

# SSZ - Pokročilé Geometrické Metody Fyziky

# 1. Diferencovatelná varieta, tečné vektory, tečný prostor, vektorové pole a jeho integrální křivky, Lieova algebra vektorových polí, tečné zobrazení

Def Parakompaktní Hausdorffův topologický prostor  $(M, \tau)$  vybavený maximálním  $C^\infty$  atlasem se nazývá diferencovatelná varieta

Def Parakompaktní  $\Leftrightarrow$  každé otevřené pokrytí má lokálně konečné zjemnění

pozn parakompaktnost  $\Rightarrow$  existence lokálně jednotky

Def (Ekvivalentní definice tečného vektoru)

1) Tečný vektor k varietě v bodě  $p \in M$  je třída ekvivalence křivek  $X = [\gamma]$  podle ekvivalence

$$\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}, \quad \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p, \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

2) Tečný vektor  $X$  k varietě  $M$  v bodě  $p \in M$  je zobrazení  $X: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  splňující

i)  $X(af + g) = aXf + Xg$

ii)  $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$

iii)  $\forall f, g \in C^\infty(M): \exists U$  okolí  $p, f|_U = g|_U \Rightarrow Xf = Xg$

Def Tečný prostor  $T_p M$  v bodě  $p \in M$  je vektorový prostor tvořený tečnými vektory v bodě  $p$ .

Def • Vektorové pole je hladké zobrazení, které bodu variety přiřadí tečný vektor v daném bodě hladkým způsobem tj. je to řez tečného bundlu

• Vektorové pole je derivace asociativní komutativní algebry hladkých funkcí

Def Integrální křivka vektorového pole  $X \in \mathfrak{X}(M)$  vycházející z bodu  $p_0 \in M$  je hladké zobrazení  $\gamma: (a, b) \rightarrow M, a < 0 < b, \gamma(0) = p_0$  yhovující  $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t) = X|_{\gamma(t)}$

pozn v lokálních souřadnicích

$$\frac{d}{dt} \gamma^i = X^i(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$$

Věta Množina všech vektorových polí tvoří Lieovu algebru vzhledem ke komutátoru vektorových polí

pozn Komutátor vektorových polí v lokálních souřadnicích

$$[X, Y] = [X(Y^i) - Y(X^i)] \partial_i$$

Def Tečné zobrazení  $\phi_*$  v bodě  $p \in M$  indukované hladkým zobrazením  $\phi: M \rightarrow N$  je zobrazení  $\phi_*: T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$  definované předpisem

$$(\phi_*(X))f = X(f \circ \phi), \quad X \in T_p M, f \in C^\infty(N)$$

## 2. Vnější algebra diferenciálních forem, vnější a Lieova derivace, Poincaréovo lemma, pullback forem

Def Kotečný prostor  $T_p^*M$  k varietě  $M$  v bodě  $p$  je vektorový prostor duální k tečnému prostoru  $T_pM$ .

- podobně jako pro tečné prostory lze sestavit tečný bundle, tak pro kotečné lze sestavit kotečný bundle

Def Diferenciální 1-forma je řez kotečného bundle

Def Vnější algebra  $\Lambda(V)$  vektorového prostoru  $V$  je definována jako faktoralgebra volné tenzorové algebry  $T(V)$  podle oboustranného ideálu  $I$  generovaného prvky  $x \otimes x$ ,  $x \in V$

$$\Lambda(V) = T(V)/I$$

Def Řezy bundle  $\Lambda(T^*M)$  vytvořeného z vláken  $\Lambda(T_p^*M)$  nazýváme diferenciální formy na  $M$   
a  $\Gamma(\Lambda(T^*M)) \cong \Omega(M)$

pozn Diferenciální  $k$ -forma  $\omega \in \Gamma(\Lambda^k(T^*M)) \cong \Omega^k(M)$  je hladké zobrazení, které každému bodu  $p \in M$  přiřazuje totálně antisymetrickou  $k$ -lineární formu na  $T_pM$

Def Vnější derivace  $d$  diferenciální formy je lineární zobrazení splňující podmínkami

- 1)  $d(\tau \wedge \omega) = d\tau \wedge \omega + (-1)^k \tau \wedge d\omega$ , kde  $\tau \in \Omega^k(M)$ ,  $\omega \in \Omega(M)$
- 2)  $df(X) = Xf$ ,  $f \in C^\infty(M) \cong \Omega^0(M)$ ,  $X \in \mathcal{X}(M)$
- 3)  $d^2 = 0$

pozn v souřadnicích pro  $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$   $d\omega = d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

