 0. \tag{3.8}$$

Opačně, nechť $\alpha(x)dx$ leží v jádru ψ . Definujeme funkci f vztahem $f(x) = \int_{-\infty}^x \alpha(y)dy$. Z nulovosti integrálu přes celé $\mathbb{R}$ plyne, že f má kompaktní nosič. Navíc $\alpha(x)dx = df = f'(x)dx$ a tedy každá forma z jádra ψ je exaktní. Potom

$$H_c^1(\mathbb{R}) = \Omega_c^1(\mathbb{R})/B^1 = \Omega_c^1(\mathbb{R})/\ker(\psi) \cong \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Souhrnem tedy dostáváme následující tvrzení:

$$H_c^n(\mathbb{R}) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } n = 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

[2] Často nebudeme psát dolní index u d_n.

Na závěr si ujasněme, že nultá de Rhamova kohomologie má podobně jako nultá singulární homologie přímý geometrický význam. Vskutku, máme $H^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid df = 0\}$. Takovým funkcím se říká lokálně konstantní. Každá taková je konstantní na každé komponentě křivkové souvislosti. Lokálně konstantní funkci tedy určíme zadáním konstanty na každé komponentě křivkové souvislosti. Odtud

$$H^0(M) = \prod_\alpha \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

kde α probíhá komponenty křivkové souvislosti.

Poznámka 3.1.4. De Rhamův komplex i příslušné kohomologie mají ve skutečnosti navíc extra strukturu oproti např. singulární homologii. Tvoří totiž vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Toho můžeme a budeme využívat v následujícím.

3.2 Mayer-Vietorisova posloupnost

Klíčovou dovedností je pochopitelně možnost počítat de Rhamovu kohomologii větších prostorů ze znalosti de Rhamovy kohomologie jeho součástí. Nejprve je třeba si uvědomit jednu základní vlastnost de Rhamovy kohomologie - její chování vzhledem k hladkým zobrazením.

Tvrzení 3.2.1. *Pro každé variety M a N a hladké zobrazení $\varphi : M \to N$ máme pullback diferenciálních forem $f^* : \Omega^n(N) \to \Omega^n(M)$, který komutuje s vnější derivací, $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$. Definuje tedy* ***kořetězcové zobrazení*** *a předpis $\varphi^*[\alpha] = [\varphi^*\alpha]$ definuje* ***indukovaný homomorfismus kohomologických grup****. Platí*

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \;\; \mathbf{1}^* = \mathbf{1}. \tag{3.12}$$

Jinými slovy, přiřazení $M \mapsto \Omega^\bullet(M)$ je kontravariantní[3] *funktor z kategorie hladkých variet* $\mathbf{Man}^\infty$ *do kategorie abelovských grup* $\mathbf{Ab}$.

Důsledek 3.2.2. *Difeomorfní variety mají izomorfní kohomologické grupy.*

Klíčovou vlastností variet pro následující tvrzení bude existence tzv. rozkladu jedničky Připomeňme si tedy jeho definici.

Definice 3.2.3 (**Rozklad jedničky**). Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí variety M. Nechť $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce hladkých funkcí na M, které splňují:

(i) $\mathrm{Supp}(\rho_\alpha) \subseteq U_\alpha$, $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$;

(ii) Každý bod $x \in M$ má okolí, které má neprázdný průnik pouze s konečně mnoho množinami $\mathrm{Supp}(\rho_\alpha)$. Jinými slovy, systém $\{\mathrm{Supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je tzv. lokálně konečný.

(iii) Pro každé $x \in M$ platí $\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha(x) = 1$. Podle (ii) je tato suma pro každé x konečná.

Dá se ukázat, že rozklad jedničky existuje pro libovolné otevřené pokrytí M.

[3] Kontravariantní funktor je stejný jako obyčejný, ale indukované zobrazení a pravidlo skládání jsou opačně.

Nyní uvažujme situaci, kde $M = U \cup V$ pro dvě otevřené podmnožiny. Dostáváme následující dvojici posloupností variet a jejich hladkých zobrazení:

$$M \longleftarrow U \sqcup V \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\leftleftarrows}} U \cap V \ , \tag{3.13}$$

kde levá šipka je kanonické surjektivní zobrazení z disjunktního zobrazení na sjednocení opravdové a ∂_0 (respektive ∂_1) je vnoření $U \cap V$ do kopie V (respektive U) v disjunktním sjednocení $U \sqcup V$. Dostáváme tedy dvojici prostorů forem s šipkami naopak:

$$\Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \underset{\partial_1^*}{\overset{\partial_0^*}{\rightrightarrows}} \Omega^\bullet(U \cap V) \tag{3.14}$$

Připomeňme, že například ∂_0^* zobrazuje dvojici $(\omega, \tau) \in \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$ na formu $\hat{\tau} \in \Omega^\bullet(U \cap V)$, která je fakticky pouze restrikcí τ na otevřenou podmnožinu $U \cap V$. Pomocí těchto zobrazení definujeme posloupnost

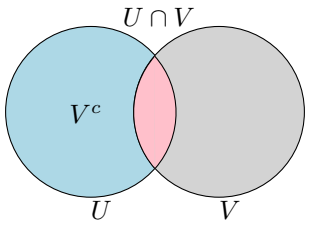
$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \xrightarrow{\eta} \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0, \tag{3.15}$$

kde $\eta(\omega, \tau) := (\partial_0^* - \partial_1^*)(\omega, \tau) = \hat{\tau} - \hat{\omega}$. První šipka zobrazí formu $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ na dvojici jejich restrikcí $(\omega_U, \omega_V) \in \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$. Právě jsme dostali **Mayer-Vietorisovu posloupnost**.

Tvrzení 3.2.4. *Mayer-Vietorisova posloupnost je exaktní.*

Důkaz. Je-li $(\omega_U, \omega_V) = 0$, zjevně je $\omega = 0$ na celém $M = U \cup V$. Levá šipka je tedy injektivní zobrazení. Dál $(\omega, \tau) \in \ker(\eta)$ právě tehdy když ω a τ splývají na průniku $U \cap V$. Potom ale definují formu $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$, že $(\omega, \tau) = (\alpha_U, \alpha_V)$. Jádro η je tedy přesně obraz levé šipky. Zbývá ukázat, že η je surjektivní zobrazení.

Nechť $\omega \in \Omega^\bullet(U \cap V)$. Nechť $\{\rho_U, \rho_V\}$ je rozklad jedničky příslušný pokrytí $\{U, V\}$. Stačí si uvědomit, že můžeme dobře definovat formu $\rho_V \omega$ na U. Protože $U = (U \cap V) \sqcup V^c$, viz. obrázek,



stačí si uvědomit, že $\mathrm{Supp}(\rho_V) \subseteq V$ a tedy $\rho_V \omega$ je hladké a dobře definované na $U \cap V$ a nula na V^c. Obdobně $\rho_U \omega \in \Omega^\bullet(V)$. Potom ale

$$\eta(-\rho_V \omega, \rho_U \omega) = (\rho_U + \rho_V)\omega = \omega. \tag{3.16}$$

Tím jsme dokázali, že zobrazení η je surjektivní. ∎

Důsledek 3.2.5. *Je-li $M = U \cup V$, dostáváme dlouhou exaktní posloupnost kohomologií:*

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow H^n(M) \longrightarrow H^n(U) \oplus H^n(V) \xrightarrow{\eta_*} H^n(U \cap V) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\delta}{\swarrow} \\ H^{n+1}(M) \longrightarrow H^{n+1}(U) \oplus H^{n+1}(V) \xrightarrow{\eta_*} H^{n+1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{3.17}$$

Spojující homomorfismus δ můžeme explicitně definovat následovně. Nechť $[\omega] \in H_n(U \cap V)$. Máme $\omega = \eta(-\rho_V\omega, \rho_U\omega)$. Potom ale $\eta(-d(\rho_V\omega), d(\rho_U\omega)) = d\omega = 0$. To ale znamená, že existuje forma $\alpha \in \Omega^{n+1}(M)$, že $(\alpha_U, \alpha_V) = (-d(\rho_V\omega), d(\rho_U\omega))$. Tato forma je uzavřená a definujeme $\delta[\omega] = [\alpha]$.

Posloupnost (3.17) se rovněž nazývá ***Mayer-Vietorisova posloupnost****.*

Důkaz. Aplikace hadího lemma na posloupnost (3.14) která je exaktní podle předchozího tvrzení. Všimněte si, že v kohomologiích spojující homomorfismus zvyšuje stupeň. ■

Příklad 3.2.6 (Kohomologie kružnice). Mayer-Vietoris se dá snadno použít na výpočet de Rhamovy kohomologie kružnice $H^\bullet(\mathbb{S}^1)$. Zjevně $\mathbb{S}^1 = U \cup V$, kde U a V jsou otevřené oblouky co se na dvou koncích kružnice překrývají. Máme tedy $U, V \cong \mathbb{R}$ a $U \cap V \cong \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$. Mayer-Vietorisova posloupnost má tvar

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}) \oplus H^0(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\eta_*} & H^0(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) & & \\ & & & & & \overset{\delta}{\swarrow} & & & \\ & & H^1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{\quad} & H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\eta_*} & H^1(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{3.18}$$

Po dosazení známých věcí tedy dostáváme posloupnost

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\eta_*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0 \tag{3.19}$$

Už jsme si ujasnili, že $H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$, protože $\mathbb{S}^1$ je křivkově souvislá varieta. Protože první šipka je injektivní, máme $\dim(\ker \eta_*) = 1$. Odtud ale nutně $\dim(\operatorname{im} \eta_*) = 1$ ze standardní lineární algebry. Z exaktnosti ale také $\dim(\ker(\delta)) = \dim(\operatorname{im} \eta_*) = 1$. Protože δ je surjektivní, máme $\dim(H^1(\mathbb{S}^1)) = \dim(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) - \dim(\ker(\delta)) = 1$. A tedy $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$.

Ve skutečnosti můžeme přímo zkonstruovat uzavřenou 1-formu reprezentující generátor $H^1(\mathbb{S}^1)$. Uvažujme uzavřenou 0-formu $\alpha \in \Omega^0(U \cap V)$ definovanou jako konstanta 1 na jedné komponentě $U \cap V$ a 0 na druhé. Aby $\delta[\alpha] \in H^1(\mathbb{S}^1)$ tvořilo bázi, stačí aby $[\alpha] \notin \ker(\delta) = \operatorname{im}(\eta_*)$. Nesmí tedy existovat dvojice konstantních 0-forem $(\omega, \tau) \in \Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V)$, že $\alpha = \eta(\omega, \tau)$. Ale to je zřejmé, protože $\eta(\omega, \tau)$ musí být na obou komponentách $U \cap V$ rovno stejné konstantě $(\tau - \omega)(x)$.

