SZZ - Kvantová teorie pole

1. Relativistická vlnová rovnice pro skalární částici, Klein-Gordonova rovnice, Klein-Gordonova rovnice ve Feshbach-Villarsově reprezentaci, řešení pro volnou skalární částici, rovnice kontinuity a její problémy, nerelativistická limita, Kleinův paradox. ?

Klein – Gordonova rovnice

- snaha o kvantizaci kvadrátu 4-hybnosti $p_\mu p^\mu = m^2 = E^2 - \vec{p}^2$

$$\vec{p} \to -i\vec{\nabla}, \quad E \to i\frac{\partial}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\phi = m^2\phi$$

$$\to (\Box + m^2)\phi = 0 \qquad \Box = \partial_\mu\partial^\mu = \partial_t^2 - \Delta$$

- jde o diferenciální rovnici druhého řádu v čase a tedy řešení závisí nejen na počáteční poloze, ale i na počáteční rychlosti

- rovnici budeme řešit ve Fourierově obraze

$$(p^2 - m^2)\tilde{\phi}(p) = 0 \Rightarrow \tilde{\phi}(p) = f(p)\,\delta(p^2 - m^2) = \frac{f(p)\,\delta(p_0 + \overbrace{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}^{\omega_p})}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} + \frac{f(p)\,\delta(p_0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

$$\to \phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip\cdot x}\Big(f(p)\,\delta(p_0 + \omega_p) + f(p)\,\delta(p_0 - \omega_p)\Big)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p}\left(f(\omega_p, \vec{p})e^{-ipx} + f(-\omega_p, -\vec{p})e^{ipx}\right)$$

- definujeme 4-proud v analogii s klasickou kvantovou mechanikou

$$J_\mu = \frac{i}{2m}\left(\phi^*\partial_\mu\phi - (\partial_\mu\phi)^*\phi\right) \to \partial_\mu J^\mu = 0$$

- lze pak definovat Lorentzovsky invariantní normu, která ale není pozitivně definitní

$$\|\phi\|^2 = \int d^4x\, J^\mu\,\partial_\mu\,\theta(n_\alpha x^\alpha), \text{ kde } n_\alpha n^\alpha = 1$$

$\to$ J_0 nelze interpretovat jako hustotu pravděpodobnosti

- Feshbach – Villarsova reprezentace přejde se od ϕ k dvousložkové vlnové funkci $\Phi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \chi) = \phi, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - \chi) = \frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial t}\phi$$

$\to$ Φ vyhovuje Schrödingerovské rovnici $i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = H\Phi$, kde $H = (\sigma_3 + i\sigma_2)\frac{1}{2m}P^2 + m\sigma_3$

- $J_0 = \Phi^*\sigma_3\Phi = |\varphi|^2 - |\chi|^2$
- pokud by se pomocí minimální interakce zavedlo EM pole $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ pak ke každé vlnové funkci Φ řešící $i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = H(e)\Phi$ existuje $\Phi_c = \begin{pmatrix}\chi^*\\ \varphi^*\end{pmatrix}$ řešící $i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_c = H(-e)\Phi_c$

$\Rightarrow$ J_0 lze interpretovat jako hustotu elektrického náboje

- dalším problémem Klein – Gordonova operátoru je, že nemá zdola omezené spektrum
  $\Rightarrow$ nestabilita hmoty

- nerelativistická limita $E = m + \varepsilon$, $\varepsilon \ll m$ $\to$ vyfaktorizujeme rychle oscilující člen s hmotou

$$\phi(x) = \phi(\vec{x}, t) = e^{-imt}\varphi(\vec{x}, t)$$

$$(\Box + m^2)\phi = e^{-imt}\left[\left(-m^2 - 2im\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi - \Delta\varphi + m^2\varphi\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\Delta}{2m}\varphi$$

$$J_0 = \frac{i}{2m}\left[\phi^*\partial_0\phi - (\partial_0\phi)^*\phi\right] = \frac{i}{2m}\left[(-im)\varphi\varphi^* + \varphi^*\partial_0\varphi + \varphi\,\partial_0\varphi^* - im\,\varphi\varphi^*\right] = \varphi\varphi^*$$

$$\vec{J} = \frac{i}{2m}\left[\varphi^*\nabla\varphi - (\nabla\varphi)^*\varphi\right]$$

2. Relativistická vlnová rovnice pro částici se spinem ½, Diracova rovnice, Lorentzova grupa a její reprezentace, invariance Diracovy rovnice vůči vlastním Lorentzovým transformacím a bilineární formy, řešení Diracovy rovnice pro volnou částici, Diracova, Weylova a Majoranova reprezentace, rovnice kontinuity a její problémy, zitterbewegung, nerelativistická limita.

Diracova rovnice $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$

- $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ jsou Diracovy matice splňující $\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$, – definiční vztah Cliffordovy algebry $Cl(1,3)$

=> díky tomu Ψ splňuje i Klein-Gordonovu rovnici neboť

$$\Box + m^2 = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$$

- Ψ má čtyři složky a nazývá se Diracův bispinor

Lorentzova grupa $SO(3,1)$

- Lorentzova grupa má čtyři komponenty souvislosti a dimenzi šest, generátory $(M^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = 2i(\eta^{\rho\mu}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\rho\nu}\delta^\mu_\sigma)$
- generátory rotací a boostů

$$J_i = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk} M^{jk}, \quad K^i = \frac{1}{2} M^{0i}$$

- komutační relace: $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$, $[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k$, $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k$

- lze je diagonalizovat $N_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$, $N_i^\dagger = \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$

$\longrightarrow [N_i, N_j^\dagger] = 0$, $[N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk} N_k$, $[N_i^\dagger, N_j^\dagger] = i\varepsilon_{ijk} N_k^\dagger$

=> $so(3,1) \cong su(2) \oplus su(2)$

- operátor parity mapuje $N_i \longleftrightarrow N_i^\dagger$
- spinové reprezentace $so(3,1)$ jsou dány direktními součty spinových reprezentací algebry $su(2)$
- máme-li spinové reprezentace (m,n) pak jejich direktní součet je reprezentace $so(3,1)$ se spinem $m+n$
- prostor Diracových bispinorů odpovídá direktnímu součtu dvou $so(3,1)$ reprezentací se spinem $1/2$

- požadujeme následující transformaci γ matic $S^{-1}(L)\gamma^\mu S(L) = L^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

$\longrightarrow S(L) = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\right)$, kde $L = \exp\left(-\frac{i}{4}M^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\right)$

- generátory této reprezentace jsou bivektory $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

Diracovy bilineární formy

- adjungovaný spinor $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$ =>

$$\Psi(x) \xrightarrow{L} \Psi_L(x) = S(L)\Psi(L^{-1}x)$$
$$\overline{\Psi}(x) \xrightarrow{L} \overline{\Psi}_L(x) = \overline{\Psi}(L^{-1}x)\, S(L)^{-1}$$

- skalár $S(x) = \overline{\Psi}(x)\Psi(x)$

- vektor $J^\mu(x) = \overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)$

- bivektor $A^{\mu\nu}(x) = \overline{\Psi}(x)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Psi(x)$

- pseudovektor $\overline{\Psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\Psi(x)$

- pseudoskalár $P(x) = \overline{\Psi}(x)\gamma^5\Psi(x)$

} • při paritě se chovají opačně než skaláry a vektory
 • $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$\longrightarrow$ Lorentzovsky kovariantní veličiny

- to pravděpodobnosti se definuje jako vektorový bilineár
  $J_\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu \Psi(x)$
- norma bispinorů $(\Psi,\Psi) = \int d^3x\, J_0(x) = \int d\sigma\, n_\mu J^\mu(x)$
  - Lorentzovsky invariantní
  - časově nezávislá
  - positivně definitní $\bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\Psi$

Reprezentace γ^μ matic

- Diracova reprezentace $\gamma^0 = \sigma_3 \otimes \mathbb{1}$, $\vec{\gamma} = i\sigma_2 \otimes \vec{\sigma} \Rightarrow \gamma^5 = \sigma_1 \otimes \mathbb{1}$

- Chirální (Weylova) reprezentace $\gamma^0 = \sigma_1 \otimes \mathbb{1}$, $\vec{\gamma} = i\sigma_2 \otimes \vec{\sigma} \Rightarrow \gamma^5 = \sigma_3 \otimes \mathbb{1}$
  - v ní je působení Lorentzovy grupy blokově diagonální

- Majoranova reprezentace $\gamma^0 = \sigma^2 \otimes \sigma^1$, $\gamma^1 = i\sigma^3 \otimes \mathbb{1}$, $\gamma^2 = i\sigma_2 \otimes \sigma_2$, $\gamma^3 = -i\sigma_1 \otimes \mathbb{1}$, $\gamma^5 = \sigma_2 \otimes \sigma_3$
  - všechny matice jsou ryze imaginární