Def Tok vektorového pole  $X \in \mathcal{X}(M)$  je zobrazení  $\Phi_X: U \subset M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  takové, že  $\Phi_X(p, 0) = p$  a  $\Phi_X(p, t) = \gamma_X^p(t)$ , kde  $\gamma_X^p$  je integrační křivka  $X$  startující v  $p$

pozn  $\Phi_X^t(p) \equiv \Phi_X(p, t)$

Def Pullbackem při hladkém zobrazení  $\phi: M \rightarrow N$  nazýváme zobrazení  $\phi^*: \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$  definované  $\phi^*(\omega)|_p(X_1, \dots, X_k) = \omega|_{\phi(p)}(\phi_*(X_1|_p), \dots, \phi_*(X_k|_p))$ , kde  $\omega \in \Omega^k(N)$ ,  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$

Def Pro  $X \in \mathcal{X}(M)$  a  $\omega \in \Omega(M)$  definujeme Lieovu derivaci diferenciální formy  $\omega$  ve směru vektorového pole  $X$  předpisem

$$\mathcal{L}_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi_X^t{}^* \omega - \omega)$$

Věta  $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$

Věta (Poincaréovo lemma)

Bud'  $\omega$  uzavřená  $k$ -forma na varietě  $M$  a  $U$  otevřená podmnožina diffeomorfní otevřené kouli v  $\mathbb{R}^{\dim M}$ . Pak existuje  $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$  takové, že  $\omega|_U = d\alpha$

### 3. Fibrovaný prostor, jeho konstrukce pomocí přechodových zobrazení, tečný a kotečný fibrovaný prostor, fázový prostor jako kotečný fibrovaný prostor vybavený kanonickou 2-formou, Hopfova fibrace

Def Některé  $\pi: E \rightarrow M$  je hladké surjektivní zobrazení (projekce) dvou hladkých variet  $E$  (totální prostor) a  $M$  (bazické varieta). Některé  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  je otevření pokrytí variety  $M$  a  $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  je kolekcí hladkých diffeomorfismů  $\phi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  taková, že  $(\pi \circ \phi_\alpha)(u, f) = u \quad u \in U_\alpha \subset M \quad f \in F$  (typické vložení)

Přitom  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  nazýváme lokální trivializace

Trojice  $(E, M, \pi)$  se nazývá fibrovaný prostor pokud existuje lokální trivializace

Věta Některé  $\pi: E \rightarrow M$  je zobrazení z množiny  $E$  do hladké variety  $M$ . Některé  $F$  je hladká varieta. Bud'  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  otevření pokrytí  $M$  a mějme bijektivní zobrazení  $\phi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  taková, že  $u \in U_\alpha, f \in F \quad \pi(\phi_\alpha(u, f)) = u$ . Pokud všechna přechodová zobrazení hladká pak existuje jednoznačný způsob jak udělat z  $\pi: E \rightarrow M$  fibrovaný prostor

#### Tečný bundle

•  $E = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \{X \in T_p M \mid p \in M\} \quad \pi(X) = p \quad \forall X \in T_p M$

• Bud'  $\{U_\alpha, x_\alpha^i\}$  atlas na  $M$ , za typické vložení zvolíme  $F = \mathbb{R}^n \quad n = \dim M$

•  $\phi_\alpha^{-1}(X) = (p, X'_1, \dots, X'_n)$  kde  $X = X'_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p \in T_p M, p \in U_\alpha$

$$\phi_\alpha(p, X'_1, \dots, X'_n) = X'_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \Big|_p \in T_p M$$

• pro  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \quad g_{\alpha\beta} = \pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$

$$\phi_\beta(p, X'_1, \dots, X'_n) = X'_i \frac{\partial}{\partial x_\beta^i} \Big|_p = X'_i \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \Big|_p = \phi_\alpha(p, \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i} X'_i, \dots, \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^i} X'_i)$$

$$\Rightarrow [g_{\alpha\beta}(p)]_j^i = \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}$$

• pro kotečný bundle  $[g_{\alpha\beta}(p)]_j^i = \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}$

#### Hamiltonovská mechanika

• Pro systém s konfiguračním prostorem  $N$  lze fázový prostor modelovat kotečným bundlem  $T^*N$