Nyní na $[\alpha]$ stačí aplikovat proces popsaný výše. Máme $\alpha = \eta(-\rho_V\alpha, \rho_U\alpha)$. Potom dvojice $(-d(\rho_V\alpha), d(\rho_U\alpha))$ 1-forem na U a V souhlasí na $U \cap V$ a pocházejí tedy z restrikce jedné uzavřené 1-formy $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$. Snadno lze vidět, že ω je forma s kompaktním nosičem uvnitř jedné z komponent $U \cap V$, takovým se říká „bump formy“. Z konstrukce $[\omega] = \delta[\alpha]$ generuje de Rhamovu kohomologii $H^1(\mathbb{S}^1)$.

Poznámka 3.2.7. Existuje i Mayer-Vietorisova posloupnost pro kompaktní kohomologii. Kupodivu se výrazně liší, protože obecně pullback φ^* nezachovává kompaktnost nosiče. Použije se následujícího triku. Je-li $i : U \to M$ inkluze otevřené množiny, můžeme vzít formu $\omega \in \Omega^\bullet_c(U)$ a dodefinovat ji nulou na zbytku M, čímž dostaneme $i_*(\omega) \in \Omega^\bullet_c(M)$. Dostáváme tedy homomorfismus opačně než pro normální kohomologie: $i_* : H^\bullet_c(U) \to H^\bullet_c(M)$. Potom dostáváme posloupnost

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet_c(U \cap V) \longrightarrow \Omega^\bullet_c(U) \oplus \Omega^\bullet_c(V) \longrightarrow \Omega^\bullet_c(M) \longrightarrow 0. \tag{3.20}$$

První šipka je „orientovaná inkluze“, druhá šipka sečte rozšíření obou forem v M. Dá se ukázat, že tato posloupnost je exaktní a tedy naprosto analogicky indukuje dlouhou exaktní posloupnost na kompaktních kohomologiích.

3.3 Poincarého lemma

V této části si ukážeme zásadní tvrzení o de Rhamových topologiích. Uvažujme následující dvojici zobrazení hladkých variet:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n \ , \tag{3.21}$$

kde $\pi(x,t) = x$ je projekce a $s(x) = (x,0)$ je nulový řez. Na úrovni forem tedy dostáváme diagram

$$\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{s^*}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) \tag{3.22}$$

Zjevně platí rovnost $\pi \circ s = \mathbf{1}$ a tedy i $s^* \circ \pi^* = \mathbf{1}$. Opačně máme $(s \circ \pi)(x,t) = (x,0)$, což není identita. Ani na úrovni forem neplatí, že $\pi^* \circ s^* = \mathbf{1}$, protože například $s^*(dt) = 0$. Na úrovni kohomologií jsme však úspěšnější, jak si nyní dokážeme:

Tvrzení 3.3.1. *Zobrazení $\pi^* : H^\bullet(\mathbb{R}^n) \to H^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ je izomorfismus.*

Důkaz. Pro důkaz tvrzení stačí nalézt zobrazení $K : \Omega^\bullet(R^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ splňující

$$\mathbf{1} - \pi^* \circ s^* = \pm(K \circ d \pm d \circ K). \tag{3.23}$$

Pravá strana zobrazuje všechny uzavřené formy na exaktní a tedy definuje nulové zobrazení kohomologických grup. Každá forma ω na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ je unikátní lineární kombinace forem z jedné z následujících dvou tříd

(i) $f(x,t) \cdot (\pi^*\phi)$,

(ii) $f(x,t) \cdot (\pi^*\phi) \wedge dt$,

kde $\phi \in \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$ je forma na bázi $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Zobrazení $K : \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ definujeme zvlášť na každém z obou typů:

(i) $K[f(x,t) \cdot (\pi^*\phi)] = 0$,

(ii) $K[f(x,y) \cdot (\pi^*\phi) \wedge dt] = (\int_0^t f(x,s)ds) \cdot \pi^*(\phi)$.

Zbývá ověřit, že K splňuje rovnici (3.23). Nechť ω je q-forma typu (i). Potom

$$\begin{aligned}(\mathbf{1} - \pi^* \circ s^*)(\omega) &= f(x,t) \cdot (\pi^*\phi) - \pi^*(f(x,0) \cdot \phi) \\ &= \{f(x,t) - f(x,0)\} \cdot (\pi^*\phi).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Na druhou stranu, několikerým použitím definice K dostáváme

$$\begin{aligned}(K \circ d - d \circ K)(\omega) &= K(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \cdot \{dt \wedge (\pi^*\phi)\}) \\ &= (-1)^q(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)) \cdot (\pi^*\phi) \\ &= (-1)^q\{f(x,y) - f(x,0)\} \cdot (\pi^*\phi).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Vidíme, že na formách typu (i) platí rovnost $\mathbf{1} - \pi^* \circ s^* = (-1)^q(K \circ d - d \circ K)$. Na formách typu (ii) máme $s^*(\omega) = 0$ a tedy $(\mathbf{1} - \pi^* \circ s^*)(\omega) = \omega$. Potom máme

$$d\omega = f(x,t) \cdot (\pi^* d\phi) \wedge dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,t) dx^i \wedge (\pi^*\phi) \wedge dt, \tag{3.26}$$

a působením K tedy dostáváme

$$K(d\omega) = (\int_0^t f(x,s)ds) \cdot (\pi^* d\phi) + \sum_{i=1}^{n} (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,s)ds) \cdot dx^i \wedge (\pi^*\phi). \tag{3.27}$$

Na druhou stranu, působením operátoru d na $K(\omega)$ dostáváme

$$\begin{aligned} -d(K(\omega)) = & -d((\int_0^t f(x,s)ds) \cdot (\pi^*\phi)) \\ = & -f(x,t) \cdot (dt \wedge (\pi^*\phi)) - \sum_{i=1}^{n} (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,s)) \cdot dx^i \wedge (\pi^*\phi) \\ & - (\int_0^t f(x,s)ds) \cdot (\pi^* d\phi). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sečtením obou výrazů opravdu dostáváme $K(d\omega) - d(K(\omega)) = (-1)^q\omega$. ■

Toto tvrzení má několik zásadně důležitých důsledků, přičemž jeden z nich je slavné Poincarého lemma, které počítá kohomologie eukleidovského prostoru.

Věta 3.3.2 (**Poincarého lemma**). *Platí následující:*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k = 0, \\ 0 & \text{pro } k \neq 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Jinými slovy, každá uzavřená k-forma na $\mathbb{R}^n$ je exaktní (pro $k > 0$).

Důkaz. Indukcí podle k. ■

Důsledek 3.3.3. *Snadnou modifikací důkazu tvrzení 3.3.1 zjistíme, že pro projekci $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$, kde M je libovolná hladká varieta, je zobrazení $\pi^* : H^\bullet(M) \to H^\bullet(M \times \mathbb{R})$ izomorfismus.*

Důsledek 3.3.4. *Nechť $f, g : M \to N$ jsou dvě hladká homotopická zobrazení. Potom $f^* = g^*$ jako zobrazení de Rhamových kohomologií.*

De Rhamova kohomologie je tedy invariantem homotopické ekvivalence. Pro každou kontraktibilní varietu M v důsledku platí $H^0(M) = \mathbb{R}$ a $H^k(M) = 0$ pro $k \neq 0$.

Důkaz. Hladká homotopie f a g je hladké zobrazení $H : M \times \mathbb{R} \to N$, takové, že $H(x,t) = f(x)$ pro $t \leq 0$ a $H(x,t) = g(x)$ pro $t \geq 1$. Nechť $s_0 : M \to M \times \mathbb{R}$ a $s_1 : M \to M \times \mathbb{R}$ je nulový (respektive jednotkový) řez, takže platí $H \circ s_0 = f$ a $H \circ s_1 = g$. Potom

$$f^* = s_0^* \circ H^*, \quad g^* = s_1^* \circ H^*. \tag{3.30}$$

Na úrovni kohomologií ale máme $s_0^* = (\pi^*)^{-1} = s_1^*$ a obě zobrazení tedy splývají. ■

Příklad 3.3.5 (**de Rhamova kohomologie sfér**). Uvažujme $M = \mathbb{S}^n$. Napíšeme $M = U \cup V$, kde U a V jsou kontraktibilní a $U \cap V$ je difeomorfní $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Indukcí podle n dokážeme, že

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } k = n, \\ 0 & \text{pro } k \notin \{0, n\}. \end{cases} \tag{3.31}$$

Pro $n \in \{0, 1\}$ už máme dokázáno. Pro $n > 1$, s použitím Mayer-Vietorisovy posloupnosti dostáváme $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$ a protože $\mathbb{S}^n$ je křivkově souvislý, máme $H^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$. Pro $k > 1$ pak platí $H^k(\mathbb{S}^n) = H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Použitím indukčního předpokladu dostáváme výsledek.

Poznámka 3.3.6 (**Poincarého Lemma pro kompaktní nosiče**). Podobnými úvahami jako předtím se dá dokázat kompaktní verze Poincarého lemma:

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k = n, \\ 0 & \text{pro } k \neq n. \end{cases} \tag{3.32}$$

To mimochodem ukazuje, že kompaktní de Rhamova kohomologie není invariant homotopické ekvivalence. Při difeomorfismech se ale zachovává.

3.4 Čechova-de Rhamova kohomologie

V této sekci si ukážeme, jak lze v jistých případech převést výpočet de Rhamovy kohomologie na kombinatorický problém (v tomhle ohledu to připomíná simpliciální homologii). Nejprve musíme uvažovat pokrytí (analog triangulace) speciálním druhem otevřených množin.

Definice 3.4.1. Nechť $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí n-rozměrné variety M. Řekneme, že $\mathcal{U}$ je **dobré pokrytí**, je-li každý *neprázdný* konečný průnik $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ otevřených množin z $\mathcal{U}$ difeomorfní $\mathbb{R}^n$.

Hlavní idea za dobrými pokrytími je přirozeně ta, že z Poincarého lemmatu přesně víme, jak vypadají kohomologie množin z $\mathcal{U}$, všech jejich průniků a chytrým užíváním Mayer-Vietorisovy posloupnosti i jejich jistých sjednocení. Připomeňme, že pro dvě pokrytí $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ a $\mathcal{B} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ řekneme, že $\mathcal{B}$ je **zjemnění** $\mathcal{U}$, psáno $\mathcal{U} < \mathcal{B}$, pokud existuje zobrazení $\phi : J \to I$, takové, že $V_\beta \subseteq U_{\phi(\beta)}$.

Věta 3.4.2. *Nechť M je libovolná varieta. Potom každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má zjemnění $\mathcal{B}$, které je dobrým pokrytím M. Zejména každá kompaktní varieta má konečné dobré pokrytí.*

Jako jeden příklad aplikace této definice si ukážeme následující jednoduché tvrzení.

