Aplikovaná matematika pro mateřskou školu

Lukáš Vácha

24. září 2021

1 Matika

1.1 ALGE

Definice 1.1 (Grupa) *Grupa je* $(G, e, \cdot)$*, kde* $G \neq \emptyset$*,* $e \in G$*,* $\cdot : G \times G \to G$*:*

1. *(asociativita)* $\forall x, y, z \in G : (xy)z = x(yz)$
2. *(jednotka)* $\forall x \in G$*:* $ex = xe = x$
3. *(inverze)* $\forall x \in G$*:* $\exists x^{-1}$*:* $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

Definice 1.2 (Těleso) *Těleso je* $(\mathbb{F}, +, \cdot)$*,* $\{0, 1\} \subset \mathbb{F}$*,* $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$*,* $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$*:*

1. *...*

Definice 1.3 (Kvaterniony) *Kvaterniony:* $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$

1. $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$

1.2 RMF

- Vlnová rovnice
$$\Box\psi = \Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$
$\Box$ je d'Alembertův operáthor. Řešení je:
$$\begin{aligned} \psi(x, t) = A \exp\left(i\left(kx - \omega t\right)\right) \\ \omega^2 = c^2k^2 \end{aligned}$$

- Vedení tepla:
$$\Delta - \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$
Řešení:
$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi}t)^n} e^{\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

- LaPlace:
$$\Delta\psi = 0$$
Řešení, $n = \dim \geqslant 3$:
$$\psi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}}\|x\|^{n-2}} = \frac{1}{4\pi\|x\|}$$

Fourierova transformace:
$$\mathscr{F}[f(x)](\xi) = \int_{\mathbb{R}}^{n} e^{i}x\xi f(x)dx$$

1.3 LAA

Definice 1.4 (Hilbertův prostor) *Hilbertův prostor je $\mathscr{H}$ úplný vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ se skalárním součinem: $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathbb{F}$:*

1. $\langle x|\alpha y + z\rangle = \alpha\langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$
2. $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$
3. $\langle x|y\rangle \geqslant 0$ *a* $\langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2 Tenzorový calculus

Mikowskiho časoprostor:
$$\left(\mathbb{R}^4, \langle x \mid y\rangle = \eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu\right) \ni \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Metrický tenzor:
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenzorový součin:

2.1 TG

Definice 2.1 (Grafová posloupnost) *Grafová posloupnost*

Tvrzení 1 (Brouwerova věta o pevném bodě) *Brouwerova věta o pevném bodě*

2.2 ASY

Definice 2.2 (Laundauovy symboly) *Laundauovy symboly*

2.3 NAH

Definice 2.3 (σ-algebra) *σ-algebra*

...

1. Teorie míry - σ-algebra, Borelovské množiny, měřitelné funkce [NAH]
2. Statistika, momenty

3 ELMA, VOAF

Maxwellovy rovnice:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla \times B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 j$$

Potenciály:

$$E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \qquad B = \nabla \times A$$

Kalibrace Λ:

$$\tilde{A} = A + \nabla \Lambda(x,t) \qquad \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\partial \Lambda(x,t)}{\partial t}$$

Coulombova kalibrace:

$$\nabla \cdot A = 0 \qquad \varphi = 0$$

Lorenzova kalibrace:

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Vlnová rovnice:

$$\Box \psi = \Delta \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Vlnění podle Maxwellových rovnic:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times E = -\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \nabla \cdot E - \Delta E = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times B$$

Z toho už plyne:

$$\Box E = 0 \qquad \Box B = 0$$

Disperzní vztah:

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

Relativisticky:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Směr šíření, E a B jsou na sebe kolmé.

$$n \times E = cB$$

4 TEF

Úloha 2 těles, nové souřadnice:

$$r = r_1 - r_2 \qquad R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 +_2}$$

$$M = m_1 + m_2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

Lagrangián

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - U(x)$$
$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r)$$

Efektivní potenciál:

$$U_{ef.} = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Keplerova úloha:
...
Eulerovy setrvačníky:
...
Lagrangeův formalismus:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Euler-Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Variační počet:

Definice 4.1 (Prostor křivek)

$$C^{(r)}([a,b]) = \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \mid \varphi \textit{ má spojité derivace do řádu } r\}$$

Norma:

$$\|\varphi\| = \max_{x\in[a,b]} \{ \left|\varphi^{(n)}(x)\right| \mid n \in \hat{r}\}$$

Funkcionál:

$$I : C^{(r)}([a,b]) \to \mathbb{R}$$

Variace funkcionálu je δI:

$$\lim_{\|\delta\varphi\|} \frac{I[\varphi+\delta\varphi] - I[\varphi] - \delta I[\delta\varphi]}{\|\delta\varphi\|} = 0$$