• na  $T^*N$  existuje kanonická 1-forma  $\lambda$  definovaná

$$\lambda|_\alpha = \pi^*(\alpha) \quad \alpha \in T^*N \quad \text{a} \quad \pi: T^*N \rightarrow N \quad \text{bundlová projekce}$$

• lze zvolit lokální souřadnice  $(x^i, p_i)$  (Darbouxovy souřadnice) tak, že  $x^i(\alpha) = x^i(\pi(\alpha)), p_i(\omega_k dx^k) = \omega_i$

• kanonická 2-forma  $\omega = d\lambda$  je příkladem symplektické 2-formy t.j. uzavřené nedegenerované 2-formy.

Def Vektorové pole  $X$  na symplektické varietě  $(M, \omega)$  je

• lokálně hamiltonovské právě když  $d\iota_X \omega = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_X \omega = 0$

• hamiltonovské právě když  $\iota_X \omega = -df$ , pak  $X \equiv X_f$

pozn  $M = T^*N \quad \omega = dp_i \wedge dx^i$  pak  $X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$  je tečný vektor k fázovým trajektoriím

Def Bud'  $(M, \omega)$  symplektická varieta. Pak zobrazení  $\phi: M \rightarrow M$  nazýváme kanonické pokud  $\phi^* \omega = \omega$



Věta Necht  $(M, \omega)$  je symplektická varieta,  $X \in \mathcal{X}(M)$ .  $X$  je lokálně hamiltonovské právě když jeho tok definuje 1-parametrickou lokální grupu kanonických transformací

Def Poissonova závorka dvou hladkých funkcí  $f, g \in C^\infty(M)$  na symplektické varietě  $(M, \omega)$  je definována

$$\{f, g\} = \dot{x}_f \dot{x}_g \omega = -X_f(g) - X_g(f)$$

Věta  $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$

Hopfova fibrace  $\pi: S^3 \rightarrow S^2$

•  $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :  $\pi(x)_i = x^\dagger \sigma_i x \rightarrow \|\pi(x)\|^2 = \|x\|^4 \Rightarrow \pi: S^3_{\mathbb{C}} \rightarrow S^2_{\mathbb{R}} \Rightarrow \pi: S^3 \rightarrow S^2$

•  $\pi$  je elivariantně vřizí akci grupy  $SU(2)$  :  $A \in SU(2) : \pi(Ax) = \Theta_A \pi(x)$

kde  $\Theta_A: SU(2) \rightarrow SO(3)$  je na vřivací homomorfismus definovaný vztahem

$$(\Theta_A \vec{x})_i \sigma_i = A(\vec{x} \cdot \vec{\sigma}) A^\dagger$$

•  $\pi: S^3 \rightarrow S^2$  je surjektivní: Obraz libovolného  $x$  lze popravít rotací díky elivarienci

• grupa  $U(1)$  zachovává vlnku a přisobí podél nich tranzitivně

$$\pi^{-1}(\vec{n}) = \{x \in \mathbb{C}^2 \mid x^\dagger x = 1 \text{ a } \vec{n} \cdot \vec{\sigma} x = x\}$$

$\Rightarrow \pi: S^3 \rightarrow S^2$  je hlavní fibrování prostor & strukturální grupou  $U(1)$

#### 4. Hlavní fibrováný prostor, strukturní grupa, existence globálních řezů a trivializovatelnost

Def Necht'  $\pi: P \rightarrow M$  je fibrováný prostor s typickým vláknem  $G$ , kde  $G$  je Lieova grupa. Necht'  $R: P \times G \rightarrow P$  je pravá akce Lieovy grupy  $G$  na  $P$  a předpokládejme

- 1) Akce  $R$  je volná a působí podél vláken
  - 2) Akce  $R$  působí na vláknech transitivně
  - 3) Existuje principální lokální trivializace, tj. lokální trivializace  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ , kde  $\phi_\alpha$  jsou elivariantní
- Potom fibrováný prostor  $(P, M, \pi, R)$  nazýváme hlavním fibrováným prostorem.