Tvrzení 3.4.3. *Má-li M konečné dobré pokrytí, je příslušná de Rhamova kohomologie $H^\bullet(M)$ konečně-rozměrná.*

Důkaz. Z exaktnosti Mayer-Vietorisovy posloupnosti

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^n(U \cup V) \xrightarrow{r} H^n(U) \oplus H^n(V) \longrightarrow \cdots \tag{3.33}$$

plyne, že $H^n(U \cup V) \cong \mathrm{im}(\delta) \oplus \ker(r)$. Jsou-li tedy de Rhamovy kohomologie U, V i $U \cap V$ konečněrozměrné, nutně je i kohomologie $U \cup V$. Budeme postupovat indukcí na počet množin

tvořící otevřené pokrytí M. Varieta s dobrým pokrytím jedinou množinou je difeomorfní $\mathbb{R}^n$ a $H^q(M)$ je konečněrozměrná z Poincarého lemma.

Pro indukční krok předpokládejme, že každá varieta s dobrým pokrytím nejvýše k množinami má konečněrozměrnou de Rhamovu kohomologii. Nechť $\{U_0, \dots, U_k\}$ je dobré pokrytí M pomocí $k+1$ množin. Potom varieta $(U_0 \cup \cdots \cup U_{k-1}) \cap U_k$ má dobré pokrytí k množinami, a tedy konečněrozměrou de Rhamovu kohomologii z indukčního předpokladu. Stejné lze říct o $U_0 \cup \cdots \cup U_{k-1}$ a U_k a tvrzení plyne z předchozího odstavce. ■

Nyní předpokládejme, že $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí variety M, kde I js spočetná a uspořádaná množina (klidně může být konečná). Zavedeme označení

$$U_{\alpha_1 \dots \alpha_k} := U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k} \tag{3.34}$$

a uvažujme (obecně nekonečnou) posloupnost inkluzí

$$M \longleftarrow \bigsqcup U_\alpha \;\underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\leftarrow\!\!\leftarrow}}\; \bigsqcup_{\alpha_0<\alpha_1} U_{\alpha_0\alpha_1} \;\underset{\partial_2}{\overset{\partial_0}{\overset{\partial_1}{\leftarrow\!\!\leftarrow\!\!\leftarrow}}}\; \bigsqcup_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \;\overset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\leftarrow\!\!\leftarrow}}}}\; \dots\,, \tag{3.35}$$

kde $\partial_i : U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \to U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_k}$ „vynechá“ i-tou množinu. Například pro $k=2$ máme

$$\partial_0 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \to U_{\alpha_1\alpha_2},\;\; \partial_1 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \to U_{\alpha_0\alpha_2},\;\; \partial_2 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \to U_{\alpha_0\alpha_1}. \tag{3.36}$$

Funktor přiřazující de Rhamovy kořetězcové komplexy nám přiřadí opačnou posloupnost.

$$\Omega^\bullet(M) \xrightarrow{\;r\;} \prod \Omega^\bullet(U_\alpha) \;\underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightarrow\!\!\rightarrow}}\; \prod_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1}) \;\underset{\delta_2}{\overset{\delta_0}{\overset{\delta_1}{\rightarrow\!\!\rightarrow\!\!\rightarrow}}}\; \prod_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \;\overset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\rightarrow\!\!\rightarrow}}}}\; \dots\,, \tag{3.37}$$

kde δ_i jsou restrikce indukované vnořeními výše. Připomeňme, obecný element prostoru

$$\omega \in \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k}) \tag{3.38}$$

je posloupnost $\omega = (\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k})_{\alpha_0<\cdots<\alpha_k}$, kde $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \in \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$. Výsledek působení $\delta_i\omega$ je tedy opět posloupnost, jejíž element $(\delta_i\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}}$ má tvar

$$(\delta_i\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} = \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{k+1}}|_{U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{k+1}}}. \tag{3.39}$$

Pro zjednodušení značení *nebudeme* explicitně psát restrikce na otevřené podmnožiny. Podobně jako při důkazu Mayer-Vietorisovy posloupnosti nyní z několika šipek vyrobíme jednu.

Definice 3.4.4. Nechť $\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$ má komponenty $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \in \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$. Definujeme element $\delta\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}})$ pomocí příslušných komponent jako

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (\delta_i\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} \equiv \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{k+1}}, \tag{3.40}$$

Jak si operátor δ představit? Předpokládejme, že $M = U_0 \cup U_1 \cup U_2$. Potom například $\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0})$ je trojice $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$, kde $\omega_i \in \Omega(U_i)$. Prostor $\prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1})$ je tvořen trojicemi $(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{12})$, kde $\omega_{ij} \in \Omega^\bullet(U_i \cap U_j)$ pro $i<j$. Potom

$$\delta(\omega)_{01} = \omega_1 - \omega_0,\;\; \delta(\omega)_{02} = \omega_2 - \omega_0,\;\; \delta(\omega)_{12} = \omega_2 - \omega_1, \tag{3.41}$$

kde na pravých stranách jsou implicitně myšleny restrikce na společné průniky definičních oborů jednotlivých forem. Přestože restrikce nepíšeme, je potřeba si uvědomit, že průniky mohou být prázdné. Pokud je například $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, bude $\delta(\omega)_{01} = 0$! Klíčovou vlastností δ je následující

Lemma 3.4.5. *Platí rovnost $\delta^2 = 0$.*

Důkaz. Důkaz je stejný jako vždycky - výsledek je dvojná suma, kde se po dvojicích odečtou členy kvůli rozdílným znaménkům. ■

Poznámka 3.4.6. Často se pro komponenty $\omega_{\alpha_0\dots\alpha_k}$ užívá konvence, kde se povolí libovolné uspořádání indexů, přičemž platí

$$\omega_{\dots\alpha\dots\beta\dots} = -\omega_{\dots\beta\dots\alpha\dots}. \tag{3.42}$$

Například pro $I = \mathbb{N}_0$ máme $\omega_{021} = -\omega_{012} = \omega_{102}$ nebo $\omega_{001} = 0$.

Tvrzení 3.4.7 (Zobecněná Mayer-Vietorisova posloupnost). *Pro každou varietu M a její otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, kde I je uspořádaná spočetná množina, dostáváme dlouhou exaktní posloupnost*

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{r} \prod_{\alpha_0} \Omega^\bullet(U_\alpha) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \xrightarrow{\delta} \cdots . \tag{3.43}$$

Řečeno jinak, posloupnost výše je kořetězcový komplex s triviální kohomologií.

Důkaz. Injektivita r je zřejmá, diferenciální forma je nula právě tehdy když je nula každá její restrikce na pokrývající množiny. Exaktnost v dalším členu je také zřejmá. Uspořádaná kolekce $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha\in I}$ pochází z restrikce globální formy na M, souhlasí-li jednotlivé dvojice na průnicích, t.j. $\delta(\omega)_{\alpha\beta} = \omega_\beta - \omega_\alpha = 0$.

V obecném stupni je konstrukce podobná důkazu obyčejné Mayer-Vietorisovy posloupnosti. Nechť $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je rozklad jednotky příslušný pokrytí $\mathcal{U}$ a nechť $\omega \in \prod \Omega^\bullet(\omega_{\alpha_0\dots\alpha_k})$. Definujeme lineární operátor $K : \prod \Omega^\bullet(\omega_{\alpha_0\dots\alpha_k}) \to \prod \Omega^\bullet(\omega_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}})$ vztahem

$$K(\omega)_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}} = \sum_{\alpha\in I} \rho_\alpha \cdot \omega_{\alpha\alpha_0\dots\alpha_{k-1}}. \tag{3.44}$$

Můžeme tedy psát následující:

$$\begin{aligned} K(\delta\omega)_{\alpha_0\dots\alpha_k} &= \sum_{\alpha\in I} \rho_\alpha \cdot (\delta\omega)_{\alpha\alpha_0\dots\alpha_k} = \sum_{\alpha\in I} \rho_\alpha \cdot \{\omega_{\alpha_0\dots\alpha_k} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \omega_{\alpha\alpha_0\dots\hat{\alpha}_i\dots\alpha_k}\} \\ &= \omega_{\alpha_0\dots\alpha_k} - (\delta K(\omega))_{\alpha_0\dots\alpha_k}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Platí tedy identita $K\delta + \delta K = \mathbf{1}$. A každý δ-kocyklus ω můžeme psát jako δ-kohranici, protože $\omega = \delta(K(\omega))$. Tím je důkaz exaktnosti hotový. ■

Vidíme, že máme kořetězcový komplex (byť s triviální kohomologií), jehož stupně tvoří násobnosti průniků okolí z pokrytí $\mathcal{U}$. Zároveň však máme původní stupně forem a vnější diferenciály d. Pro každé $p, q \geq 0$ tedy definujeme vektorový prostor

$$K^{p,q} \equiv C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \prod_{\alpha_0<\dots<\alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0\dots\alpha_p}). \tag{3.46}$$

Z definice dostáváme komutativní diagram obsahující všechny tyto prostory:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,2} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,2} & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\ & & & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\ & & & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & \cdots \end{array} \tag{3.47}$$

Kolekci vektorových prostorů vybavených $K^{p,q}$ a dvou *komutujících* diferenciálů $\delta : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ a $d : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ se říká **dvojný kořetězcový komplex**. Pro případ $K^{p,q} = C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ se nazývá **Čechův-de Rhamův dvojný komplex**.

Každý dvojný kořetězcový komplex $(K^{p,q}, d, \delta)$ zadarmo poskytuje další kořetězcovou strukturu, takzvaný **totální kořetězcový komplex** $(K^\bullet, D)$, kde

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}, \tag{3.48}$$

a **totální diferenciál** $D : K^n \to K^{n+1}$ je na každé komponentě $K^{p,q}$ definovaný jako $D = \delta + (-1)^p d$. Někdy budeme psát $D = \delta + D''$. Znaménko $(-1)^p$ před diferenciálem d je důležité, protože potom platí:

Lemma 3.4.8. *$(K^\bullet, D)$ je kořetězcový komplex, t.j. $D^2 = 0$. Výsledná kohomologie $H^\bullet_D(K)$ se nazývá **totální kohomologie dvojného komplexu**.*

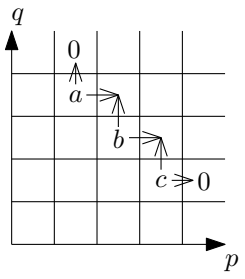
Důkaz. Nechť $\omega \in K^{p,q}$. Potom platí následující:

$$\begin{aligned} D^2(\omega) &= D(\delta\omega + (-1)^p d\omega) = \delta(\delta\omega + (-1)^p d\omega) + (-1)^{p+1} d(\delta\omega) + d(d\omega) \\ &= (\delta^2 + (-1)^p \delta d + (-1)^{p+1} d\delta + d^2)(\omega) = 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

■

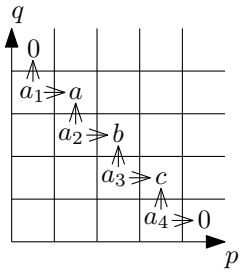
Poznámka 3.4.9. Jak vypadá příklad typického D-kocyklu ϕ v komplexu $K^\bullet$? Je to suma členů $\phi = a + b + c$, každý z nich v jiné komponentě $K^{p,q}$, a platí soustava rovnic

$$da = 0, \quad \delta a = -D''b, \quad \delta b = -D''c, \quad \delta c = 0. \tag{3.50}$$



Typická D-kohranice $\phi = a + b + c$ je taková, že existuje suma členů $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, taková že

$$a = \delta a_1 + D'' a_2, \quad b = \delta a_2 + D'' a_3, \quad c = \delta a_3 + D'' a_4. \tag{3.51}$$



Čech- de Rhamův komplex ovšem není úplně obyčejný. Každý jeho řádek je *exaktní* zobecněná Mayer-Vietorisova posloupnost. To mu propůjčuje jisté neobvyklé vlastnosti. Nejprve je třeba uvědomit si, že pro každé $n \geq 0$ máme zobrazení $r : \Omega^n(M) \to C^0(\mathcal{U}, \Omega^n) = K^{0,n} \subset K^n$.