Řešení pro volnou částici

- jelikož Ψ je řešení i Klein-Gordonovy rovnice, můžeme ho psát jako superpozici módu
  $\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}\left(u(p)e^{-ipx} + v(p)e^{ipx}\right)$
- funkce $u(p)$ a $v(p)$ lze najít v klidové soustavě a pak je transformovat příslušným boostem
  $(\gamma^0 - \mathbb{1})\,u(m,\vec{0}) = 0$, $(\gamma^0 + \mathbb{1})\,v(m,\vec{0}) = 0$
- alternativně z pozorování $(\not{p}+m)(\not{p}-m) = p^2 - m^2 = (\not{p}-m)(\not{p}+m) = 0$ máme
  $u(p) = \frac{\not{p}+m}{\sqrt{E+m}}\, u(m,\vec{0})$
  $v(p) = \frac{-\not{p}+m}{\sqrt{E+m}}\, v(m,\vec{0})$

Nerelativistická limita

$$u = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\chi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_L \\ u_S\end{pmatrix} \qquad v = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\varphi \\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_S \\ v_L\end{pmatrix}$$

- $|\vec{p}| \ll m \Rightarrow u_S \ll u_L$, $v_S \ll v_L$

$$0 = (\not{p} - m)\,u = \begin{pmatrix}(E-m)\mathbb{1} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (E+m)\mathbb{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_L \\ u_S\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\; u_S = (E-m)u_L \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\; u_L = (E+m)u_S\end{matrix} \Rightarrow \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E+m}u_L = (E-m)u_L$$

$$\Rightarrow E_{NR}\, u_L = \frac{p^2}{2m}u_L$$

Zitterbewegung – časový vývoj operátoru polohy $\frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[H, x_k] = c\gamma_0\gamma_k = c\alpha_k$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = 2i\,(p_k - \alpha_k H)$$

$$\longrightarrow \alpha_k = (\alpha_k(0) - cp_k H^{-1})\,e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} + cp_k H^{-1}$$

$$\longrightarrow x_k = x_k(0) + c^2 p_k H^{-1} t + \underbrace{\frac{1}{2}i\hbar c H^{-1}(\alpha_k(0) - cp_k H^{-1})\left(e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} - 1\right)}_{\text{Zitterbewegung}}$$

- vymizí pokud uvažujeme čistě kladné nebo záporné energetické stavy

3. Relativistická částice ve vnějším elektromagnetickém poli, princip minimální vazby, relativistická částice ve sféricky symetrickém poli, kompatibilní pozorovatelné, řešení vodíkového (a vodíku podobného) atomu pomocí Diracovy rovnice, relativistické korekce energetického spektra atomu vodíku, spektrum s jemnou strukturou.

<u>Klein–Gordonova rovnice pro částici v elektromagnetickém poli</u>

- parciální derivace se nahradí kovariantními

$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ (princip minimální vazby)

$\Rightarrow (D_\mu D^\mu - m^2)\phi = 0$

<u>Diracova rovnice v EM poli</u>

$$(\not{D} - m)\Psi = 0$$

- v Schrödingerovském tvaru $i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[\vec{\alpha}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) + \beta m + q\phi\right]\Psi$, $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$

$$= (\vec{\alpha}\cdot\vec{P} + \beta m)\Psi + q(-\vec{\alpha}\cdot\vec{A} + \phi)\Psi = H_0\Psi + H_{int}\Psi$$

- v Diracově reprezentaci máme pak dvojici rovnic pro $\Psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\chi + q\phi\varphi + m\varphi, \qquad \vec{\Pi} = -i\vec{\nabla} - q\vec{A}$$

$$i\frac{\partial\chi}{\partial t} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\varphi + q\phi\chi - m\chi$$

- v nerelativistické limitě $\tilde{\chi} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}}{2m}\tilde{\varphi}$, kde $\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = e^{-imt}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix}$

$$\to i\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}\vec{\Pi}^2 - \frac{q}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\tilde{\varphi} = (H_0 + H_{EM})\tilde{\varphi}$$

$$\to H_{EM} = -\frac{q\hbar}{2mc}\frac{\vec{L}}{\hbar}\cdot\vec{B} - \frac{q\hbar}{2mc}\frac{\vec{\sigma}}{\hbar}\cdot B = -\frac{\mu_0}{\hbar}\left(\vec{L}\cdot\vec{B} + \overset{g\text{-faktor}}{2}(\vec{\sigma}/2)\cdot\vec{B}\right)$$

<u>Částice se spinem 1/2 v centrálním poli</u>

- řešíme rovnici na vlastní čísla hamiltoniánu

$$H_D\Psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{P} + \beta m + V(r))\Psi = E\Psi$$

v Diracově reprezentaci $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

- kompatibilní pozorovatelné: hamiltonián H_D

z-tová složka celkového momentu hybnosti $J_z = \begin{pmatrix}L_z + \frac{1}{2}\sigma_3 & 0\\ 0 & L_z + \frac{1}{2}\sigma_3\end{pmatrix}$

kvadrát celkového momentu hybnosti J^2

„projekce" spinu do směru orbitálního momentu hybnosti $K = \begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{L} + 1 & 0\\ 0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{L} - 1\end{pmatrix}$

$\to$ vlastní funkce budou charakterizované vlastními čísly E, j, m, k

$H_D|E,j,m,k\rangle = E|E,j,m,k\rangle$, $J_3|E,j,m,k\rangle = m|E,j,m,k\rangle$, $J^2|E,j,m,k\rangle = j(j+1)|E,j,m,k\rangle$, $K|E,j,m,k\rangle = -k|E,j,m,k\rangle$

- vlastní číslo k rozhoduje o orientaci spinu vůči $\vec{J}$ $k = \pm(j + 1/2)$

- obdobně jako v nerelativistickém případě separujeme radiální a úhlovou závislost

$$\Psi = \begin{pmatrix} g(r)\,\mathcal{Y}^m_{j,l_+}\\ i f(r)\,\mathcal{Y}^m_{j,l_-}\end{pmatrix}$$

	l_+	l_-
$k = j + \frac{1}{2}$	$j + 1/2$	$j - 1/2$
$k = -(j + \frac{1}{2})$	$j - 1/2$	$j + 1/2$

$\mathcal{Y}^m_{j,l}$ ... spin-orbitální kulová funkce

- z Clebsch–Gordanova rozkladu máme

$$\mathcal{Y}^m_{j,l} = \sqrt{\frac{l+m+1/2}{2l+1}}\,Y_l^{m-1/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}}\,Y_l^{m+1/2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad j = l + 1/2$$

$$-\sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}}\,Y_l^{m-1/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l+m+1/2}{2l+1}}\,Y_l^{m+1/2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad j = l - 1/2$$

- radiální závislost je dána soustavou rovnic

$$-\frac{df}{dr} - \frac{1-k}{r} f = (E-V-m)\,g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dF}{dr} + \frac{k}{r} F = -(E-V-m)\,G \qquad F = r f(r)$$

$$-\frac{dg}{dr} + \frac{1+k}{r} g = (E-V+m)\,f \qquad \qquad \frac{dG}{dr} + \frac{k}{r} G = (E-V+m)\,F \qquad G = r g(r)$$

- tyto rovnice se řeší obdobně jako v nerelativistickém případě odhadem asymptotického chování a hledáním zbytku řešení ve tvaru řady, která je pak z normalizačních důvodů oseknuta na polynom

- energie pak je číslovaná $n \in \mathbb{N}$, a $j = 1/2, 3/2, \dots$

$$E_{n,j} = \frac{m}{\sqrt{1+\left(\frac{Z\alpha}{n-j-1/2+\sqrt{(j+1/2)^2 - Z^2\alpha^2}}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+\left(\frac{Z\alpha}{n-|k|+\sqrt{k^2-Z^2\alpha^2}}\right)^2}}$$

$$E_{n,j} = m\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{(Z\alpha)^4}{n^3}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} - \dots\right)\right)$$

4. Kanonické kvantování skalárního pole, algebra pozorovatelných a částicová interpretace, kanonické kvantování Diracova pole, nerelativistická limita, Fockův prostor a reprezentace obsazovacích čísel.