Tvrzení Přechodové zobrazení principálních trivializací mají hodnoty v  $G \subseteq \text{Diff}(G)$

Dů  $(g_{\alpha\beta}(u))(h) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(u, h)) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(u, e) \cdot h) = \underbrace{(\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(u, e))}_{\hat{g}_{\alpha\beta}(u)} \cdot h = \hat{g}_{\alpha\beta}(u) \cdot h = L_{\hat{g}_{\alpha\beta}(u)} h$

Tvrzení Necht'  $\pi: P \rightarrow M$  je hlavní fibrováný prostor. Necht'  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  je otevřené pokrytí  $M$  a  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$  kolekcí hladkých lokálních řezů. Potom  $\phi_\alpha: U_\alpha \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  definované jako  $\phi_\alpha(m, g) = g_\alpha(m) \cdot g$  zadávají principální lokální trivializaci  $P$ .

Dů transitivita akce  $\Rightarrow p = g_\alpha(\pi(p)) \cdot g_\alpha(p)$  pro  $p \in \pi^{-1}(U_\alpha) \Rightarrow \phi_\alpha^{-1}(p) = (\pi(p), g_\alpha(p))$

Důsledek Hlavní fibrováný prostor je trivializovatelný právě když existuje nějaký globální hladký řez.

## 5. Přidružené vektorové fibrované prostory

Def Necht'  $\pi: P \rightarrow M$  je hlavní fibrovaný prostor s akcí  $R: P \times G \rightarrow P$  grupy  $G$ . Necht'  $q: E \rightarrow P$  je vektorový bundl s typickým vláknem  $V$  a pravou akcí  $R: E \times G \rightarrow E$ .  
 Řekneme, že  $E$  je elivariantní vektorový bundl, pokud platí

- 1)  $\forall g \in G$  ( $R_g, R_g$ ) je automorfismus vektorového bundlu  $E$
- 2) Existuje  $\pi$ -saturovaná elivariantní lokální trivializace  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  tak  
 $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) \quad \text{a} \quad \psi_\alpha(p \cdot g, v) = \psi_\alpha(p, v) \cdot g$

Tvzení Na prostoru orbit  $E/G$  elivariantního vektorového bundlu  $E$  lze zavést jedinečnou strukturu vektorového bundlu  $q^*: E/G \rightarrow M$  tak, že faktor zobrazení  $q$  dává pověšence bijektivní morfismus vektorových bundlů  $E$  a  $E/G$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & E/G \\ \pi \downarrow & & \downarrow q^* \\ P & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} \quad \text{je komutativní diagram}$$

Tvzení Řezy  $\Gamma(E/G)$  jsou kanonicky izomorfní s  $G$ -invariantními řezy  $\Gamma_G^0(E)$

uk  $\Phi: \Gamma_G^0(E) \rightarrow \Gamma(E/G) \quad \Phi(\psi)(u) = q(\psi(p)), \pi(p) = u$

Def Bud'  $\pi: P \rightarrow M$  hlavní fibrovaný  $G$ -prostor a  $(V, \rho)$  konečněrozměrná reprezentace  $G$ . Potom na triviálním vektorovém bundlu  $P \times V \rightarrow P$  můžeme definovat pravou akci  $R_g(p, v) = (R_g(p), \rho(g)v)$

Potom vektorový bundl  $P \times_G V \equiv (P \times V)/G \rightarrow M$  se nazývá vektorový bundl přidružený hlavní fibraci  $\pi: P \rightarrow M$  a reprezentaci  $(V, \rho)$

Tvzení Řezy  $P \times_G V$  lze kanonicky identifikovat s veličinami typu  $\rho$ .

## 6. Konexe v hlavním fibrovaném prostoru, její abstraktní geometrická definice a souřadnicové vyjádření

### Ehresmanova konexe

Def Vertikální prostor v bodě  $p \in E$  je  $V_p E = \ker \pi_*|_p$

Konexe na fibrovaném prostoru odpovídá volbě doplněk vertikálního prostoru  $\ker \pi_* \oplus V_p E = T_p E$

- Pro hlavní fibrované prostory existuje kanonický izomorfismus Lieovy algebry  $\mathfrak{g}$  a vertikálního podprostoru  
 $\#_p(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \cdot \exp(tX)$
- toto přiřazení je  $G$ -invariantní  
 $R_{g*}(\#x) = \#(Ad_{g^{-1}}(x)) \Rightarrow R_{g*}(V_p P) = V_{p \cdot g} P$
- Volba konexe lze psát pomocí 1-formy  $A$  s hodnotami v Lieově algebře  
 $\rightarrow$  fixování horizontálního podprostoru volbou projektoru na vertikální podprostor