Navíc pro každou n-formu ω platí $D(r(\omega)) = \delta(r(\omega)) + (-1)^0 dr(\omega) = 0 + r(d(\omega))$, kde jsme použili exaktnost zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti a komutativnosti diagramu (3.47). To dokazuje, že $r : \Omega^\bullet(M) \to K^\bullet$ je **kořetězcové zobrazení** a indukuje tedy **homomorfismus** $r^* : H^\bullet(M) \to H^\bullet_D(K)$. Z exaktnosti řádků Čechova-de Rhamova komplexu pak plyne následující pozoruhodné tvrzení:

Věta 3.4.10 (**Zobecněný Mayer-Vietorisův princip**). *Zobrazení r^* je izomorfismus. Jinými slovy, de Rhamova kohomologie M a Čechova-de Rhamova kohomologie odpovídající libovolnému nejvýše spočetnému pokrytí $\mathcal{U}$ jsou izomorfní, $H^n(M) \cong H^n_D(C^\bullet(U, \Omega^\bullet))$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že r^* **je surjektivní**. Nechť $[\phi]_D$ je třída v $H^n_D(K)$ reprezentovaná D-kocyklem ϕ. Ukážeme si, že $[\phi]_D = [\phi']_D$, kde ϕ' má nenulovou jen komponentu v $K^{0,n}$.

Nechť $a \in K^{n-q,q}$ je nenulová komponenta ϕ s nejnižším q. Protože ϕ je D-kocyklus, je $\delta(a) = 0$. Z exaktnosti zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti existuje $b \in K^{n-q-1,q}$, že $a = \delta(b)$. Interpretujeme-li b jako element K^{n-1}, máme $[\phi]_D = [\phi - D(b)]_D$, ale $\phi - D(b)$ má již komponentu v $K^{n-q,q}$ nulovou. Iterací tohoto kroku dostaneme ϕ'.

Jelikož $\phi' \in K^{0,n} \subset K^n$ je D-kocyklus, máme $\delta\phi' = 0$ a $d\phi' = 0$. Z exaktnosti zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti je tedy $\phi' = r(\omega)$ pro nějakou globální n-formu $\omega \in \Omega^n(M)$. Jelikož je každá její restrikce na otevřené okolí $U_\alpha \in \mathcal{U}$ uzavřená, je i ω uzavřená a

$$r^*[\omega] = [\phi']_D = [\phi]_D. \tag{3.52}$$

Tím jsme dokázali surjektivitu, pojďme ukázat **injektivitu** r^*. Nechť $r^*[\omega] = [0]_D$. Vidíme, že $r(\omega) \in K^{0,n}$ je D-exaktní. Máme tedy $\phi \in K^{n-1}$, že $r(\omega) = D\phi$. Protože $D\phi \in K^{0,n}$, každá nenulová komponenta ϕ je δ-uzavřená. Stejným argumentem jako výše tedy můžeme od ϕ odečíst D-kohranici a tím vynulovat všechny komponenty až na $K^{0,n-1}$. Dostaneme $r(\omega) = D\phi'$, kde $\phi' \in K^{0,n-1}$. Zejména $\delta\phi' = 0$ a $d\phi' = r(\omega)$. Z exaktnosti zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti $\phi' = r(\alpha)$ pro $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$. Máme tedy $r(d\alpha) = D(r(\alpha)) = D\phi' = r(\omega)$ a z injektivity r potom $\omega = d\alpha$, t.j. $[\omega] = 0$. ∎

Ve skutečnosti jsme použili velmi obecný argument, který závisel jen na exaktnosti horizontálních posloupností. Můžeme uvažovat následující augmentaci Čechova-de Rhamova kom-

plexu, kde tentokrát přidáme nový řádek:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \\
0 & \longrightarrow \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,1} & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \uparrow{\scriptstyle d} & & \\
0 & \longrightarrow \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,0} & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle i} & & \\
 & & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}, \tag{3.53}$$

kde $C^p(\mathcal{U},\mathbb{R}) \equiv \ker(d) \subseteq K^{p,0}$ je prostor lokálně konstantních funkcí na $(p+1)$-násobných průnicích $U_{\alpha_0\dots\alpha_p}$, který zdědí diferenciál δ z $K^{p,0}$ (restrikce lokálně konstantních funkcí jsou lokálně konstantní). Dostáváme tedy kořetězcový komplex

$$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \cdots \tag{3.54}$$

Příslušná kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$ se nazývá **Čechova kohomologie** pokrytí $\mathcal{U}$.

Z důkazu zobecněného Mayer-Vietorisova principu je zřejmé, že pokud budou všechny sloupce augmentovaného dvojitého komplexu (3.53) exaktní, bude i indukovat izomorfimus $i^* : H^n(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to H^n_D(K)$. To nám dá okamžitě i izomorfismus $H^n(\mathcal{U},\mathbb{R}) \cong H^n(M)$. Jak zajistit exaktnost sloupců? Připomeňme, že $K^{p,q} = \prod_{\alpha_0<\dots<\alpha_p} C^q(U_{\alpha_1\dots\alpha_p})$. Exaktnost p-tého sloupce tedy měří kohomologické grupy

$$\prod_{\alpha_0<\dots<\alpha_p} H^q(U_{\alpha_0\dots\alpha_p}). \tag{3.55}$$

Vidíme, že $U_{\alpha_0\dots\alpha_p}$ musí mít triviální de Rhamovu kohomologii. Z Poincarého lemma tedy stačí předpokládat, že $\mathcal{U}$ je dobré pokrytí.

Věta 3.4.11. *Je-li $\mathcal{U}$ dobré pokrytí, je $i^* : H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to H^\bullet_D(K)$ izormofismus.*

Uvažovat dobré pokrytí má i následující výhodu. Prostory $C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ i působení diferenciálu δ je velmi jednoduché. Protože všechny prostory $U_{\alpha_0\dots\alpha_p}$ jsou křivkově souvislé, jsou lokálně konstantní funkce na nich ve skutečnosti konstantní. Odtud

$$C^p(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \prod_{\alpha_0<\dots<\alpha_p} \mathbb{R}, \tag{3.56}$$

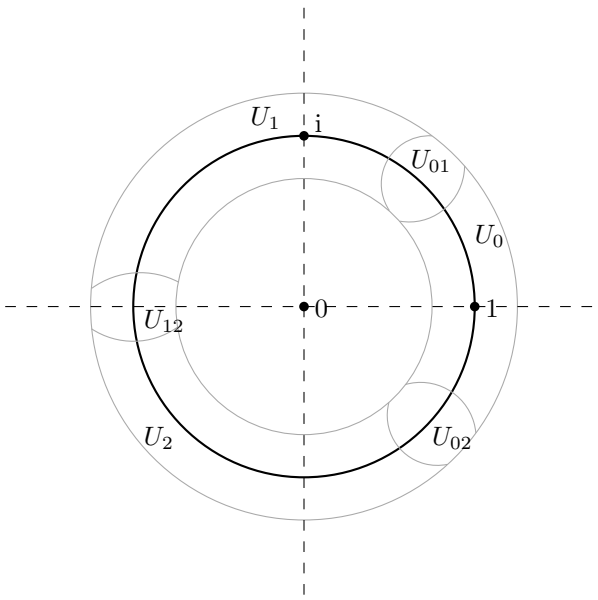
Každý element $\lambda \in C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ je tedy kolekce $\{\lambda_{\alpha_0\dots\alpha_p}\}$ reálných konstant a

$$(\delta\lambda)_{\alpha_0\dots\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \lambda_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_i\dots\alpha_{p+1}}. \tag{3.57}$$

Tato notace je mírně nepřesná, protože v případě, že $U_{\alpha_0\dots\alpha_{p+1}} = \emptyset$, je pravá strana automaticky nula. Jinak jde ale o čistě kombinatorický výpočet, jen řešíme, zda se nějaké pokrývající množiny protínají! Mimo jiné dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 3.4.12. *Čechova kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$ je stejná pro všechna dobrá pokrytí M.*

Příklad 3.4.13 (Dobré pokrytí $\mathbb{S}^1$)**.** Uvažujme dobré pokrytí kružnice jako na obrázku:



Máme tedy pouze dva netriviální členy Čechova komplexu

$$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 = \{(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\},\ \ C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 = \{(\lambda_{01},\lambda_{02},\lambda_{12}) \mid \lambda_{ij} \in \mathbb{R}\}. \quad (3.58)$$

Zajímá nás tedy pouze operátor $\delta : C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Pro $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) \in C^0(\mathcal{U},\mathbb{R})$ máme

$$(\delta\lambda)_{01} = \lambda_1 - \lambda_0,\ \ (\delta\lambda)_{02} = \lambda_2 - \lambda_0,\ \ (\delta\lambda)_{12} = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (3.59)$$

Snadno vidíme, že $\ker(\delta) = \{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$. Odtud zřejmě $H^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dále $\dim(H^1(\mathcal{U},\mathbb{R})) = \dim(C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})/\operatorname{im}(\delta)) = \dim(C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{im}(\delta)) = 3 - (3-1) = 1$. Odtud $H^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Zřejmě $H^n(\mathcal{U},\mathbb{R}) = 0$ pro $n > 0$. Dostáváme tedy

$$H^n(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n > 1. \end{cases} \quad (3.60)$$

Vidíme, že Čechova kohomologie je opravdu izomorfní de Rhamově kohomologii.