Kvantování klasické mechaniky

- popis systému se formuluje na fázovém prostoru
- veličiny a pozorovatelné se nahradí operátory a Poissonova závorka se nahradí komutátorem

Schrödingerův obraz

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

Heisenbergův obraz

$$\frac{dp(t)}{dt} = i\left[H,p(t)\right]$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = i\left[H,q(t)\right]$$

Př| LHO lze v Heisenbergově obraze řešit pomocí kreačních a anihilačních operátorů

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a^\dagger e^{i\omega t} + a\, e^{-i\omega t}\right)$$

Kvantování polí

- vychází se z Hamiltonova formalismu pro teorii pole a Poissonova závorka

$$\{A(\pi,\phi),B(\pi,\phi)\} = \sum_a \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta\phi_a}\frac{\delta B}{\delta\pi_a} - \frac{\delta A}{\delta\pi_a}\frac{\delta B}{\delta\phi_a}\right), \quad \pi = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot\phi}\ (= \dot\phi \text{ pro Klein-Gordona})$$

se nahradí komutátorem operátorů

$$\boxed{\text{Funkcionální derivace} \quad \frac{\delta F}{\delta\phi(x_0)} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\Big(F[\phi(x)+\varepsilon\,\delta(x-x_0)] - F[\phi(x)]\Big)}$$

- získáváme komutační relace ve společném čase

$$\left[\phi_a(\vec x,t),\pi_b(\vec x',t)\right] = i\,\delta_{ab}\,\delta(\vec x-\vec x')$$

$$\left[\phi_a(\vec x,t),\phi_b(\vec x',t)\right] = \left[\pi_a(\vec x,t),\pi_b(\vec x',t)\right] = 0$$

- pohybové rovnice pro polní operátory v Heisenbergově obraze

$$\frac{d}{dt}\phi_a = i\left[H,\phi_a\right] \quad (= \pi_a \text{ Klein-Gordon})$$

$$\frac{d}{dt}\pi_a = i\left[H,\pi_a\right] \quad (= \Delta\phi_a - m^2\phi \text{ K-G})$$

- operátor hybnosti pole je dán jako projekce tenzoru energie-hybnosti $T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\,\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}(\phi(x),\partial\phi(x))$

$$P^\mu = \int dV\, n_\nu T^{\nu\mu}$$

- volné skalární pole lze rozvinout do módů $\phi(x) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_p}\left(a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx}\right)$

kde $a(p), a^\dagger(p)$ lze interpretovat jako kreační a anihilační operátory

$$\left[a(p),a^\dagger(p')\right] = \delta_{\vec p,\vec p'} = (2\pi)^3\, 2\omega_p\,\delta(\vec p-\vec p')$$

$$\left[a(p),a(p')\right] = \left[a^\dagger(p),a^\dagger(p')\right] = 0$$

- $a^\dagger(p)$ vytvoří z vakua částici se 4-hybností $p = (\omega_p,\vec p)$
- $a(p)$ anihiluje částici se 4-hybností $p = (\omega_p,\vec p)$

- operátor počtu částic $N = \sum_{\vec p} a^\dagger(p)a(p) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_p}a^\dagger(p)\,a(p)$

- Jakýkoli stav Fockova prostoru můžeme rozložit do báze zobecněných vlastních vektorů hybnosti

$$|\psi\rangle = \langle0|\psi\rangle\,|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3\, 2\omega_{p_i}}\right) f_\psi^{(n)}(p_1,\dots,p_n)\,|p_1\dots p_n\rangle$$

kde $f_\psi^{(n)}$ jsou matematicky Fourierovy koeficienty a fyzikálně jsou to n-částicové vlnové funkce v hybnostní reprezentaci

$$\langle0|\phi|\psi\rangle = \langle0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}e^{-ikx}a(k)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_p}f_\psi^{(1)}(p)\,|p\rangle = \psi^{(1)}(x) \longrightarrow (\Box+m^2)\,\psi^{(1)}(x) = 0 \text{ neboť } \langle0|(\Box+m^2)\phi|\psi\rangle = 0$$

Kvantování Diracova pole

- lagrangián $L = \int d^3x \; \overline{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x)$
- kanonicky přidružené pole $\pi_\alpha(x) \equiv \chi_\alpha(x) = \dfrac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_\alpha(x)} = i\psi^\dagger_\alpha(x)$, $\overline{\pi}_\alpha \equiv \overline{\chi}_\alpha = 0$
- Hamiltonián $H = \int d^3x \; \overline{\psi}\left(i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m\right)\psi$
- pohybová rovnice v Heisenbergově obrazu $\dot{\psi} = i[H, \psi]$ dává správnou Diracovu rovnici $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$ pokud postulujeme kanonické antikomutační relace

  $\left\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \chi_\beta(\vec{x}',t)\right\} = i\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \iff \left\{\psi^\dagger_\beta(\vec{x},t), \psi_\alpha(\vec{x}',t)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

  $\{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0$

- rozvoj ψ do módů $\psi(x) = \sum_{\vec{p}} \sum_{\lambda=1}^{2} \left[a(p,\lambda)\,u(p,\lambda)\,e^{-ipx} + b^\dagger(p,\lambda)\,v(p,\lambda)\,e^{ipx}\right]$, kde λ číslujе helicitu
- $a_\lambda(p), a^\dagger_\lambda(p), b_\lambda(p), b^\dagger_\lambda(p)$ jsou kreační a anihilační operátory pro dva druhy částic splňující

  $\left\{a_\lambda(p), a^\dagger_{\lambda'}(p')\right\} = \left\{b_\lambda(p), b^\dagger_{\lambda'}(p')\right\} = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{\vec{p},\vec{p}'}$

  $\{a, b\} = \{a, a\} = \{b, b\} = 0$

- analog toku pravděpodobnosti $J_\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ odpovídá v teorii pole operátoru 4-proudu
- Náboj $Q = \int d^3x \; J^0(\vec{x},t) = \sum_{\vec{p},\lambda}\left[a^\dagger_\lambda(p)a_\lambda(p) - b^\dagger_\lambda(p)\,b_\lambda(p)\right]$ (v normálním uspořádání) rozlišuje mezi částicemi typu a a typu b a je zachovávající se veličinou $[H, Q] = 0$
- Tensor energie - hybnosti $T^{\mu\nu} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi$

5. Symetrie a zákony zachování, teorém E. Noetherové a Wardovy identity, diskrétní P, T a C symetrie, explicitní tvary P, T a C operátorů pro Diracovskou částici, antičástice.

- Teorém Noetherové: Symetrie lagrangiánu implikují existenci zachovávajících se veličin

- pokud T^a jsou generátory globální symetrie lagrangiánu, pak variace
$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + i\varepsilon_a(x) T^a \phi(x)$$
indukuje variaci akce $\delta S = \int d^4x \, [-J^a_\mu(x)] \, \partial_\mu \varepsilon_a(x)$, kde $\partial^\mu J^a_\mu = 0$ na řešení pohybových rovnic

- $U(1)$ symetrie v bosonové $\phi'(x) = \phi(x) + i\alpha(x)\phi(x)$, respektive fermionové $\psi'(x) = \psi(x) + i\alpha(x)\psi(x)$ teorii indukuje zachovávající se proud $J_\mu = i(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger)\phi)$, resp. $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$

- zachovávající se náboj se definuje $Q^a = \int d^3x \, J^a_0(x)$ a reprodukuje strukturní konstanty algebry grupy symetrií $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \Rightarrow [Q^a, Q^b] = i f^{abc} Q^c$

- pro diracovské pole operátor Q rozlišuje mezi elektrony a pozitrony
$$Q\psi = \psi(Q-1)$$
$$Q\bar{\psi} = \bar{\psi}(Q+1)$$

- prostoročasové symetrie — translační invariance indukuje zachování kanonického tenzoru energie a hybnosti $T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}$

Diskrétní symetrie

- Parita: $x^\mu = (t, \vec{x}) \xrightarrow{P} x^\mu_P = (t, -\vec{x})$
  - element Lorentzovy grupy s $\det P = -1$ nevlastní ortochronní
  - bispinorová reprezentace $S(P) = \pm i \gamma^0$

- Časová inverze: $x^\mu(t, \vec{x}) \xrightarrow{T} x^\mu_T = (-t, \vec{x})$
  - element Lorentzovy grupy s $\det T = -1$ nevlastní neortochronní
  - bispinorová reprezentace $\psi_T = \pm i \gamma^1 \gamma^3 \psi^*$

- Konjugace náboje: $q \xrightarrow{C} -q$
  - náboj se v teorii nahradí za opačný
  - bispinorová reprezentace $\psi_C = i\gamma^0\gamma^2(\bar{\psi})^T = -i(\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T$

- Feynman-Stueckelbergova interpretace antičástic
  - na antičástice můžeme nahlížet jako na částice s opačnou energií, nábojem a spinem pohybující se zpět v čase

Wardovy identity

- na základě transformačních vlastností míry funkcionálního integrálu lze odvodit
$$\left\langle \delta J + i\frac{\delta S}{\delta \phi} + i\int d^4x \, J(x)\xi(x) \right\rangle^J = 0 \qquad \phi'(x) = \phi(x) + \xi(x, \phi), \quad \delta J = \mathrm{Tr}\left(\frac{\delta \xi^a(x, \varphi)}{\delta \varphi_b(y)}\right)$$
- pro $\xi(x, \varphi) = \xi(x)$ $\delta J = 0$ a dostáváme generující funkcionál pro Schwinger-Dysonovy rovnice
- pro ξ infinitesimální symetrii je $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ a dostáváme generující funkcionál pro Wardovy identity

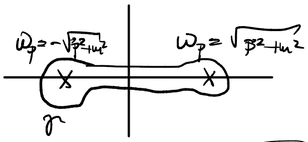
6. Normální uspořádání, Feynmanův propagátor pro skalární a Diracovo pole, interagující pole, Wickův teorém a poruchová teorie, rozptylové procesy, S a T matice a Feynmanova pravidla, optický teorém a unitárnost, účinný průřez a rozpad nestabilní částice, renormalizace pro teorii φ4.