Def Formou konexe na hlavním fibrovaném prostoru  $\pi: P \rightarrow M$  nazýváme 1-formu  $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  pokud splňuje

- 1)  $A(\#x) = x \quad \forall x \in \mathfrak{g}$
- 2)  $R_g^*(A) = Ad_{g^{-1}}(A)$

Pozn Nejobecnější forma konexe na triviálním bundlu  $A|_{(m,g)} = Ad_{g^{-1}} \pi_1^*(A')|_{(m,g)} + \pi_2^*(\omega_{MC})|_{(m,g)}$   
 $= \tilde{g}^{-1} A' g + \tilde{g}^{-1} dg, \quad A' \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$

## 7. Forma křivosti konexe, Cartanova strukturní rovnice

Forma křivosti  $F \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$  je definovaná jako obstrukce v integrabilitě horizontální distribuce

$$F(X, Y) = dA(\text{hor} X, \text{hor} Y) - D_A(X, Y)$$

Lemma, Horizontální distribuce je integrabilní  $\Leftrightarrow F = 0$

Plebi  $R_g^* F = \text{Ad}_{g^{-1}}(F)$

$$F = dA + \frac{1}{2} [A \wedge A]_{\mathfrak{g}}$$

Bianchijho identita  $DF = 0 = dF + [A \wedge F]_{\mathfrak{g}}$

Ricciho identita:  $D^2 \alpha = d\langle F \rangle \wedge \alpha$   $\alpha$  je forma typu  $g$

## 8. Paralelní přenos

• Pro hlavní fibrovací prostor  $\pi: P \rightarrow M$  lze jednoznačně zderivovat vektorová pole  $\rightarrow$  pro  $X \in T_m M$  a  $p \in P_m$  existuje právě jeden vektor  $X_p^h \in H_p P$  takový, že  $\pi_* X_p^h = X$

• v trivializovaných souřadnicích  $X^i(p) = x^i(\pi(p))$   $\dot{y}^i(p) = \dot{y}^i(\pi(\Phi'(p)))$   
 $\partial_i^h = \partial_i - A_i^a(\partial_i) \# t_a$

Věta (Paralelní přenos)

Nechť  $\gamma: I \rightarrow M$  je hladká křivka a  $\gamma(0) = m$ . Nechť  $p \in P_m$  je libovolný bod. Potom existuje právě jedna hladká křivka  $\gamma^h: I \rightarrow P$  taková, že  $\pi \circ \gamma^h = \gamma$ ,  $\gamma^h(0) = p$  a pro každé  $t \in I$  platí  $\dot{\gamma}^h \in H_{\gamma^h(t)} P$ .  $\gamma^h$  se nazývá horizontální zdvih křivky  $\gamma$

$$\dot{\gamma}^h(t) = \frac{d}{dt} x^i(\gamma(t)) \left( \partial_i|_{\gamma(t)} - A_i^a(\gamma(t)) \# t_a|_{\gamma(t)} \right)$$

pro afinní konexi  $\dot{y}_b^a(t) + \dot{x}^i(t) \Gamma_{ci}^a(t) \dot{y}_b^c = 0$

Def Velikost typu  $\zeta$   $\Phi \in \Sigma^0(P, V)$  je autoparalelní podél křivky  $\gamma$  právě, když  
 $0 = \frac{d}{dt} (\Phi \circ \gamma^h(t)) = \dot{\gamma}^h \cdot \Phi$

Def Body  $p, q \in P$  jsou ekvivalentní pokud je lze propojit paralelním přenosem. Definujeme

$$\text{Hol}_p(A) = \{g \in G \mid g \cdot p \sim p\}$$

grupu holonomie konexe  $A$  v bodě  $p \in P$

$$\text{Hol}_{p \cdot g}(A) = \bar{g}^{-1} \text{Hol}_p(A) g$$

Věta (Ambrose - Singer)  $\text{Lie}(\text{Hol}_p(A)) = \bigcup_{q \in \Gamma(p)} \text{Im}(\Sigma|_q)$ , kde  $\Gamma(p) = \{q \in P \mid q \sim p\}$

## 9. Lokální forma konexe a křivosti jako kalibrační pole, kalibrační transformace

10. Kovariantní derivace v přidruženém fibrovaném prostoru, minimální elektromagnetická interakce, klasické Yang-Millsovo pole