Důsledek 3.4.14 (Kohomologie vektorových bandlů)**.** *Nechť $\pi : E \to M$ je libovolný vektorový bandl nad varietou M. Potom $H^\bullet(M) \cong H^\bullet(E)$.*

Důkaz. Ukažme si důkaz pomocí Čechovy kohomologie. Nechť $\mathcal{V}$ je trivializační pokrytí M. Ukázali jsme, že $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, kde $\mathcal{U}$ je dobré pokrytí. Potom $\widehat{\mathcal{U}} = \{\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí E. Protože $U_\alpha \subseteq V_{\phi(\alpha)}$, máme $\widehat{U}_{\alpha_0\dots\alpha_p} \equiv \pi^{-1}(U_{\alpha_0\dots\alpha_p}) \cong U_{\alpha_0\dots\alpha_p} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Tedy $\widehat{\mathcal{U}}$ je dobré pokrytí E. Navíc zřejmě $\widehat{U}_{\alpha_0\dots\alpha_p} \neq \emptyset \Leftrightarrow U_{\alpha_0\dots\alpha_p} \neq \emptyset$. Z obou pozorování plyne

$$H^\bullet(E) \cong H^\bullet(\widehat{\mathcal{U}},\mathbb{R}) \cong H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R}) \cong H^\bullet(M). \quad (3.61)$$

A máme dokázáno. ∎

Poznámka 3.4.15. Tvrzení lze dokázat snadno i jinak, protože M je deformační retrakt E, a tedy homotopicky ekvivalentní. Jejich de Rhamovy kohomologie musí být tedy nutně izomorfní.

3.5 Kohomologie Lieových algeber

Aplikace teorie kohomologií sahají mnohem dál než do diferenciální geometrie. Ukazuje se, že představují užitečný nástroj i při studiu algebraických objektů. Příkladem nám budou kohomologie (reprezentací) Lieových algeber.

Následující definice fungují nad libovolným tělesem (pro jistotu s charakteristikou 0) a pro libovolnou (tedy i nekonečnou) dimenzi.

Definice 3.5.1. Nechť $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ je libovolná Lieova algebra a nechť (V, ρ) je její reprezentace. Potom prostor k-kořetězců **Chevalley-Eilenbergova kořetězcového komplexu** $\mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho)$ definujeme jako prostor **k-lineárních totálně antisymetrických zobrazení z $\mathfrak{g}$ do V**.

Poznámka 3.5.2. Pro konečně-rozměrné $\mathfrak{g}$ můžeme ztotožnit $\mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho)$ s prostorem $\Lambda^k\mathfrak{g}^* \otimes V$.

Definice 3.5.3. Diferenciál $\Delta : \mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho) \to \mathfrak{c}^{k+1}(\mathfrak{g}, \rho)$ definujeme pro $\omega \in \mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho)$ vztahem

$$\begin{aligned}\Delta(\omega)(x_1, \dots, x_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\rho(x_i)\cdot\omega(x_1 \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([x_i, x_j]_\mathfrak{g}, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{k+1}).\end{aligned} \tag{3.62}$$

Apriori není vůbec zřejmé, že Δ je dobře definovaný (výsledek nemusí být nutně totálně antisymetrický) a už vůbec ne, že $\Delta^2 = 0$. Dokážeme si pouze první z vlastností.

Lemma 3.5.4. *Pro každé $k \geq 0$ a $\omega \in \mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho)$ máme $\Delta(\omega) \in \mathfrak{c}^{k+1}(\mathfrak{g}, \rho)$.*

Důkaz. Díky polarizaci stačí ukázat, že pravá strana (3.62) je nula, kdykoliv jsou nějaké dva vstupní vektory stejné. Nechť $x_p = x_q = x$ pro nějaké $1 \leq p < q \leq k+1$. Z první sumy zbudou právě dva členy, a to pro $i = p$ a $i = q$, jinak budou dva stejné vektory x. vstupovat do totálně antisymetrického zobrazení ω. Dostaneme tedy součet

$$(-1)^{p+1}\rho(x)\cdot\omega(x_1, \dots, \widehat{x}_p, \dots, x, \dots, x_{k+1}) + (-1)^{q+1}\rho(x)\cdot\omega(x_1, \dots, x, \dots, \widehat{x}_q, \dots, x_{k+1}). \tag{3.63}$$

V prvním z nich musíme prohodit x právě $(q-p-1)$-krát s jeho sousedem, abychom dostali výraz v druhém členu. To nám dodá znaménko $(-1)^{q-p-1}$ a oba se navzájem odečtou.

Dvojitá suma v (3.62) bude obsahovat jen členy, kde právě jeden z vektorů v $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}$ bude x. Dostaneme čtveřici jednoduchých sum, dvě pro případ kdy i trefí jeden z dvojice (p, q) a dvě pro případ, kdy je trefí j. Máme tedy součet

$$\begin{aligned}&\sum_{j>q}(-1)^{q+j}\omega([x, x_j]_\mathfrak{g}, \dots, x, \dots, \widehat{x}_q, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{k+1}) \\ &\qquad+\sum_{\substack{j>p\\ j\neq q}}(-1)^{p+j}\omega([x, x_j]_\mathfrak{g}, \dots, \widehat{x}_p, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{k+1}) \\ &+\sum_{i<p}(-1)^{i+p}\omega([x_i, x]_\mathfrak{g}, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_p, \dots, x, \dots, x_{k+1}) \\ &\qquad+\sum_{\substack{i<q\\ i\neq p}}(-1)^{i+q}\omega([x_i, x]_\mathfrak{g}, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_q, \dots, x_{k+1}).\end{aligned} \tag{3.64}$$

Obě složitější sumy lze psát jako součet dvou podle polohy indexu j vzhledem ke q (resp. i vzhledem k p). Například první z nich lze psát jako součet

$$\begin{aligned}&\sum_{j>q}(-1)^{p+j}\omega([x,x_j]_{\mathfrak{g}},\dots,\widehat{x}_p,\dots,x,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_{k+1})\\ +&\sum_{p<j<q}(-1)^{p+j}\omega([x,x_j]_{\mathfrak{g}},\dots,\widehat{x}_p,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x,\dots,x_{k+1}).\end{aligned}\tag{3.65}$$

První suma se odečte s první sumou výše, protože transpozicemi x dostaneme znaménko $(-1)^{q-p-1}$ které to zařídí. Stejná situace nastane v druhých dvou součtech a dostaneme součet dvou sum:

$$\begin{aligned}&\sum_{p<j<q}(-1)^{p+j}\omega([x,x_j]_{\mathfrak{g}},\dots,\widehat{x}_p,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x,\dots,x_{k+1})\\ +&\sum_{p<i<q}(-1)^{i+q}\omega([x_i,x]_{\mathfrak{g}},\dots,x,\dots,\widehat{x}_i,\dots,\widehat{x}_q,\dots,x_{k+1}).\end{aligned}\tag{3.66}$$

Transpozicí x v druhé sumě (transpozic je tentokrát $q-p-2$) a prohozením v závorce $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ dostáváme kýžené znaménko a oba součty se odečtou. ■

Tvrzení 3.5.5. *Platí* $\Delta^2=0$. $(\mathfrak{c}^\bullet(\mathfrak{g},\rho),\Delta)$ *tedy tvoří kořetězcový komplex.*

Příslušná kohomologie $H^k(\mathfrak{g},\rho)$ *se nazývá* ***Chevalley-Eilenbergova kohomologie Lieovy algebry*** $\mathfrak{g}$ ***vzhledem k reprezentaci*** ρ.

Důkaz. Důkaz provedeme uvěřením pro $k=0$. Zřejmě $\mathfrak{c}^0(\mathfrak{g},\rho)=V$. Nechť $v\in V$ a $x\in\mathfrak{g}$. Máme $\Delta(v)(x)=\rho(x)\cdot v$. Pro $x_1,x_2\in\mathfrak{g}$ potom

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta(v))(x_1,x_2)&=\rho(x_1)\cdot\Delta(v)(x_2)-\rho(x_2)\cdot\Delta(v)(x_1)-\Delta(v)([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})\\&=\rho(x_1)\cdot(\rho(x_2)\cdot v)-\rho(x_2)\cdot(\rho(x_1)\cdot v)-\rho([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})\cdot v\\&=([\rho(x_1),\rho(x_2)-\rho([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}}))\cdot v=0.\end{aligned}\tag{3.67}$$

Použili jsme fakt, že $\rho:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ je reprezentace $\mathfrak{g}$. ■

První tři kohomologické grupy mají jednoduchou algebraickou interpretaci. Nejprve máme

$$H^0(\mathfrak{g},\rho)=Z^0(\mathfrak{g},\rho)=\{v\in V\mid\rho(x)\cdot v=0\ \ \forall x\in\mathfrak{g}\}\equiv V^{\mathfrak{g}}.\tag{3.68}$$

Prvkům $V^{\mathfrak{g}}$ se říká **invarianty reprezentace** ρ. Je-li totiž ρ odvozená z reprezentace $\widetilde{\rho}$ (souvislé) Lieovy grupy G integrující $\mathfrak{g}$, jsou $V^{\mathfrak{g}}$ opravdu invarianty $\widetilde{\rho}$. Připomeňme, že $\mathfrak{c}^1(\mathfrak{g},\rho)=\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},V)$. Prostor 1-kocyklů má potom tvar

$$Z^1(\mathfrak{g},\rho)=\{\alpha\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},V)\mid\alpha([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})=\rho(x_1)\cdot\alpha(x_2)-\rho(x_2)\cdot\alpha(x_1)\}\equiv\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\rho),\tag{3.69}$$

kde zobrazení z $\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\rho)$ se nazývají **derivace $\mathfrak{g}$-modulu** (V,ρ). 1-kohranice potom mají tvar

$$B^1(\mathfrak{g},\rho)=\{\alpha\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},V)\mid\alpha(x)=\rho(x)\cdot v\text{ pro nějaké }v\in V\}\equiv\mathrm{IDer}(\mathfrak{g},\rho)\tag{3.70}$$

a nazývají se **vnitřní derivace $\mathfrak{g}$-modulu** (V,ρ). První Chevalley-Eilenbergova kohomologie $H^1(\mathfrak{g},\rho)$ tedy měří kolik derivací není vnitřních:

$$H^1(\mathfrak{g},\rho)=\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\rho)/\,\mathrm{IDer}(\mathfrak{g},\rho).\tag{3.71}$$

Příklad 3.5.6. Uvažujme $(V,\rho)=(\mathfrak{g},\mathrm{ad})$. Máme $H^0(\mathfrak{g},\rho)=\{y\in\mathfrak{g}\mid [x,y]_\mathfrak{g}=0\ \ \forall x\in\mathfrak{g}\}\equiv\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, nultá kohomologie příslušná adjungované reprezentaci není nic jiného než centrum Lieovy algebry. Derivace a vnitřní derivace osvětlují původ svého jména:

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\mathrm{ad})=\{\alpha\in\mathrm{End}(\mathfrak{g})\mid \alpha([x_1,x_2]_\mathfrak{g})=[\alpha(x_1),x_2]_\mathfrak{g}+[x_1,\alpha(x_2)]_\mathfrak{g}\},\tag{3.72}$$

$$\mathrm{IDer}(\mathfrak{g},\mathrm{ad})=\{\alpha\in\mathrm{End}(\mathfrak{g})\mid \alpha(x)=[x,y]_\mathfrak{g}\text{ pro nějaké }y\in\mathfrak{g}\}.\tag{3.73}$$

Interpretace $H^2(\mathfrak{g},\rho)$ je neméně zajímavá. Nejprve připomeňme následující pojem:

Definice 3.5.7. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a (V,ρ) její reprezentace. Potom **abelovské rozšíření $\widetilde{\mathfrak{g}}$ algebry $\mathfrak{g}$ modulem** (V,ρ) je krátká exaktní posloupnost homomorfismů Lieových algeber

$$0\longrightarrow V\underset{t}{\overset{j}{\rightleftarrows}}\widetilde{\mathfrak{g}}\underset{s}{\overset{r}{\rightleftarrows}}\mathfrak{g}\longrightarrow 0,\tag{3.74}$$

přičemž V interpretujeme jako abelovskou Lieovu algebru. Navíc musí platit vztah

$$[x,j(v)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}=j(\rho(r(x))\cdot v),\tag{3.75}$$

pro všechny $x\in\widetilde{\mathfrak{g}}$ a $v\in V$. Je-li $\widetilde{\mathfrak{g}}'$ jiné abelovské rozšíření $\mathfrak{g}$ stejným modulem, řekneme, že isomorfismus $\phi\in\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{g}}')$ je **ekvivalence abelovských rozšíření**, pokud diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{j} & \widetilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{r} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}_V} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}_\mathfrak{g}} & & \\
0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{j'} & \widetilde{\mathfrak{g}}' & \xrightarrow{r'} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0
\end{array}\tag{3.76}$$

komutuje. **Rozštěpením** krátké exaktní posloupnosti myslíme lineární zobrazení $s\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{g}})$ takové, že $r\circ s=\mathbf{1}_\mathfrak{g}$.

Nějaké rozštěpení existuje pro každou posloupnost vektorových prostorů nad nekonečným tělesem. Ne nutně je však s homomorfismus algeber! Pro každé takové s můžeme sestrojit unikátní zobrazení $t\in\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathfrak{g}},V)$ splňující $\ker(t)=\mathrm{im}(s)$ a $t\circ j=\mathbf{1}_\mathfrak{g}$. Jelikož je j monomorfismus, můžeme definovat t vztahem

$$j(t(x))=(\mathbf{1}-s\circ r)(x),\tag{3.77}$$

pro všechny $x\in\widetilde{\mathfrak{g}}$. Snadno se ověří, že t má požadované vlastnosti a je unikátní.

Zobrazení $\phi:V\oplus\mathfrak{g}\to\widetilde{\mathfrak{g}}$ definované vztahem $\phi(v,y)=j(v)+s(y)$ pro každé $(v,y)\in V\oplus\mathfrak{g}$ je izomorfismus vektorových prostorů. Jeho inverze je $\phi^{-1}(x)=(t(x),r(x))$. Vskutku, máme

$$(\phi\circ\phi^{-1})(x)=j(t(x))+s(r(x))=x,\tag{3.78}$$

kde jsme použili definici (3.77). Opačný směr je podobně jednoduchý:

$$(\phi^{-1}\circ\phi)(v,y)=(t(j(v)+s(y)),r(j(v)+s(y)))=(v,y).\tag{3.79}$$

Pomocí ϕ můžeme na $\mathfrak{h}=V\oplus\mathfrak{g}$ indukovat strukturu Lieovy algebry $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}$. Snadno se ukáže, že závorka má pro $(v,y),(v',y')\in\mathfrak{h}$ tvar

$$[(v,y),(v',y')]_\mathfrak{h}=(\rho(y)\cdot v'-\rho(y')\cdot v+\omega(v,v'),[y,y']_\mathfrak{g}),\tag{3.80}$$

kde $\omega\in\mathfrak{c}^2(\mathfrak{g},\rho)$ je definovaná vztahem $\omega(y,y')=t([s(y),s(y')]_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$. Lieova algebra $\mathfrak{h}$ je zřejmě rovněž abelovským rozšířením Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V,ρ) a $\phi\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{h},\widetilde{\mathfrak{g}})$ je ekvivalence abelovských rozšíření. Volbou jiného rozštěpení s' dostanu jiné abelovské rozšíření $\mathfrak{h}'=V\oplus\mathfrak{g}$, které je ale nutně ekvivalentní $\mathfrak{h}$.

Lemma 3.5.8. *ω je 2-kocyklus, $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, \rho)$.*

Důkaz. Závorka $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}$ z definice musí splňovat Jacobiho identitu. Máme tedy

$$\begin{aligned} 0 &= [(0,x),[(0,y),(0,z)]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} + cyclic(x,y,z) \\ &= [(0,x),(\omega(y,z),[y,z]_\mathfrak{g})]_\mathfrak{h} + cyclic(x,y,z) \\ &= (\rho(x)\cdot\omega(y,z) + \omega(x,[y,z]_\mathfrak{g}),[x,[y,z]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g}) + cyclic(x,y,z) \\ &= (\Delta(\omega)(x,y,z),0). \end{aligned} \tag{3.81}$$

pro libovolné $x, y, z \in \mathfrak{g}$, a tedy $\Delta(\omega) = 0$. ■

Každé abelovské rozšíření a volba rozštěpení tedy určuje unikátní 2-kocyklus v příslušném Chevalley-Eilenbergově komplexu. Každý takový 2-kocyklus ω můžeme, jak se dá snadno ověřit, použít ke konstrukci abelovského rozšíření. Konečně, snadno ukážeme následující tvrzení.

Lemma 3.5.9. *Nechť $\mathfrak{h} = V \oplus \mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}' = V \oplus \mathfrak{g}$ jsou dvě Abelovská rozšíření parametrizovaná 2-kocykly ω a ω'. Potom jsou ekvivalentní právě tehdy když $\omega' - \omega \in B^2(\mathfrak{g}, \rho)$, neboli $[\omega] = [\omega']$ v $H^2(\mathfrak{g}, \rho)$. Jinými množina tříd ekvivalence abelovských rozšíření algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V, ρ) je bijektivní kohomologii $H^2(\mathfrak{g}, \rho)$.*

Důkaz. Z komutativity diagramu (3.76) musí mít každá ekvivalence $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ tvar $\phi(v, y) = (v + \alpha(y), y)$ pro nějaké $\alpha \in \mathfrak{c}^1(\mathfrak{g}, \rho)$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} \omega'(x,y) &= \pi_V([(0,x),(0,y)]_{\mathfrak{h}'}) = pr_V\phi^{-1}([\phi(0,x),\phi(0,y)]_\mathfrak{h}) \\ &= \pi_V\phi^{-1}([(\alpha(x),x),(\alpha(y),y)]_\mathfrak{h}) \\ &= \pi_V\phi^{-1}(\rho(x)\cdot\alpha(y) - \rho(y)\cdot\alpha(x) + \omega(x,y),[x,y]_\mathfrak{g}) \\ &= \omega(x,y) + \{\rho(x)\cdot\alpha(y) - \rho(y)\cdot\alpha(x) - \alpha([x,y]_\mathfrak{g})\} \\ &= \omega(x,y) + \Delta(\alpha)(x,y). \end{aligned} \tag{3.82}$$

Tím je Lemma dokázáno. ■

Tato interpretace je příkladem standardního postupu v matematice - tzv. hledání obstrukce. Máme totiž přesně kvantifikovaný následující problém.

Důsledek 3.5.10. *Nechť $\widetilde{\mathfrak{g}}$ je abelovské rozšíření algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V, ρ).*

Potom existuje rozštěpení $s \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{g}})$ takové, že $s(\mathfrak{g}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$ je podalgebra izomorfní $\mathfrak{g}$, právě tehdy když je odpovídající kohomologická třída v $H^2(\mathfrak{g}, \rho)$ triviální.

Důkaz. Zřejmě $s(\mathfrak{g})$ je podalgebra, právě tehdy když $\omega = 0$. Je-li s rozštěpení z tvrzení věty, musím mít tedy nutně $[\omega] = [0]$. Opačně, je-li s' libovolné rozštěpení a $\omega' \in Z^2(\mathfrak{g}, \rho)$ příslušný 2-kocyklus, mám z předpokladu $[\omega'] = [0]$. Existuje tedy $\alpha \in \mathfrak{c}^1(\mathfrak{g}, \rho)$, takové, že $\omega' = \Delta(\alpha)$. Snadno se ukáže, že $s(y) := s'(y) - j(\alpha(y))$ splňuje tvrzení věty. ■

Toto tvrzení je velice užitečné pro velkou třídu Lieových algeber a jejich reprezentací. Vskutku, platí následující pozoruhodné tvrzení.

Věta 3.5.11 (1. a 2. Whiteheadovo Lemma). *Je-li $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra nad tělesem charakteristiky 0 a (V, ρ) její konečněrozměrná reprezentace. Potom $H^1(\mathfrak{g}, \rho) = H^2(\mathfrak{g}, \rho) = 0$.*

Důsledek 3.5.12. *Všechny derivace konečněrozměrné poloprosté algebry nad tělesem charakteristiky* 0 *jsou vnitřní.*

Konečně, nechť G je souvislá Lieova grupa integrující (reálnou) algebru $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Můžeme se ptát, zda existuje nějaká souvislost mezi de Rhamovou kohomologií G a Chevalley-Eilenbergovou kohomologií. Uvažujme podprostor $\Omega^\bullet_L(G) \subseteq \Omega^\bullet(G)$ levoinvariantních diferenciálních forem. Jelikož d komutuje s pullbacky, zřejmě $d : \Omega^k_L(G) \to \Omega^{k+1}_L(G)$. Dostáváme tedy **subkomplex** de Rhamova komplexu tvořený levo-invariantními formami, $(\Omega^\bullet_L(G), d)$. Příslušné kohomologie $H^\bullet_L(G)$ definují **(levou) invariantní de Rhamovu kohomologii** G.

Lemma 3.5.13. *Nechť* $(\mathbb{R}, 0)$ *je triviální reprezentace* $\mathfrak{g}$ *na* $\mathbb{R}$. *Označme* $\mathfrak{c}^\bullet(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{c}^\bullet(\mathfrak{g}, 0)$. $H^\bullet(\mathfrak{g})$ *se obvykle nazývá jednoduše* ***kohomologie Lieovy algebry*** $\mathfrak{g}$.

Potom existuje lineární izomorfismus $\varphi : \Omega^\bullet_L(G) \to \mathfrak{c}^\bullet(\mathfrak{g})$, *který tvoří kořetězcové zobrazení, t.j.* $\Delta \circ \varphi = \varphi \circ d$. *Zejména tedy* $H^\bullet_L(G) \cong H^\bullet(\mathfrak{g})$.