Pauli-Jordanova funkce

$$i\Delta(x,y) = [\phi(x),\phi(y)] = [\varphi(x-y),\varphi(0)] = i\Delta(x-y)$$

- vyhovuje počáteční úloze $(\Box+m^2)\Delta(x)=0 \quad \dot{\Delta}(x)\big|_{t=0} = -\delta(\vec{x})$

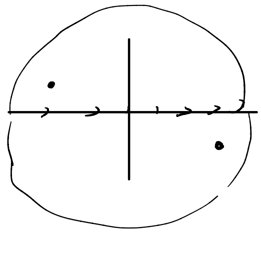
$$\Rightarrow \quad i\Delta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}\left(e^{-ipx}-e^{ipx}\right) = -i\int_\gamma \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ipx}}{p^2-m^2}$$



Feynmanův propagátor

$$i\Delta_F(x-y) = \langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}\left(\theta(x_0)e^{-ipx}+\theta(-x_0)e^{ipx}\right)$$

$$= i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ipx}}{p^2-m^2+i\varepsilon} \quad (\varepsilon\to 0)$$



- Feynmanův propagátor je Greenovou funkcí Klein-Gordonovy rovnice $(\Box+m^2)\Delta_F(x) = -\delta(x)$
- pro Diracovo pole má propagátor indexy navíc

$$iS_F(x)_{\alpha\beta} = \langle 0|T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)]|0\rangle, \text{ kde } T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] = \begin{cases}\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) & x_0>y_0\\ -\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) & x_0<y_0\end{cases}$$

$$= i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ipx}$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}\left(\theta(x_0)(\not{p}+m)_{\alpha\beta}e^{-ipx} - \theta(-x_0)(\not{p}-m)_{\alpha\beta}e^{ipx}\right) = i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ipx}}{\not{p}-m+i\varepsilon}$$

- je Greenovou funkcí pro Diracovu rovnici $(i\not{\partial}-m)S_F(x) = \delta(x)$
- v obou případech propagátor představuje amplitudu pravděpodobnosti nalezení částice v bodě x za předpokladu, že byla v bodě $x=0$
- částice mohou tunelovat skrz světelný kužel s efektivní vzdáleností jejich Comptonové vlnové délky $\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}$

Interagující pole

- interakce se zahrne přičtením interakčního členu do Lagrangiánu

$$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

- obvykle se uvažují polynomiální interakce například

$$\mathcal{L}_I = -\frac{g}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \qquad \mathcal{L}_I = (A^2)^2$$

$$\mathcal{L}_I = \bar{\psi}\psi\phi \quad \text{(Yukawa)}$$

- cílem je poruchově nalézt evoluční operátor v Diracově obrazu na základě Dysonovy řady

$$S(t,t_i) = T\left[\exp\left(-i\int_{t_i}^{t}V^I(t')dt'\right)\right] = 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_i}^{t}dt_1\int_{t_i}^{t}dt_2\cdots\int_{t_i}^{t}dt_n\, T\left[V^I(t_1)V^I(t_2)\cdots V^I(t_n)\right]$$

- výhodou Diracova obrazu je, že jsou v něm pole volná
- přechod mezi Diracovým a Heisenbergovým obrazem je zprostředkován operátorem $S(t,t_0)$, kde t_0 je čas, ve kterém Diracův a Heisenbergův obraz splývají

$$\phi_I(t,\vec{x}) = S(t,t_0)\,\phi_H(t,\vec{x})\,S^{-1}(t,t_0)$$

Rozptylové procesy

- postulujeme cluster decomposition property: v asymptotických časech lze systém popsat volnými poli
- označíme vstupní a výstupní polní konfiguraci

  $t\to-\infty:\ \phi_{in}(\vec x,t)=\phi_I(\vec x,t) = \phi_H(\vec x,t)$ vstupní konfigurace reprezentovaná volným polem ϕ_{in}

  volná teorie pro $t\to-\infty$

  $t\to+\infty:\ \phi_{out}(\vec x,t)=\phi_H(\vec x,t)$ výstupní konfigurace reprezentovaná volným polem ϕ_{out}

- platí $\phi_{in}(\vec x,t) = S(t,-\infty)\,\phi_H(\vec x,t)\,S^{-1}(t,-\infty) \Rightarrow \phi_{in}(\vec x,t\to\infty) = S(+\infty,-\infty)\,\phi_{out}(\vec x,t\to+\infty)\,S^{-1}(+\infty,-\infty)$

→ $S := S(+\infty,-\infty) = T\left[\exp\left(i\int \mathcal{L}_I\, d^4x\right)\right]$ je S-matice a $\mathcal{L}_I$ je lagrangián v interakčním obraze

- amplituda přechodu vstupní konfigurace $|i\rangle_{in}$ na výstupní $|f\rangle_{out}$ je dána elementem S-matice $S_{fi} = {}_{out}\langle f|i\rangle_{in} = {}_{in}\langle f|S|i\rangle_{in}$

Normální uspořádání

- pro volné pole rozepsané do módů $\phi(x)=\sum_p a(p)e^{-ipx}+\sum_p a^\dagger(p)e^{ipx} \equiv \phi^+(x)+\phi^-(x)$ se normální uspořádání součinu $\phi(x)\phi(y)$ definuje jako

$$:\phi(x)\phi(y): = \phi^+(x)\phi^+(y)+\phi^-(x)\phi^+(y)+\phi^-(y)\phi^+(x)+\phi^-(x)\phi^-(y) = \phi(x)\phi(y)-\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$$

Wickův teorém

- časově uspořádaný součin dvou polí $T[\phi(x)\phi(y)] = :\phi(x)\phi(y): + i\Delta_F(x-y)$
- Wickův teorém říká, jak přepsat časově uspořádaný součin pomocí normálního uspořádání a Feynmanových propagátorů
- v kompaktní formě za pomoci generujícího funkcionálu je Wickův teorém

$$T\left[\exp\left(-i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\right)\right] = :\exp\left(-i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\right): \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$

- pro vakuovou střední hodnotu

$$\langle 0|T\left[\exp\left(-i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\right)\right]|0\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$

- pro N-tý řád má pravá strana $\frac{(2N)!}{2^N N!}$ členů

Rozptyl a rozpad nestabilní částice

- účinný průřez σ je definován jako pravděpodobnost srážky $= \frac{N_T}{A}\sigma$, N_T je počet částic v terči a A jeho plocha
- účinný průřez lze vyjádřit pomocí amplitudy rozptylu (optický teorém)

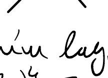
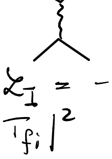
  $\sigma = \frac{1}{\rho_B\rho_T v}\sum_f (2\pi)^4\delta(p_f-p_i)|T_{fi}|^2$

  kde $\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4\delta(p_i-q_i)\,T_{fi} = (2\pi)^4(\sqrt{Z})^{m+n}\delta(p_i-q_i)\,\tau^{amp}(p_1,\dots,p_n,-q_1,\dots,q_m)$ matice přechodu $iT = S-1$

- uvažujme srážku 2 částic $\sigma_{n\leftarrow 2} = \frac{1}{4m_1|\vec p_2|}\frac{1}{n!}\int_\Delta \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2\omega_{p_3}}\cdots\frac{d^3p_{n+2}}{(2\pi)^3 2\omega_{p_{n+2}}}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_3-\dots-p_{n+2})\,|T_{fi}|^2$

  kde Δ je množina pozorovatelných hybností

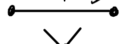
- Mandelstamovy proměnné $s=(p_1+p_2)^2=(p_3+p_4)^2$ $t=(p_1-p_3)^2=(p_2-p_4)^2$ $u=(p_1-p_4)^2=(p_2-p_3)^2$

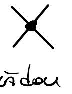
  s-kanál  t-kanál  u-kanál

- rozpady můžeme popisovat interakčním lagrangiánem $\mathcal{L}_I = -\frac{g}{2}\Phi(x)\varphi^2(x)$

  frekvence rozpadu na částice $\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{M}\sum_{p_1 p_2}\delta(p_1+p_2-P_i)\,|T_{fi}|^2$

- Feynmanova pravidla

 $k_i \to$ $\frac{i}{k_i^2-m^2+i\epsilon}$

 $-i\lambda$

Za každou externí hranu $\sqrt{Z_\phi}$

hybnost se zachovává v každém vrcholu

integruje se přes nezafixované smyčkové hybnosti

vydělí se symmetry faktorem

pro fermiony se musí k externím hranám přidat spinové polarizace

Renormalizace ϕ^4 teorie

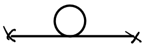
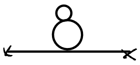
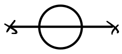
- pro teorii ϕ^4 máme zdánlivý řád divergence roven $D = 4 - E$, kde E jsou vnější hrany