Ekvivalentně:

$$\delta I(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} I[\varphi + \varepsilon\delta\varphi]$$

Tvrzení 2 (Hamiltonův princip) *Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $[t_1, t_2]$ se děje po křivce (trajektorii), na které nabývá akce S stacionární hodnoty vzhledem k izochronním ($\delta t = 0$) variacím s pevnými konci ($\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$.*

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(x(t), \dot{x}(t), t\right) dt$$

Fermatův princip:
Hamiltoniáni nejpoužívanějších systémů:

1 částice	$H = \frac{p^2}{2m} + U(x)$
ultrarelativistická	$H = pc$
LHO	$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$
Izotropní LHO	$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \|\mathbf{x}\|^2$
Homogenní pole	$H = \frac{p^2}{2m} + mgz$
Coulombův potenciál	$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{q}{\|x\|}$
Centrální gravitace	$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Gm}{\|x\|}$
Částice v EM	$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi$
Relativistická částice	$H = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2 + U(x)}$
Relativistická částice v EM	$H = c\sqrt{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + m_0^2 c^2 + q\varphi}$

Tvrzení 3 (Theorém Noetherové) *Pro každou 1-parametrickou grupu symetrií H existuje integrál pohybu a naopak.*

Tvrzení 4 (Rovnice kontinuity)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

Lorentzova grupa:

$$O(1,3) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{4,4} \mid \mathbb{A}^T \mathbb{J} \mathbb{A} = \mathbb{J}\} \qquad\qquad (\mathbb{J})_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

má 4 komponenty souvislosti...

5 TSFA

je trash

6 KVAN

Hilbertovy prostory:

1. Spin: $\mathbb{C}^2$; $\langle x|y\rangle = \overline{x}_i y_i$
2. $\mathbb{C}^n$; $\langle x|y\rangle = \overline{x}_i y_i$
3. Částice: $L^2(\mathbb{R}^n)$; $\langle \psi|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)}\varphi(x)dx$
4. l^n; $\langle a|b\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$

Definice 6.1 (Sdružený operátor) *Nechť $\hat{A}$ je lineární operátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$, pak $\psi \in \operatorname{Dom} \hat{A}^*$ právě, když existuje $\psi^* \in \mathscr{H}$ takové, že $\forall \varphi \in \mathscr{H} : \left\langle \psi \middle| \hat{A}\varphi \right\rangle = \langle \psi^* | \varphi \rangle$. Potom $\psi^* = \hat{A}^*\psi$ a $\hat{A}^*$ je k $\hat{A}$ sdružený.*

$\hat{A}^*$ se značí také $\hat{A}^\dagger$.

Definice 6.2 (Symetrický operátor) *$\hat{A}$ lineární operátor na $\mathscr{H}$ je symetrický právě tehdy, když $\operatorname{Dom} \hat{A} \subset \operatorname{Dom} \hat{A}^*$ a $\hat{A} = \hat{A}^*$ na $\operatorname{Dom} \hat{A}$.*

Definice 6.3 (Samosdružený operátor) *$\hat{A}$ lineární operátor na $\mathscr{H}$ je samosdružený právě tehdy, když $\hat{A}$ je symetrický a $\operatorname{Dom} \hat{A} = \operatorname{Dom} \hat{A}^*$.*

Princip korespondence:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -i\hbar \boldsymbol{\nabla} \\ x &= x \\ E &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ L_i &= -i\hbar \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Pauliho Hamiltonián pro částici se spinem v EM poli:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi + \frac{2\mu_0}{\hbar}\mathbb{B} \cdot \mathbb{S}$$

Pauliho matice:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \operatorname{Tr}\sigma_i = 0 \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$$

Blochova sféra
skládání momentů hybnosti, izospin
Wigner-Ekhart thm., Clepsh-Gordan koef.
Schrödingerova rovnice:

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Klein-Gordonova rce [KTPA]
proudová hustota

7 Geometrie (tj, GMF, GR, LAG, ALGE ...)

Grupa
Diferencovatelná varieta [GMF]
Liova grupa a algebra [LAG]
Fibrovaný prostor
Vektorové pole
Pullback
V o implicitním zobrazení [MAA4, GMF, LAG] pro variety
příklad - $F : \mathbb{R}^3 \to S^2$; $F(x) = \|x\|$
příklad $GL(n, \mathbb{R})$ je otevřená, souvisloslá?
GL, O, SO, SU grupa transformací, symetrií
Generátor grupy, exponenciela [LAG, KTPA]
Stonův thm. [FAN, KTPA]

8 OR

prostory a variety

9 ZJF

účinné průřezy [ZJF→KTPA]