Důkaz. Nechť $\omega \in \Omega^k_L(G)$. Potom $\varphi(\omega) \in \mathfrak{c}^k(\mathfrak{g})$ definujeme pomocí hodnoty na $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{g}$:

$$\varphi(\omega)(x_1, \dots, x_k) := \omega(x_1^L, \dots, x_k^L) \in \mathbb{R}, \tag{3.83}$$

kde $x_i^L \in \mathfrak{X}(G)$ jsou levo-invariantní vektorová pole. Inverze se sestrojí výměnou vstupních a výstupních dat v této definici. Zbývá ověřit komutaci s diferenciály:

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi(\omega))(x_1, \dots, x_{k+1}) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi(\omega)([x_i, x_j]_\mathfrak{g}, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j]^L_\mathfrak{g}, \dots, \widehat{x_i^L}, \dots, \widehat{x_j^L}, \cdots) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([x_i^L, x_j^L], \dots, \widehat{x_i^L}, \dots, \widehat{x_j^L}, \cdots) \\
&= d\omega(x_1^L, \dots, x_{k+1}^L) = (\varphi(d\omega))(x_1, \dots, x_{k+1}).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Zbytek tvrzení je již triviální. ∎

Jelikož by nás zajímala opravdická de Rhamova kohomologie G (třeba kvůli Poincarého lemma), zbývá odpovědět na otázku, zda $H^\bullet_L(G) \cong H^\bullet(G)$.

Tvrzení 3.5.14. *Pro kompaktní Lieovu grupu* G *tvrzení platí.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze jemným náznakem. Zřejmě máme inkluzi $i : \Omega^\bullet_L(G) \hookrightarrow \Omega^\bullet(G)$, která komutuje s diferenciálem. Zřejmě však není lineárním izomorfismem. Na každé Lieově grupě máme kanonickou (až na konstantu) levo-invariantní formu objemu $\mu_L \in \Omega^{\dim \mathfrak{g}}(G)$, takzvanou (levou) **Haarovu míru**. Je-li $\omega \in \Omega^k(G)$ libovolná forma, můžeme definovat formu $\mathfrak{L}(\omega)$ vztahem

$$\mathfrak{L}(\omega)(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{\mathrm{vol}(G)} \int_G (L_g^* \omega)(X_1, \dots, X_k) \cdot \mu_L, \tag{3.85}$$

pro všechny $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{G}$, kde integrál konverguje protože G je kompaktní a $\mathrm{vol}(G) = \int_G \mu_L$. Nyní se dá relativně snadno ukázat, že $\mathfrak{L} : \Omega^\bullet(G) \to \Omega^\bullet_L(G)$ a $\mathfrak{L}$ komutuje s diferenciálem a indukované zobrazení $\mathfrak{L}_* : H^\bullet(G) \to H^\bullet_L(G)$ je izomorfismus inverzní k i_*. ∎

3.6 Svazky a jejich Čechova kohomologie

Nechť X je libovolný topologický prostor. Označme $\mathbf{Op}(X)$ následující kategorii. Jejími objekty jsou otevřené podmnožiny X. Pro libovolné dva objekty $U, V \in \mathbf{Op}(X)$ existuje právě jeden morfismus $i_V^U : V \to U$, právě tehdy když $V \subseteq U$.

Lze si představit jako graf, jehož vrcholy jsou otevřené podmnožiny X a přidáme do něj orientovanou hranu (šipku), je-li jedna podmnožina obsažena v druhé.

Definice 3.6.1. Nechť $\mathbf{C}$ je libovolná kategorie. Kontravariantní funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{C}$ se nazývá **předsvazek** (presheaf) na X s hodnotami v $\mathbf{C}$. Explicitně:

(i) pro každé $U \in \mathbf{Op}(X)$ máme objekt $\mathcal{F}(U) \in \mathbf{C}$;

(ii) je-li $V \subseteq U$, existuje **morfismus restrikce** $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ v kategorii $\mathbf{C}$ a platí

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U, \quad \rho_U^U = 1_{\mathcal{F}(U)}, \tag{3.86}$$

pro libovolné $W \subseteq V \subseteq U$ otevřené podmnožiny.

Příklad 3.6.2. Nechť $\mathbf{C} = \mathbf{Ab}$ je kategorie abelovských grup. Nechť $G \in \mathbf{Ab}$ je fixně zvolená abelovská grupa. **Konstantní předsvazek** G_X je definovaný jako $G_X(U) := G$ pro všechny neprázdné $U \in \mathbf{Op}(X)$, a $G_X(\emptyset) := \{0\}$. Restrikce definujeme jako $\rho_V^U := 1_G$ kdykoliv $V \subseteq U$ a $V \neq \emptyset$, a $\rho_\emptyset^U$ jako nulové zobrazení.

Předsvazek typicky přiřazuje algebraickou strukturu (určenou výběrem $\mathbf{C}$) topologickým datům (otevřeným podmnožinám). Přičemž víme co se děje, když si bereme *menší množiny*. Co ale opačná procedura - říct něco „globálně“ na základě lokálních dat? Tento požadavek vede přesně na definici svazku. Předpokládáme, že $\mathbf{C}$ je tzv. *konkrétní kategorie*, tj. její objekty jsou množiny a morfismy jsou zobrazení mezi těmito množinami (s extra požadavky). Potom má totiž smysl mluvit o prvcích množiny $\mathcal{F}(U)$, které se nazývají **lokální řezy předsvazku $\mathcal{F}$ nad U**.

Definice 3.6.3. Nechť $\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{C}$ je předsvazek na X s hodnotami v $\mathbf{C}$. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je **svazek na X s hodnotami v $\mathbf{C}$**, pokud platí následující.

Nechť $U \in \mathbf{Op}(X)$ je libovolná podmnožina a nechť $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ její libovolné pokrytí, t.j. $U = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$. V každém takovém případě musí platit následující dva axiomy:

(i) **axiom lokality**: nechť $s, t \in \mathcal{F}(U)$ splňují $\rho_{U_\alpha}^U(s) = \rho_{U_\alpha}^U(t)$. Potom $s = t$;

(ii) **axiom lepení**: nechť $\{s_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce lokálních řezů, kde $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ a platí

$$\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta) \tag{3.87}$$

pro všechny $\alpha, \beta \in I$. Potom existuje řez $s \in \mathcal{F}(U)$ splňující $\rho_{U_\alpha}^U(s) = s_\alpha$ pro všechny $\alpha \in I$.

Příklad 3.6.4. Nechť E je topologický prostor a $\pi : E \to X$ spojité surjektivní zobrazení. Definujeme **svazek $\Gamma(E, \pi)$ spojitých řezů (E, π) předpisem**:

$$\Gamma(E, \pi)(U) := \{\sigma : U \to E \mid \pi \circ \sigma = 1_U,\ \sigma \text{ je spojité}\}. \tag{3.88}$$

Takto obecně máme $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$. Pro $V \subseteq U$ definujeme morfismus restrikce jako skutečnou restrikci $\rho_V^U(\sigma) = \sigma|_V$. Z obvyklých vlastností spojitých funkcí plyne, že platí axiomy lokality i lepení. Uvažujme nyní dva speciální příklady:

(i) $E = X \times \mathbb{R}$. Každý lokální řez $\sigma : U \to X \times \mathbb{R}$ musí mít tvar $\sigma(x) = (x, f(x))$, kde $f : U \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Dostáváme $\Gamma(E, \pi) = C^0_X$, kde C^0_X je **svazek spojitých reálných funkcí na** X, kde $C^0_X(U) := C^0(U)$ restrikce jsou restrikce.

Všimněte si, že v tomhle případě můžeme za $\mathbf{C}$ vzít i třeba vektorové prostory nad $\mathbb{R}$, abelovské grupy nebo komutativní okruhy.

(ii) Nechť $G \in \mathbf{Ab}$ je fixní abelovská grupa. Vybavme G *diskrétní topologií* a uvažujme opět $E = X \times G$. Spojité lokální řezy $\sigma : U \to X \times G$ opět odpovídají spojitým zobrazením $f : U \to G$. Nechť $x \in X$. Protože množina $\{f(x)\} \subseteq G$ je otevřená. Existuje tedy okolí $V \subseteq U$ bodu x, takové, že $f(V) \subseteq \{f(x)\}$, neboli $f(y) = f(x)$ pro všechny $y \in V$. Takovým funkcím se říká **lokálně konstantní** a dá se ukázat, že jsou vždycky spojité vzhledem k diskrétní topologii na G. Dostáváme tedy svazek lokálně konstantních funkcí $\overline{G}_X$, kde

$$\overline{G}_X(U) := \{f : U \to G \mid f \text{ je lokálně konstantní}\}, \tag{3.89}$$

kde restrikce jsou restrikce. Aby došlo ke zmatení úplně všech, $\overline{G}_X$ se nazývá **konstantní svazek s hodnotami v** G.

Tvrzení 3.6.5. *Konstantní předsvazek G_X není svazek.*

Důkaz. Uvažujme G alespoň o dvou prvcích a otevřenou podmnožinu $U = U_1 \sqcup U_2$, kde $U_1, U_2 \in \mathbf{Op}(X)$. Máme tedy otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$. Uvažujme kolekci řezů $\{s_1, s_2\}$. Pro každé $U \neq \emptyset$ je $G_X(U) = G$, volba s_1 a s_2 je ekvivalentní volbě dvou elementů G. Předpokládejme, že $s_1 \neq s_2$. Jelikož $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, je podmínka (3.87) splněna triviálně. Musí tedy existovat řez (element G) $s \in \mathcal{F}(U)$, takový že $1_G(s) = s_1$ a $1_G(s) = s_2$, což nelze splnit. ■

Nechť $\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{Ab}$ je libovolný předsvazek na X s hodnotami v kategorii abelovských grup. Předpokládejme $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$. Nechť $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí X. Budeme opět používat značení $U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$. Tentokrát však *umožníme* opakování indexů. Podobně jako při konstrukci zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti máme (tentokrát vždy nekonečnou) posloupnost množin

$$X \longleftarrow \bigsqcup_{\alpha_0 \in I} U_{\alpha_0} \;\underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\longleftarrow}}\; \bigsqcup_{(\alpha_0,\alpha_1) \in I^2} U_{\alpha_0\alpha_1} \;\underset{\partial_2}{\overset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\longleftarrow}}}\; \bigsqcup_{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \in I^3} U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \;\underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\longleftarrow}}}\; \dots, \tag{3.90}$$

kde $\partial_i : U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \to U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_k}$ „vynechá“ i-tou množinu. Opět umožňujeme opakování indexů! Na tuto posloupnost můžeme aplikovat kontravariantní funktor $\mathcal{F}$ a dostaneme posloupnost abelovských grup, kde $\delta_i := \mathcal{F}(\partial_i)$, a r je indukované inkluzemi U_α to X.