$\longrightarrow$ ze symetrie $\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(3)} = 0$

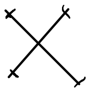
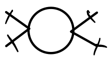
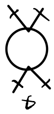
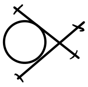
$\longrightarrow$ divergentní vrcholové funkce jsou $\Gamma^{(2)}$ a $\Gamma^{(4)}$

$$\Gamma^{(2)} = \left[\Delta^{(\text{full})}\right]^{-1} = p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2) \overset{!}{=} p^2 - m^2$$

renormalizační podmínka

$-i\Sigma(p^2) =$  $+$  $+$  $+ \mathcal{O}(\lambda^3)$

$$= p^2 - m_0^2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{16\pi^2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1-\gamma}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right)\right)$$

$\Gamma^{(4)} =$  $+$  $+$  $+$  $= -i\lambda_0\mu^{2\varepsilon} + \frac{3i\lambda_0^2\mu^{2\varepsilon}}{32\pi^2\varepsilon} - \frac{i\lambda_0^2\mu^{2\varepsilon}}{32\pi^2}\left[3\gamma + F(s, m_0, \mu) + F(t, m_0, \mu) + F(u, m_0, \mu)\right]$

$$\lambda = \lambda_0\mu^{2\varepsilon} - \frac{3\lambda_0^2\mu^{2\varepsilon}}{32\pi^2}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - F(0, m, \mu)\right]^{\mu} \qquad \left(i\Gamma^{(4)}(p=0) = \lambda_r\right)$$

7. První kvantování pomocí dráhového integrálu, druhé kvantování a funkcionální integrál, partiční suma a Wickův teorém, Wardovy identity a anomálie, funkcionální integrál a nerelativistická limita, poruchový počet Greenových funkcí prostřednictvím Feynmanových diagramů pro skalární pole, dimenzionální regularizace, generující funkcionály W a Γ, souvislé a 1PI diagramy, práce s Feynmanovými diagramy a jejich výpočet.

- v prvním kvantování lze zavést také propagátor a počítat amplitudu přechodu
$$\langle \vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}\vec{x}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\vec{x}(t)]\right), \text{ kde } \vec{x}(t_i) = \vec{x}_i \text{ a } \vec{x}(t_f) = \vec{x}_f \quad \mathcal{D}\vec{x}(t) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} d^3x_k \left(\frac{m(N+1)}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}\right)^{\frac{3(N+1)}{2}}$$
- v kvantové teorii pole nás zajímají místo amplitud n-bodové korelační funkce (Greenovy funkce)
$$\langle x_1 \dots x_n \rangle := \langle \Omega | T[\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n)] | \Omega \rangle$$
- Gell-Mannův a Lowův vzorec
$$\langle \Omega | T[\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n)] | \Omega \rangle = \lim_{t\to+\infty(1-i\varepsilon)} \frac{{}_{in}\langle 0 | T[\phi_{in}(x_1) \dots \phi_{in}(x_2) \exp(i\int_{-t}^{t} \mathcal{L}_I(t) d^4x)] | 0 \rangle_{in}}{{}_{in}\langle 0 | T[\exp(i\int_{-t}^{t} \mathcal{L}_I(t) d^4x)] | 0 \rangle_{in}}$$

- časově uspořádaný součin dvou polí $T[\phi(x)\phi(y)] = :\phi(x)\phi(y): + i\Delta_F(x-y)$
- Wickův teorém říká, jak přepsat časově uspořádaný součin pomocí normálního uspořádání a Feynmanových propagátorů
- v kompaktní formě za pomoci generujícího funkcionálu je Wickův teorém
$$T\left[\exp\left(-i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\right)\right] = :\exp\left(-i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\right): \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$
- pro vakuovou střední hodnotu
$$\langle 0 | T\left[\exp\left(-i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\right)\right] | 0 \rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$
- pro N-tý řád má pravá strana $\frac{(2N)!}{2^N N!}$ členů
- generující funkcionál (partiční suma) pro n-bodové Greenovy funkce
$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \prod_{i=1}^{n} d^4x_i\, J(x_1)J(x_2)\dots J(x_n) \langle x_1 x_2 \dots x_n \rangle = \langle \Omega | T\left[\exp\left(i\int d^4x\, J(x)\phi_H(x)\right)\right] | \Omega \rangle$$
$$= \lim_{t\to\infty(1-i\varepsilon)} \frac{{}_{in}\langle 0 | T\left[\exp\left(i\int_{-t}^{t}(\mathcal{L}_I(\phi_{in}) + J(x)\phi_{in}(x))d^4x\right)\right] | 0 \rangle_{in}}{{}_{in}\langle 0 | T\left[\exp\left(i\int_{-t}^{t}\mathcal{L}_I(\phi_{in})\right)\right] | 0 \rangle_{in}} \qquad \text{(Gell-Man a Low)}$$
- $J(x)$ se nazývá Schwingerův zdroj
- generující funkcionál lze pomocí Wickova teorému přepsat
$$Z[J] = \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] {}_{in}\langle 0 | T\left[\exp\left(i\int d^4x\, J(x)\phi_{in}(x)\right)\right] | 0 \rangle_{in}$$
$$= \exp\left(i\int d^4x\, \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4y_1\, d^4y_2\, J(y_1)\Delta_F(y_1-y_2)J(y_2)\right)$$
$$= \Big/ \; \mathcal{N}|\det \Delta_F|^{1/2} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\, \phi(x)(\Box + m^2)\phi(x)\right) = \int \mathcal{D}\phi\, e^{iS_0[\phi]} \Big/ =$$
$$= \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\phi] + i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\right)}{\int \mathcal{D}\phi \exp(iS_0[\phi])}, \quad \text{kde } \mathcal{D}\phi = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} d\phi(x_i)$$

- n-bodová Greenova funkce
$$\langle x_1 x_2 \dots x_n \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{(-i)^n \delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\dots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} = \frac{\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)\, e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi\, e^{iS[\phi]}}$$

- na základě transformačních vlastností míry funkcionálního integrálu lze odvodit
$$\left\langle \delta J + i\frac{\delta S}{\delta \phi} + i\int d^4x\, J(x)\xi(x)\right\rangle^J = 0 \qquad \phi'(x) = \phi(x) + \xi(x,\phi),\ \delta J = \mathrm{Tr}\left(\frac{\delta \xi^a(x,\varphi)}{\delta \varphi_b(y)}\right)$$
- pro $\xi(x,\varphi) = \xi(x)$ $\delta J = 0$ a dostáváme generující funkcionál pro Schwinger-Dysonovy rovnice
- pro ξ infinitesimální symetrii je $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ a dostáváme generující funkcionál pro Wardovy identity

Poruchový rozvoj Greenových funkcí

- rozvoj v interakční konstantě odpovídá rozvoji generujícího funkcionálu (pro ϕ^4 teorii)
$$Z[J] = \left(1 - i\frac{\lambda}{4!}\int\left(-i\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 d^4z + \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right)^2\int\left(-i\frac{\delta}{\delta J(z_1)}\right)^4\left(-i\frac{\delta}{\delta J(z_2)}\right)^4 dz_1 dz_2 + \dots\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$
- členy rozvoje n-bodové Greenovy funkce lze organizovat do tzv. Feynmanových diagramů
  - základní stavební bloky jsou externí propagátory •— a interakční vrcholy ✕
  - z nich se sestaví všechny topologicky odlišné diagramy pro řád m se využije m vrcholů
  - spojnice bodů x a y odpovídá propagátoru $i\Delta_F(x-y)$
  - vrchol odpovídá faktoru $-i\lambda$
  - integruje se přes všechny vnitřní vrcholy
  - započítají se faktory symetrie pro každý diagram $S = \frac{n!(4!)^n}{r}$, r … kombinační faktor
- rozvoj v Planckově konstantě odpovídá rozvoji v počtu smyček ve Feynmanových diagramech
  - pro $\lambda\phi^4$ se shoduje s rozvojem v λ a pro $g\phi^3$ odpovídá rozvoji v g^2
- pro Fourierovu transformaci Greenovy funkce platí Feynmanova pravidla
  - nakreslit všechny topologicky odlišné diagramy se vstupními a výstupními hybnostmi $p_1, \dots, p_n$
  - vnějším hranám odpovídají faktory $\frac{i}{p_j^2 - m + i\varepsilon}$
  - vnitřním hranám $\frac{i}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}$
  - vrcholům $-i\lambda$
  - v každém vrcholu platí zákon zachování hybnosti
  - integruje se přes smyčkové hybnosti
  - faktory symetrie