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{r} \prod_{\alpha_0 \in I} \mathcal{F}(U_\alpha) \;\underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\longrightarrow}}\; \prod_{(\alpha_0,\alpha_1) \in I^2} \mathcal{F}(U_{\alpha_0\alpha_1}) \;\underset{\delta_2}{\overset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\longrightarrow}}}\; \prod_{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \in I^3} \mathcal{F}(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \;\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}}\; \dots,$$

Abelovské grupy v této posloupnosti se nazývají grupy **Čechových** p**-řetězců** $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ příslušné předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$, tedy

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0,\dots,\alpha_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \dots U_{\alpha_p}). \tag{3.91}$$

Podobně jako při konstrukci Mayer-Vietorisovy posloupnosti můžeme nyní nakombinovat jednotlivé restrikce a definovat **Čechův operátor kohranice** $\delta_{\mathcal{F}} : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ jako

$$(\delta_{\mathcal{F}}\omega)_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i+1}\delta_i(\omega_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_p}), \tag{3.92}$$

kde $\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ jsou komponenty $\omega \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Opět lze snadno ukázat, že $\delta_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

Definice 3.6.6. Kořetězcový komplex $(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}),\delta_{\mathcal{F}})$ se nazývá **Čechův kořetězcový komplex** příslušný předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$. Příslušná kohomologická grupa se značí jako $\check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ a nazývá se **Čechova kohomologie** příslušná předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$.

Nyní uvažujme kategorii $\mathbf{OpC}(X)$, jejíž objekty jsou otevřená pokrytí a právě jeden morfismus $j_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, je-li $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, neboli $\mathcal{V}$ je zjemnění $\mathcal{U}$. Všimněte si, že pro každá dvě otevřená pokrytí $\mathcal{U},\mathcal{U}' \in \mathbf{OpC}(X)$ existuje **společné zjemnění** $\mathcal{V} \in \mathbf{OpC}(X)$ takové, že $\mathcal{U},\mathcal{U}' \prec \mathcal{V}$. Za povšimnutí stojí, že $\mathbf{OpC}(X)$ není množina.

Tvrzení 3.6.7. *Přiřazení* $\mathcal{U} \mapsto \check{\mathrm{H}}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ *definuje funktor* $\check{\mathrm{H}}(\mathcal{F}) : \mathbf{OpC}(X) \to \mathbf{Ab}$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ a $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in J}$. Je-li $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, existuje zobrazení $\phi : J \to I$ takové, že $V_\beta \subseteq U_{\phi(\beta)}$. Pro dané ϕ můžeme definovat morfismus abelovských grup $\hat{\phi} : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Pro $\omega \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ definujeme

$$(\hat{\phi}(\omega))_{\beta_1\ldots\beta_p} := \rho^{U_{\phi(\beta_1)\ldots\phi(\beta_p)}}_{V_{\beta_1\ldots\beta_p}}(\omega_{\phi(\beta_1),\ldots,\phi(\beta_p)}), \tag{3.93}$$

kde využíváme inkluze $V_{\beta_1\ldots\beta_p} \subseteq U_{\phi(\beta_1)\ldots\phi(\beta_p)}$. Nyní se dá snadno ukázat, že toto zobrazení komutuje s příslušnými Čechovými kodiferenciály a indukuje tedy zobrazení $\phi_* : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Připomeňme, že pro jedno zjemnění $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ může být mnoho zobrazení ϕ. Dá se ale ukázat (lze nalézt v literatuře) že zobrazení ϕ_* na konkrétní volbě nezávisí. ■

Předsvazku $\mathcal{F}$ a topologickému prostoru bychom chtěli přiřadit veličinu, která by nezávisela na konkrétním otevřeném pokrytí $\mathcal{U}$. Předpokládejme, že X je takzvaný **Lindelöfův prostor**, kde každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má spočetné podpokrytí. Například každá hladká varieta je takový prostor. Označme jako $\mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)$ množinu všech spočetných pokrytí X.

Definice 3.6.8. Nechť X Lindelöfův prostor. Potom **Čechovou kohomologií prostoru** X **a předsvazku** $\mathcal{F}$ nazýváme tzv. **přímou limitu přes spočetná pokrytí**

$$\check{\mathrm{H}}^p(X,\mathcal{F}) := \varinjlim_{U\in\mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)} \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}), \tag{3.94}$$

kde abelovská grupa na pravé straně je jednoznačně (až na izomorfismus) definována vlastnostmi:

(i) pro každé $\mathcal{U} \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)$ máme homomorfismus $\pi_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^p(X,\mathcal{F})$;

(ii) je-li $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, platí $\pi_{\mathcal{V}} \circ \phi_* = \pi_{\mathcal{U}}$;

(iii) je-li A libovolná abelovská grupa a $\{\tau_{\mathcal{U}}\}_{\mathcal{U}\in\mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)}$ je kolekce zobrazení $\tau_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to A$ mající vlastnost (ii), existuje *unikátní* homomorfismus $\varphi : \check{\mathrm{H}}^p(X,\mathcal{F}) \to A$ splňující $\varphi\circ\pi_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{U}}$ pro každé $\mathcal{U} \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)$. Tomuto se říká **vlastnost univerzality**.

Tvrzení 3.6.9. *Taková grupa existuje.*

Důkaz. Uvažujme abelovskou grupu $G = \bigoplus_{U \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)} \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Nechť

$$M = \{[\omega] - \phi_*[\omega] \mid [\omega] \in \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ \phi_* : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})\}. \tag{3.95}$$

Nyní se vezme ideál $I = \langle M \rangle$ generovaný touto množinou (nejmenší ideál v A obsahující M. Potom stačí $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathcal{F})$ definovat jako příslušný faktorprostor G/I. Nechť $\natural : G \to G/I$ je příslušné faktorzobrazení.

Pro každé $\mathcal{U} \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)$ definujeme $\pi_{\mathcal{U}} = \natural \circ i_{\mathcal{U}}$, kde $i_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to G$ je inkluze do direktní sumy. Nechť $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ a ϕ_* je příslušné zobrazení. Pro každé $[\omega] \in \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ máme

$$(\pi_{\mathcal{V}} \circ \phi_*)[\omega] = \natural(\phi_*[\omega]) = \natural([\omega] - ([\omega] - \phi_*[\omega])) = \pi_{\mathcal{U}}[\omega]. \tag{3.96}$$

Máme tedy splněny vlastnosti (i) a (ii). Nechť A je libovolná abelovská grupa s kolekcí zobrazení $\tau_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to A$ mající vlastnosti (ii). Můžeme definovat zobrazení $\hat{\varphi} : G \to A$ předpisem $\hat{\varphi} \circ i_U := \tau_U$. Předpoklad zajistí, že $I \subseteq \ker(\hat{\varphi})$ a dostáváme tedy homomorfismus grup $\tau : G/I \to A$. Potom $\tau \circ \pi_U = (\tau \circ \natural) \circ i_U = \hat{\varphi} \circ i_U = \tau_U$. Z konstrukce je jasné, že neexistuje jiné zobrazení splňující $\tau \circ \pi_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{U}}$. ∎

Definice 3.6.10. Pro $\mathcal{F} = G_X$ dostáváme klasickou **Čechovu kohomologii s koeficienty v** G, označujeme jednoduše jako $\check{\mathrm{H}}^p(X, G) := \check{\mathrm{H}}^p(X, G_X)$. Pro zajímavost, je-li X parakompaktní topologický prostor, máme $\check{\mathrm{H}}^p(X, G_X) \cong \check{\mathrm{H}}^p(X, \overline{G}_X)$.

Poznámka 3.6.11. Na závěr si řekněme několik poznámek bez důkazů.

1) Je-li X hladká varieta, lze $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathcal{F})$ počítat jako přímou limitu pouze přes dobrá pokrytí.

2) Místo všech kořetězců můžeme uvažovat podkomplex $C'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ **alternujících** p**-kořetězců**, kde kdykoliv se dva indexy opakují, dostaneme nulu a platí pravidlo

$$\omega_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots} = -\omega_{\ldots\beta\ldots\alpha\ldots}. \tag{3.97}$$

   Operátor $\delta_{\mathcal{F}}$ se zúží na zobrazení $\delta_{\mathcal{F}} : C'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C'^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ a my tak můžeme spočítat kohomologii $\check{\mathrm{H}}'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Dá se ukázat, že $\check{\mathrm{H}}'^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, ale vyžaduje to dost znalostí teorie abstraktních simpliciálních komplexů.

3) Čechova kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ pokrytí $\mathcal{U}$ (z Čechova-de Rhamova komplexu) je Čechova kohomologie pro konstantní svazek $\overline{\mathbb{R}}_M$. Jelikož jsme ukázali, že nezávisí na volbě dobrého pokrytí $\mathcal{U}$, dostáváme z bodu 1) $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\mathcal{U}, \overline{\mathbb{R}}_M) \cong \check{\mathrm{H}}^\bullet(M, \overline{\mathbb{R}}_M)$. Jelikož je M parakompaktní, platí rovněž $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\mathcal{U}, \overline{\mathbb{R}}_M) \cong \check{\mathrm{H}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

4) Čechovy kohomologie se přirozeně objevují v diferenciální geometrii. Například, hlavní fibrované prostory $\pi : P \to M$ s abelovskou strukturní grupou G jsou klasifikovány grupou $\check{\mathrm{H}}^1(M, C^\infty_{M,G})$, kde $C^\infty_{M,G}(U) := C^\infty(U, G)$ jsou hladká zobrazení z U do G. Jinými slovy, každé třídě izomorfismů $[P]$ přísluší právě jeden element $\check{\mathrm{H}}^1(M, C^\infty_{M,G})$.

5) Třídy Čechovy kohomologie často měří obstrukci nějaké geometrické vlastnosti. Například pro každou varietu M existuje její **první Stiefelova-Whitneyho třída**, kanonicky definovaná třída v $\check{\mathrm{H}}^1(M, \mathbb{Z}_2)$. Tato třída je triviální, právě tehdy když M je orientovatelná.

   Podobně, existuje **druhá Stiefelova-Whitneyho třída** v $\check{\mathrm{H}}^2(M, \mathbb{Z}_2)$. Tato třída je triviální, právě tehdy když na M existuje spinová struktura. Množina všech neekvivalentních spinových struktur je pak přímo grupa $\check{\mathrm{H}}^1(M, \mathbb{Z}_1)$.

Literatura

[1] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, vol. 82. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] J. Gallier and J. Quaintance, *A gentle introduction to homology, cohomology, and sheaf cohomology*, 2016.

[3] M. Goto and F. D. Grosshans, *Semisimple lie algebras*. CRC, 1978.

[4] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.