Dimenzionální regularizace

- pro výpočty Feynmanových diagramů jsou třeba integrály typu
$$\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^N} = i(-1)^N\int\frac{d^dp_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{[p_E^2 + m^2]^N} \qquad (\text{Wickova rotace } p^0 = ip_E^0)$$
- v obecné dimenzi d splňující $\mathrm{Re}(m - d/2) > 0$ máme
$$\int\frac{d^dp_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p_E^2+m^2)^N} = \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d}\frac{\Gamma(N - d/2)}{\Gamma(N)}\frac{1}{(m^2)^{N-d/2}} \longrightarrow \text{tento výraz můžeme rozšířit na neceločíselné } d$$
- pro regularizaci budeme potřebovat rozvoj Γ-funkce v okolí $-n$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \psi(n+1) + \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\pi^2}{3} + \psi^2(n+1) - \psi'(n+1)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right), \text{ kde } \psi(s) = \frac{d\ln\Gamma(s)}{ds}$$
- dosazením $d=4$ zjistíme kolem kterého pólu budeme provádět rozvoj

$$\psi(n+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \gamma$$
$$\psi'(n+1) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

- Feynmanův trik
$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1}\cdots a_m^{\alpha_m}} = \frac{\Gamma(\sum\alpha_i)}{\prod\Gamma(\alpha_i)}\int_0^1 d\beta_1\cdots d\beta_m\,\delta\left(\sum\beta_i - 1\right)\frac{\prod_{i=1}^m \beta_i^{\alpha_i - 1}}{\left(\sum_{i=1}^m a_i\beta_i\right)^{\sum_i\alpha_i}}$$

- Linked cluster theorem – ve výrazu $\frac{Z[J]}{Z[0]}$ se vyruší vakuové diagramy
- Generující funkcionál pro souvislé Greenovy funkce je $\frac{Z[J]}{Z[0]} = \exp(iW[J])$
- efektivní akce v kvantové teorii pole je Legendreova transformace generujícího funkcionálu pro souvislé Greenovy funkce

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x \, J(x)\phi_c(x) \,, \text{ kde } \phi_c(x) = \langle\Omega|\phi_H(x)|\Omega\rangle^J = N\int \mathcal{D}\phi \, \phi(x) \exp\left(i S[\phi] + i\int J(y)\phi(y) d^4y\right)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_c(x)} = -J(x) \qquad \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \phi_c(x)$$

- efektivní akce = klasická akce + kvantové korekce
- efektivní akce je generátorem n-bodových vrcholových funkcí
  - ty jsou sestavené z n-bodových 1PI diagramů tj. diagramů, které se přerušením jednoho propagátoru nerozpadnou na dva

8. Grassmannovy proměnné a Berezinův funkcionální integrál pro fermionovská pole, poruchový počet Greenových funkcí prostřednictvím Feynmanových diagramů pro fermionovská pole, Feynmanovy diagramy a jejich výpočet.

Grassmannovy proměnné

- tvoří algebru generovanou generátory θ_j splňujícími relace $\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0$
- obecný element je polynom v θ_j

Berezinův počet

- integrace přes Grassmannovskou proměnnou funguje formálně jako derivace podle dané proměnné

$$\int d\theta_i = 0, \quad \int d\theta_i\, \theta_j = \delta_{ij}$$

- θ hraje vůči této integraci roli Diracovy δ-funkce

- Gaussovské integrály

$$\int d\theta \exp\left(-\tfrac{1}{2}\theta_i A_{ij}\theta_j + \eta_i\theta_i\right) = \sqrt{\det A}\; e^{\frac{1}{2}\eta_i A^{-1}_{ik}\eta_k}$$

$$\int d\theta\, d\theta^* \exp\left(\theta_i^* A_{ij}\theta_j + \theta_i^*\eta_i + \eta_i^*\theta_j\right) = \det A\; e^{-\eta_i^* A^{-1}_{ij}\eta_j}$$

- partiční suma pro volné fermionovské pole $Z_0[\eta,\bar\eta] = N\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi \exp\left(i\int d^4x\left(\mathcal{L}_0(\psi,\bar\psi) + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta\right)\right)$

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi = \lim_{N\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{4} d\psi_\alpha(x_i)\, d\bar\psi_\beta(x_i)\right)$$

$$Z_0[\eta,\bar\eta] = Z[0,0]\exp\left(-i\int d^4x\, d^4y\; \bar\eta(x) S_F(x,y)\eta(y)\right)$$

- fermionovský propagátor splňuje $S_F(x,y)_{\alpha\beta} = -S_F(y,x)_{\beta\alpha}$
- Wickův teorém pro fermiony

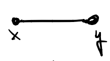
$$T\left[\exp\left(i\int d^4x\left[\bar\eta(x)\psi(x) + \bar\psi(x)\eta(x)\right]\right)\right] = :\exp\left(i\int d^4x\left[\bar\eta(x)\psi(x) + \bar\psi(x)\eta(x)\right]\right):\exp\left(-\int d^4x\, d^4y\; \bar\eta(x) S_F(x,y)\eta(y)\right)$$

- normální uspořádání pro fermiony

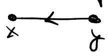
$$:\left(\psi^\dagger_{(+)}(x) + \psi^\dagger_{(-)}(x)\right)\left(\psi_{(+)}(y) + \psi_{(-)}(y)\right): = :\left(\psi^\dagger_{(+)}(x)\psi_{(+)}(y) + \psi^\dagger_{(-)}(x)\psi_{(+)}(y) + \psi^\dagger_{(+)}(x)\psi_{(-)}(y) + \psi^\dagger_{(-)}(x)\psi_{(-)}(y)\right):$$

$$= \psi^\dagger_{(+)}(x)\psi_{(+)}(y) + \psi^\dagger_{(-)}(x)\psi_{(+)}(y) - \psi_{(-)}(y)\psi^\dagger_{(+)}(x) + \psi^\dagger_{(-)}(x)\psi_{(-)}(y)$$

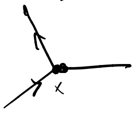
- Gell-Mann-Low formule dopadne stejně jako pro bosonová pole
- Yukawova interakce $\mathcal{L}_I = -g\bar\psi\phi\psi$ nebo $\mathcal{L}_I = -ig\bar\psi\gamma^5\phi\psi$
- Feynmanova pravidla

bosonový propagátor 

$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{ie^{ip(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon}$

fermionový propagátor 

$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{ie^{ip(x-y)}}{\not p-m+i\epsilon}$

interakční vrchol 

$-ig\int d^4x$ nebo $g\gamma^5\int d^4x$

každá fermionovská smyčka má znaménko mínus oproti bosonovské

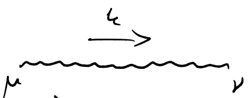
9. Kvantová elektrodynamika, základní rozptylové procesy v QED, výpočet S-matice pro Comptonův rozptyl, elektron-pozitronovou anihilaci, Møllerův rozptyl a Bhabhův rozptyl, S-matice a LSZ formalismus, Lehmanova reprezentace pro Greenovy funkce.

Kvantová elektrodynamika

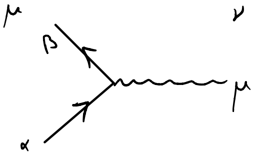
• lagrangián $\mathcal{L} = \bar\psi(i\not{D}-m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$

• Feynmanovy diagramatické pravidla v hybnostním prostoru

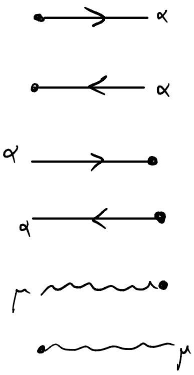
$$\left(\frac{i}{\not p - m + i\epsilon}\right)_{\beta\alpha}$$



$$\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left(\eta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \overset{\xi=1}{=} -\frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$$



$$-ie\,\gamma^\mu_{\beta\alpha}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+p_3)$$



$\bar u_\alpha(p,s)$

$v_\alpha(p,s)$

$u_\alpha(p,s)$

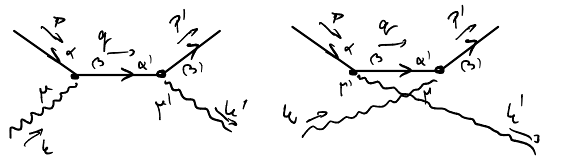
$\bar v_\alpha(p,s)$

$\varepsilon_\mu(p,\lambda)$

$\varepsilon^*_\mu(p,\lambda)$

Comptonův rozptyl

• rozptyl $\vec p, s + \vec k, \varepsilon \longrightarrow \vec p', s' + \vec k', \varepsilon'$



$$S(\vec p, s + \vec k, \lambda \to \vec p', s' + \vec k', \lambda') =$$

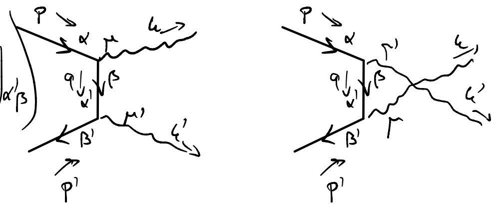
$$= u_\alpha(p,s)\,\varepsilon_\mu(k,\lambda)\,\bar u_{\beta'}(p',s')\,\varepsilon^*_{\mu'}(k',\lambda')\,(-ie)^2\left(\gamma^\mu_{\beta\alpha}\gamma^{\mu'}_{\beta'\alpha'}\left(\frac{i}{\not p+\not k - m + i\epsilon}\right)_{\alpha'\beta} + \gamma^{\mu'}_{\beta\alpha}\gamma^{\mu}_{\beta'\alpha'}\left(\frac{i}{\not p-\not k' - m + i\epsilon}\right)_{\alpha'\beta}\right)$$

$$= -ie^2\,\bar u(p',s')\left(\not\varepsilon^*\frac{1}{\not p+\not k - m}\not\varepsilon + \not\varepsilon\frac{1}{\not p - \not k' - m}\not\varepsilon^*\right)u(p,s)$$

Elektron-pozitronová anihilace

$$S = u_\alpha(p)\,\bar v_{\beta'}(p')\,\varepsilon^*_\mu(k)\,\varepsilon^*_{\mu'}(k')\,(-ie)^2\left(\gamma^\mu_{\beta\alpha}\gamma^{\mu'}_{\beta'\alpha'}\left(\frac{i}{\not p-\not k - m}\right)_{\alpha'\beta} + \gamma^{\mu'}_{\beta\alpha}\gamma^{\mu}_{\beta'\alpha'}\left(\frac{i}{\not p-\not k' - m}\right)_{\alpha'\beta}\right)$$

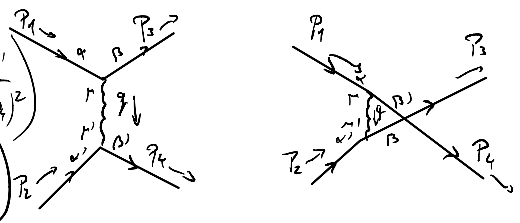
$$= -ie^2\,\bar v(p')\left(\not\varepsilon^*(k')\frac{1}{\not p-\not k - m}\not\varepsilon^*(k) + \not\varepsilon^*(k)\frac{1}{\not p - \not k' - m}\not\varepsilon^*(k')\right)u(p)$$



Møllerův rozptyl

$$S = u_\alpha(p_1)\,u_{\alpha'}(p_2)\,\bar u_\beta(p_3)\,\bar u_{\beta'}(p_4)\,(-ie)^2\left(\gamma^\mu_{\beta\alpha}\gamma^{\mu'}_{\beta'\alpha'}\left(-i\frac{\eta_{\mu\mu'}}{(p_1-p_3)^2}\right) + \gamma^\mu_{\beta'\alpha}\gamma^{\mu'}_{\beta\alpha'}(-i)\frac{\eta_{\mu\mu'}}{(p_1-p_4)^2}\right)$$

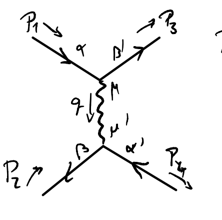
$$= ie^2\left(\frac{\bar u(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\,\bar u(p_4)\gamma_\mu u(p_2)}{(p_1-p_3)^2} + \frac{\bar u(p_3)\gamma^\mu u(p_2)\,\bar u(p_4)\gamma_\mu u(p_1)}{(p_1-p_4)^2}\right)$$

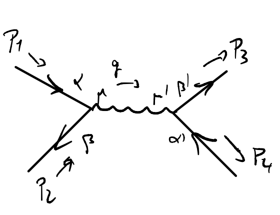


Bhabhův rozptyl

$$S = u_\alpha(p_1)\,\bar v_\beta(p_2)\,\bar u_{\beta'}(p_3)\,v_{\alpha'}(p_4)\,(-ie)^2\left(\gamma^\mu_{\beta'\alpha}\gamma^{\mu'}_{\beta\alpha'}(-i)\frac{\eta_{\mu\mu'}}{(p_1-p_3)^2} + \gamma^\mu_{\beta\alpha}\gamma^{\mu'}_{\beta'\alpha'}\frac{\eta_{\mu\mu'}}{(p_1+p_2)^2}\right)$$

$$= ie^2\left(\frac{\bar u(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\,\bar v(p_2)\gamma_\mu v(p_4)}{(p_1-p_3)^2} + \frac{\bar u(p_3)\gamma^\mu v(p_4)\,\bar v(p_2)\gamma_\mu u(p_1)}{(p_1+p_2)^2}\right)$$





$\longrightarrow$ $S := S(+\infty,-\infty) = T\left[\exp\left(i\int \mathcal{L}_I\, d^4x\right)\right]$ je S-matice a $\mathcal{L}_I$ je lagrangián v interakčním obraze

• amplituda přechodu vstupní konfigurace $|i\rangle_{in}$ na výstupní $|f\rangle_{out}$ je dána elementem S-matice $S_{fi} = {}_{out}\langle f|i\rangle_{in} = {}_{in}\langle f|S|i\rangle_{in}$

LSZ (Lehmann–Symanzik–Zimmerman) redukce pro elementy S-matice

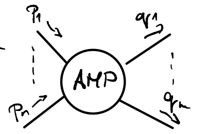
- vztah mezi on-shell amplitudami přechodu $n+m$ částic a $(n+m)$-bodovými Greenovými funkcemi

$$\langle f, out | i, in \rangle = \langle q_1, \dots, q_m, out | p_1, \dots, p_n, in \rangle$$

$$= \left(\frac{i}{\sqrt{Z_\phi}}\right)^{n+m} \int d^4y_1 \dots d^4y_m\, d^4x_1 \dots d^4x_n \, \exp\left(i\sum_{k=1}^{m} q_k y_k - i\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)(\Box_{y_1}+m_p^2)\dots(\Box_{y_m}+m_p^2)(\Box_{x_1}+m_p^2)\dots(\Box_{x_n}+m_p^2)\underbrace{\langle\Omega|\phi_H(y_1)\dots\phi_H(x_n)|\Omega\rangle}_{\langle y_1 \dots y_m x_1 \dots x_n\rangle}$$

$+$ nesouvislé členy

$$= \lim_{p_l^2, q_k^2 \to m_p^2} \prod_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{i\sqrt{Z_\phi}}(q_k^2 - m_p^2)\right]\prod_{l=1}^{n}\left[\frac{1}{i\sqrt{Z_\phi}}(p_l^2 - m_p^2)\right] \tilde{\tau}(p_1, p_2, \dots, p_n, -q_1, \dots, -q_m) + \text{nesouvislé členy}$$

$$= \left(\sqrt{Z_\phi}\right)^{n+m}$$  $+$ nesouvislé členy

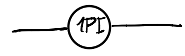
- $\langle q_1, \dots, q_m, out | p_1, \dots, p_n, in \rangle = \langle q_1, \dots, q_m, out | a_{in}^\dagger(p_1) | p_2, \dots, p_n, in \rangle$
- $a_{in}^\dagger(p) = -i\int d^3x\, e^{-ipx} \overleftrightarrow{\partial_0} \phi(x,t) = \int d^3x\, e^{-ipx}\left[\omega_{\vec{p}}\phi(x,t) - i\pi(x,t)\right]$

- m_p je fyzikální (pozorovatelná) hmotnost, Z_ϕ je koeficient renormalizace vlnové funkce

  (AMP) je amputovaná Greenova funkce t.j. okleštěná o jednočásticové (full) propagátory

- Källen–Lehmannova reprezentace Greenovy funkce

$$\langle\Omega|T[\phi_H(x)\phi_H(y)]|\Omega\rangle = iZ_\phi\,\Delta_F(x-y, m_p^2) + i\int_{M_t^2}^{\infty} d(M^2)\,\rho(M^2)\,\Delta_F(x-y, M^2)$$, M_t^2 -- vícečásticová mez $\approx 4m_p^2$

- $Z_\phi = |\langle\Omega|\phi_H(0)|1_{\vec{p}=0}\rangle|^2 = \left[1 - \Sigma'(m_p^2)\right]^{-1} = -\mathrm{Res}\left(i\tau(p^2 = m_p^2)\right)$, kde $-i\Sigma(p^2) =$ 
- $\rho(q^2) = \delta(q^2 - m_p^2) Z_\phi + \sum_{\alpha_0} \delta(q^2 - m_\alpha^2)|\langle\Omega|\phi_H(0)|\alpha_0\rangle|^2$, spektrální funkce, suma jde přes všechny stavy s nulovou celkovou hybností

$$= -\frac{\mathrm{Im}(i\tau(p^2 = q^2))}{\pi}$$

10. Yang-Millsova pole a jejich kvantování, Faddeev-Popovova duchová pole, kalibrace a ‘t Hooftův trik, Goldstonův teorém a Higgsův mechanismus, Callan-Symanzikova rovnice renormalizační grupy a β funkce, poruchový výpočet β funkce pro skalární pole, koncept asymptotické svobody, pojem efektivní teorie.

Yang-Millsova pole

- Yang-Millsova pole lze chápat jako lokální formy konexe na principálním bandlu
  → jsou to 1-formy s hodnotami v Lieově algebře
- Interakce s poli je zprostředkována skrz minimální interakci
  $\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$
- Kalibrační transformace $A_\mu^{(U)} = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} U\partial_\mu U^{-1}$
- Field strenght $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$
- Kinetický člen $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

Kvantování Y-M polí

- buď $\chi(A) = 0$ podmínka, která protne každou kalibrační orbitu právě jednou
- potom potom pomocí Faddeev-Popovova determinantu

$$\left(\Delta_{FP}[A]\right)^{-1} = \int \mathcal{D}U\; \delta[\chi(A^{(U)})]$$, kde $\mathcal{D}U$ je Haarova míra na strukturní grupě

můžeme vyfaktorizovat objem kalibrační orbity z partiční funkce

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}U\; \Delta_{FP}[\chi]\, \delta[\chi(A^{(U)})]\, e^{iS} = \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A_\mu\; \Delta_{FP}[\chi]\, \delta[\chi(A^{(U)})]\, e^{iS}$$

- abychom mohli formulovat diagramatická pravidla musíme všechno přepsat do exponenciály
- Faddeev-Popův determinant je determinantem operátoru

$$M_\chi(x,y)_{ac} = \delta(x-y)\left(f^{abc}\partial^\mu A_\mu^b + f^{abc} A_\mu^b \partial^\mu + \frac{1}{g}\delta^{ac}\Box \right) = \delta(x-y)\, M_\chi(x)$$

- z Berezinova počtu $\det(iM_\chi) = \int \mathcal{D}\bar{\eta}\,\mathcal{D}\eta\; \exp\left(i\int \bar{\eta}(x)\, M_\chi(x)\, \eta(x)\right)$

- t'Hooftův trik: $\chi = 0 \longrightarrow \tilde{\chi} = \chi + c = 0$, c je funkce $\Rightarrow \int \mathcal{D}c\, \exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int c^2(x)\, d^4x\right)$ je konstanta

$$\longrightarrow Z = \int \mathcal{D}c \int \mathcal{D}A_\mu\; \Delta_{FP}[\chi]\,\delta[\chi + c]\, \exp\left(iS - \frac{i}{2\xi}\int c^2(x)\, d^4x\right)$$
$$= \int \mathcal{D}A_\mu\, \mathcal{D}\bar{\eta}\, \mathcal{D}\eta\; \exp\left(i\left(S - \frac{1}{2\xi}\int \chi^2(x)\, d^4x + \int \bar{\eta}(x)\, M_\chi(x)\, \eta(x)\, d^4x\right)\right)$$

- $\bar{\eta}, \eta$ jsou Faddeev-Popova duchová pole, která v teorii vystupují pouze na interních hranách diagramů

Goldstonův teorém

- pokud má lagrangián symetrii danou grupou G a tato grupa působí tranzitivně na vakuové varietě $\mathcal{M}_0 = \{\phi \mid V(\phi) = 0\}$ pak dojde k narušení symetrie a v teorii se objeví $\dim \mathcal{M}_0$ nehmotných bosonů
→ trik je posunout původní pole do nového minima

(Př) $\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 - v^2)^2$ ϕ je triplet $\Rightarrow \mathcal{M}_0 = S^2$

$= (\partial_\mu\phi)^2 + \frac{2v^2\lambda}{4!}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - \frac{\lambda}{4!}v^4 \longrightarrow$ částice se zápornou hmotností

$\phi = (\xi_1, \xi_2, c + \psi) \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi_i)^2 - \frac{\lambda}{4!}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\psi + c)^2 - c^2\right)^2 = \frac{\lambda}{4!}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \psi^2 + 2\psi c\right)^2$

→ dostáváme $2 = \dim SO(3) - \dim SO(2)$ nehmotné bosony a jednu zbývající hmotnou částici s $m_\psi = \frac{\lambda}{3}c^2$

Higgsův mechanismus

- předpokládejme nabité skalární pole interagující s elektromagnetickým polem

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi)$$

- pokud $V(\phi^\dagger\phi) = \frac{\lambda}{6}\left(\phi^\dagger\phi - \frac{1}{2}c^2\right)^2$ pak ϕ by mělo zápornou hmotnost pokud $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$

$\rightarrow$ postulujeme $\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{c}{\sqrt{2}}$ (BÚNO) (tachyonová kondenzace)

- v polární parametrizaci $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(c+\rho)e^{i\theta}$

$$\rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2}(c+\rho)^2 \underbrace{(eA_\mu + \partial_\mu \theta)^2}_{eB_\mu} - \frac{\lambda}{4!}\left(\rho^2 + 2\rho c\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{e^2}{2}B^2(c+\rho)^2 - \frac{\lambda c^2}{6}\rho^2 - \frac{\lambda c}{3!}\rho^3 - \frac{\lambda}{4!}\rho^4$$

- Fázovým přechodem $\langle 0|\phi|0\rangle = 0 \longrightarrow \langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$ dostaneme z hmotného nabitého skalárního a nehmotného kalibračního vektorového pole hmotné skalární pole a hmotné vektorové pole

Callan–Symanzikova rovnice

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} + \beta_{m^2}\frac{\partial}{\partial m^2} + n\gamma_\phi\right) G_n(x_1, \dots, x_n; \lambda; m^2; \mu) = 0, \text{ kde } \beta_\lambda = \mu \frac{d\lambda}{d\mu}\Big|_{\lambda_0}, \ \beta_{m^2} = \mu\frac{dm^2}{d\mu}\Big|_{\lambda_0, m_0^2} \ \gamma_\phi = \frac{1}{\sqrt{Z_\phi}}\mu\frac{d\sqrt{Z_\phi}}{d\mu}\Big|_{\lambda_0}$$

- minimální renormalizační předpis pro teorii ϕ^4

$$\mu^{-2\varepsilon}\lambda_0 = \lambda + \sum_{k\geq 1}\frac{f_k(\lambda)}{\varepsilon^k} \longrightarrow \text{z poruchového rozvoje 4-bodové vrcholové funkce } \Gamma^{(4)}$$

$$m_0^2 = m^2\left(1 + \sum_{k\geq 1}\frac{b_k(\lambda)}{\varepsilon^k}\right) \rightarrow \text{z poruchového rozvoje 2-bodové vrcholové funkce } \Gamma^{(2)} / \text{self-energie } \Sigma$$

$$Z_\phi = 1 + \sum_{k\geq 1}\frac{a_k(\lambda)}{\varepsilon^k} = \frac{1}{1-\Sigma'(m)}$$

- Z argumentu, že β-funkce musí být regulární (bez pólů) dostaneme předpisy

$$\beta_\lambda = 2\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - 1\right)f_1, \quad 2\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - 1\right)f_k = \hat{\beta}_\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}f_k, \quad \hat{\beta}_\lambda = \beta_\lambda + 2\varepsilon\lambda$$

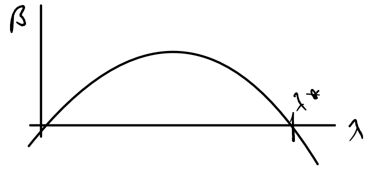
$$\beta_{m^2} = m^2\gamma_{m^2}(\lambda), \quad \gamma_{m^2}(\lambda) = 2\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}b_1(\lambda) \quad 2\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}b_{k+1}(\lambda) = \left(\gamma_{m^2}(\lambda) + \hat{\beta}_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)b_k(\lambda)$$

$$\gamma_\phi = -\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}a_1(\lambda), \quad \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\hat{\beta}_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - 2\gamma_\phi\right)a_k$$

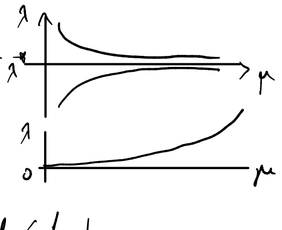
- pro řešení K-S rovnice parametrizujeme λ, m^2 energetickou škálou

$\rightarrow$ máme rovnice $\mu\frac{d}{d\mu}\lambda(\mu) = \beta(\lambda)$ $\mu\frac{d}{d\mu}m^2 = \gamma_{m^2}(\lambda(\mu))m^2 \longrightarrow m^2(\mu) = m^2(\mu_0)\exp\left(\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{\gamma_{m^2}(\lambda(s))}{s}ds\right)$

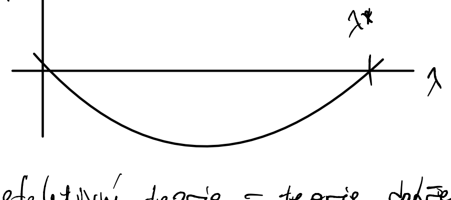
- chování teorie výrazně závisí na průběhu β funkce



λ^* je v této situaci atraktor



$\lambda = 0$ je odpudivý stabilní bod



λ^* je odpudivý stabilní bod

$\lambda = 0$ je přitažlivý stabilní bod $\longrightarrow$ asymptotická svoboda

- efektivní teorie – teorie dobře fungující na určité energetické škále

$\rightarrow$ má typicky kladnou β-funkci $\Rightarrow$ Landauův pól – pro konečnou energetickou škálu interakční konstanta diverguje